ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY–SCHWARZ DẠNG ENGEL TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bất đẳng thức là một chủ đề đa dạng và hấp dẫn với nhiều bạn trẻ. Nói đến bất đẳng thức nhiều bạn trong chúng ta thường quan tâm tới bất đẳng thức đại số mà ở đó có nhiều kĩ thuật để khai thác và chứng minh.Bài viết sau đây sẽ trình bày một kĩ thuật nhỏ nhưng khá hữu ích trong việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz để chứng minh các bất đẳng thức.Nhằm giúp bạn đọc hiểu rõ hơn ý tưởng và cách tiếp cận mỗi bài toán bất đẳng thức thì đối với mỗi bài toán tôi đều phân tích hướng tiếp cận, sau đó nêu ý tưởng làm bài và cuối cùng là lời giải chi tiết cho bài toán đó, ở đây chúng ta xét với bất đẳng thức ba biến, đối với các bất đẳng thức nhiều biến hơn chúng ta làm tương tự. Hi vọng bài viết sẽ hữu ích cho nhiều bạn đọc.

Bài viết đã được xem xét kĩ nhưng cũng khó tránh khỏi thiếu sót.Mọi ý kiến đóng góp cho bài viết thêm phong phú và hoàn thiện hơn xin gửi về địa chỉ: hoangquan9@gmail.com.

Hà Nội, ngày 25 tháng 3 năm 2012

Người viết

Hoàng Minh Quân

I.Phát biểu và chứng minh bất đẳng thức Cauchy–Schwarz dạng Engel.

Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$là các số thực bất kì và $b_1, b_2, ..., b_n$là các số thực dương.Khi đó , ta luôn có:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \qquad (*)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

Chứng minh

Trước hết chúng ta chứng minh bất đẳng thức đơn giản sau:

Cho a, b, x, y là các số thực và $x, y > 0$.Khi đó:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \qquad (1)$$

Thật vậy, bất đẳng thức được viết lại thành

$$a^2y(x+y) + b^2x(x+y) \geq (a+b)^2xy \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$$

(Luôn đúng) Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$. Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Với 6 số a, b, c, x, y, z và $x, y, z > 0$.Áp dụng bất đẳng thức (1) hai lần ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Do đó bằng phép quy nạp toán học với $a_1, a_2, ..., a_n$là các số thực bất kì và $b_1, b_2, ..., b_n$là các số thực dương.Khi đó , ta luôn có:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \qquad (*)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

II.Ứng dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz dạng Engel vào các bài toán điển hình

Bài toán 1 Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \geq 3$.Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x + \sqrt{yz}} + \frac{y^2}{y + \sqrt{zx}} + \frac{z^2}{z + \sqrt{xy}} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích bài toán:

Tiếp cận bài toán chúng ta thấy vế trái của bất đẳng thức có dạng phân thức, tử số của mỗi biểu thức có dạng bình phương như vậy chúng ta nghĩ ngay tới việc áp dụng dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng Engel để đưa về bất đẳng thức đơn giản hơn đã biết cách làm.Vậy ta làm như sau:

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng Engel, ta có:

$$\frac{x^2}{x + \sqrt{yz}} + \frac{y^2}{y + \sqrt{zx}} + \frac{z^2}{z + \sqrt{xy}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x + y + z + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}}$$

Mặt khác:

$$x+y+z \geq \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$$

nên ta có:

$$\frac{x^2}{x+\sqrt{yz}}+\frac{y^2}{y+\sqrt{zx}}+\frac{z^2}{z+\sqrt{xy}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z+x+y+z}=\frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3}{2}$$

(Vì giả thiết $x+y+z \geq 3$).
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$

Bài toán 2 Cho ba số thực dương a,b,c.Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} \geq 1$$

Phân tích bài toán:
Tiếp cận bài toán, chúng ta thấy vế trái của bất đẳng thức có dạng phân số, điều đó gợi nhớ cho chúng ta có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng Engel, nhưng muốn vậy tử số của mỗi phân thức phải là bình phương của một số. Do đó ta nghĩ tới việc nhân cả tử và mẫu của một phân thức với một số để ta áp dụng được bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng Engel.Do đó chúng ta làm như sau:

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng Engel, ta có:

$$VT=\frac{a^2}{a(b+2c)}+\frac{b^2}{b(c+2a)}+\frac{c^2}{c(a+2b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}=1$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$

Bài toán 3 Cho các số thực dương a,b,c.Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3} \qquad (1)$$

Phân tích bài toán:
Tiếp cận bài toán, chúng ta thấy vế trái của bất đẳng thức có dạng phân số, và quan sát số hạng đại diện chẳng hạn $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}$chúng ta thấy tử số là a^3 và chúng ta mong muốn giảm bậc đi cho dễ làm.Điều này gợi cho chúng ta nghĩ tới sử dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng Engel để đưa về chứng minh bất đẳng thức mới đơn giản hơn.

Chứng minh

Ta sẽ tìm cách đưa vế trái (1) về dạng dùng được bất đẳng thức Cauchy–Schawrz.

$$VT(1)=\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}$$

$$=\frac{a^4}{a(a^2+ab+b^2)}+\frac{b^4}{b(b^2+bc+c^2)}+\frac{c^4}{c(c^2+ca+a^2)}$$

$$\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}$$

Vì

$$a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

Nên

$$VT(1)\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\geq \frac{a+b+c}{3}$$

Hay

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}-\frac{a+b+c}{3}\geq 0\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2)\geq (a+b+c)^2$$

tương đương

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc\geq 0$$

tương đương

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài toán 4 (IMO1995)Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$
Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq \frac{3}{2}$$

Phân tích bài toán:

Bài toán này khi tiếp cận, chúng ta thấy vế trái của bất đẳng thức có dạng phân số, bậc của mẫu số lớn hơn bậc của tử số. Điều đó giúp chúng ta nghĩ tới bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng Engel. Đến đây nếu áp dụng trực tiếp luôn, chúng ta có:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq \frac{(1+1+1)^2}{a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)}$$

Khi đó bài toán trở nên phức tạp hơn, và dễ dẫn tới bế tắc trong giải quyết. Vì vậy để ý một chút chúng ta thấy $\dfrac{1}{a^3(b+c)}=\dfrac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)}$, lúc này việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng Engel mang lại hiệu quả rõ rệt.

Chứng minh

Ta có:

$$VT=\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$

$$=\frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)}+\frac{\frac{1}{b^2}}{b(c+a)}+\frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)}\geq \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Vậy $VT\geq \dfrac{ab+bc+ca}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có:

$$VT\geq \frac{ab+bc+ca}{2}\geq \frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2}=\frac{3}{2}=VP$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài toán 5 Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$
Chứng minh rằng:
$$\frac{x^3}{2x + 3y + 5z} + \frac{y^3}{2y + 3z + 5x} + \frac{z^3}{2z + 3x + 5y} \geq \frac{1}{30}$$

Phân tích bài toán:
Quan sát bài toán chúng ta thấy đây là bất dẳng thức đối xứng ba biến có dạng phân thức, điều đó gợi cho chúng ta nghĩ tới bất đẳng thức Cauchy–Schawrz dạng Engel nhằm giảm bậc của phân thức giúp chúng ta có đánh giá dễ dàng hơn. Từ đó tiếp cận vế trái , ta phân tích $\frac{x^3}{2x + 3y + 5z} = \frac{x^4}{x(2x + 3y + 5z)}$ để áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schawrz. Chúng ta làm như sau:

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy– Schawrz dạng Engel ta có:
$$VT = \frac{x^4}{x(2x + 3y + 5z)} + \frac{y^4}{y(2y + 3z + 5x)} + \frac{z^4}{z(2z + 3x + 5y)}$$
$$\geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{2(x^2 + y^2 + z^2) + 8(xy + yz + zx)}$$
Lại có: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ nên
$$VT \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{10(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{10} \geq \frac{1}{30}$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Bài toán 6 Cho ba số thực dương a, b, c.thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$.Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} \geq \frac{9}{a + b + c}$$

Phân tích bài toán:
Tiếp cận bài toán chúng ta thấy vế trái của bất đẳng thức có dạng phân thức,.Như vậy chúng ta nghĩ tới sử dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng Engel để chứng minh.Vì giả thiết đề bài cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ nên để tận dụng tối đa giả thiết này thì chúng ta làm cho xuất hiện $a^2 + b^2 + c^2$.Điều đó giải thích cho tại sao chúng ta lại phân tích $\frac{a}{b^2c^2} = \frac{a^4}{a^3b^2c^2}$ chứ không phân tích $\frac{a}{b^2c^2} = \frac{a^2}{ab^2c^2}$dù chúng cùng đưa về dạng bình phương ở tử số.

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng Engel, ta có:
$$VT = \frac{a^4}{a^3b^2c^2} + \frac{b^4}{b^3c^2a^2} + \frac{c^4}{c^3a^2b^2}$$
$$\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b^2c^2(a + b + c)} = \frac{(3abc)^2}{a^2b^2c^2(a + b + c)} = \frac{9}{a + b + c}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

Bài toán 7 Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$.Chứng minh rằng:
$$\frac{a^4}{(a+b)^2(a+c)} + \frac{b^4}{(b+c)^2(b+a)} + \frac{c^4}{(c+a)^2(c+b)} \geq \frac{3}{8}$$

Phân tích bài toán:

Tiếp cận bài toán chúng ta thấy , vế trái của bất đẳng thức có dạng phân số, như vậy chúng ta có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwartz dạng Engel để chứng minh. Để ý một chút chúng ta thấy $\sum\limits_{cyc} \frac{a^4}{(a+b)^2(a+c)}$ có thể viết lại thành $\sum\limits_{cyc} \frac{\frac{a^4}{(a+b)^2}}{(a+c)}$ và như vậy dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng Engel đã xuất hiện. Công việc của chúng ta chỉ là áp dụng để chứng minh.

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng Engel, ta có:
$$\sum_{cyc} \frac{a^4}{(a+b)^2(a+c)} \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} \frac{a^2}{a+b}\right)^2}{2(a+b+c)} \qquad (1)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng Engel, ta có:
$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:
$$\sum_{cyc} \frac{a^4}{(a+b)^2(a+c)} \geq \frac{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{8} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{8} = \frac{3}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

Bài toán 8 Cho ba số thực dương a, b, c.Chứng minh rằng:
$$\frac{a^3}{a^3+abc+b^3} + \frac{b^3}{b^3+abc+c^3} + \frac{c^3}{c^3+abc+a^3} \geq 1$$

Phân tích bài toán:

Tiếp cận bài toán chúng ta thấy , vế trái của bất đẳng thức có dạng phân số, như vậy chúng ta có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwartz dạng Engel để chứng minh. Tuy nhiên quan sát chúng ta lại thấy bậc của tử số và mẫu số của mỗi phân thức đều cùng bậc ba. Do đó đây là bất đẳng thức thuần nhất để đơn giản chúng ta có thể chuẩn hóa $abc = 1$.Với việc chuẩn hóa $abc = 1$, chúng ta sử dụng phép thế thích hợp để đưa bất đẳng thức đã cho về bất đẳng thức đơn giản hơn mà chúng ta dễ nhận ra việc áp dụng được bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng Engel để chứng minh.

Chứng minh

Bất đẳng thức thuần nhất nên ta chuẩn hóa $abc = 1$.

Đặt $a = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}, b = \sqrt[3]{\frac{y}{z}}, c = \sqrt[3]{\frac{z}{x}}$ Với $x, y, z > 0$

Ta có:
$$\frac{a^3}{a^3+abc+b^3} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+1+\frac{z}{x}} = \frac{x^2}{x^2+xy+yz}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{x^2}{x^2+xy+yz}+\frac{y^2}{y^2+yz+zx}+\frac{z^2}{z^2+zx+xy}\geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng Engel, ta có:

$$\frac{x^2}{x^2+xy+yz}+\frac{y^2}{y^2+yz+zx}+\frac{z^2}{z^2+zx+xy}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}$$

Hay

$$\frac{x^2}{x^2+xy+yz}+\frac{y^2}{y^2+yz+zx}+\frac{z^2}{z^2+zx+xy}\geq\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2}=1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$ hay $a=b=c=1$.

Bài toán 9 Cho ba số thực dương a,b,c .Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\geq a+b+c$$

Phân tích bài toán:

Quan sát bài toán chúng ta thấy bất đẳng thức của đề bài ra nhìn khá phức tạp và chưa có dấu hiệu gì cho việc sử dụng được bất đẳng thức Cauchy- Schwartz nhưng bằng việc nắm chắc sử dụng Cauchy- Schwarz dạng Engel thì chúng ta có thể tách ra để được các phân thức có tử số là dạng bình phương. Bài toán đến đây trở nên dễ dàng hơn rồi.

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{c+a}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwartz dạng Engel, ta có:

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{c+a}\geq\frac{[2(a+b+c)]^2}{4(a+b+c)}=a+b+c$$

(Điều phải chứng minh)Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài toán 10 (USAMO 2003)Cho ba số thực dương a,b,c .Chứng minh rằng:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8$$

Phân tích bài toán:

Đây là một bài toán khá hay trong kì thi học sinh giỏi nước Mĩ năm 2003, bài toán này có khá nhiều cách chứng minh và thật thú vị chúng ta có thể giải bằng cách sơ cấp là áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng Engel. Khi giagr dạy giáo viên phân tích cho học sinh hiểu tại sao chúng ta nghĩ ra được cách giải này.

Tiếp cận bài toán chúng ta thấy vế trái của bất đẳng thức có dạng phân thức, dù tử số của mỗi phân số đều có dạng bình phương .Điều đó gợi cho chúng ta nghĩ tới sử dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng Engel nhưng chúng ta chưa thể sử dụng ngay được vì dấu của bất đẳng thức đã cho là dấu “ ”. Vậy ta tìm cách đưa về bất

đẳng thức mà có thể sử dụng tốt bất đẳng thức Cauchy- Schwartz dạng Engel.Khi đó
Để ý chúng ta thấy :$3-\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=\dfrac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}$
Do đó:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

tương đương

$$\frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{2(c+a-b)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{2(a+b-c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\ge 1$$

Đến đây việc sử dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwartz dạng Engel là dễ dàng.Chúng ta làm bài này như sau:

Chứng minh

Ta có nhận xét sau: $3-\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=\dfrac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}$
Do đó bất đẳng thức đã cho được viết lại.

$$\frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{2(c+a-b)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{2(a+b-c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\ge 1 \qquad (1)$$

Bây giờ chúng ta chứng minh Bất đẳng thức (1).
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz dạng Engel ta có: $a^2+b^2\ge\dfrac{(a+b)^2}{2}$ từ đó ta có:
$(a+b)^2\le 2(a^2+b^2), (b+c)^2\le 2(b^2+c^2), (a+c)^2\le 2(a^2+c^2)$ nên

$$VT(1)=\frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{2(c+a-b)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{2(a+b-c)^2}{2c^2+(a+b)^2}$$

$$\ge\frac{2(b+c-a)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}+\frac{2(c+a-b)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}+\frac{2(a+b-c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Vậy ta cần chứng minh $\dfrac{(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2}{a^2+b^2+c^2}\ge 1$ tức là ta chỉ cần chứng minh $(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2\ge a^2+b^2+c^2$
tương đương $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\ge 0$ (Đúng) .
Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.
Như vậy qua việc phân tích và cách giải 10 bài toán trên cho nhiều tình huống khác nhau. Hi vọng bạn đọc sẽ nắm được ý tưởng của việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schawrz vào việc chứng minh các bài toán bất đẳng thức.Sau đây là một số bài toán mời bạn đọc tự giải để củng cố thêm kĩ năng làm bài:

Bài toán 11 (Nebits)Cho ba số thực dương a,b,c.Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$$

Bài toán 12 (Croatia 2004) Cho ba số thực dương a,b,c.Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)}\ge\frac{3}{4}$$

Bài toán 13 (Rumani 2004) Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{bc(c+a)} + \frac{b}{ca(a+b)} + \frac{c}{ab(b+c)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)}$$

Bài toán 14 (Vasc)Cho ba số thực a, b, c không âm và hai trong ba số không đồng thời bằng 0.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{4b^2+c^2+a^2} + \frac{1}{4c^2+a^2+b^2} \leq \frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)} + \frac{1}{ab+bc+ca}$$

Bài toán 15 (Hoàng Minh Quân)Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(3b+5c)^3} + \frac{b}{(3c+5a)^3} + \frac{c}{(3a+5b)^3} \geq \frac{9}{512}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phạm Kim Hùng, Sáng tạo bất đẳng thức, NXB Hà Nội.

2. Phạm Văn Thuận, Lê Vĩ, Bất đẳng thức suy luận và khám phá, NXB ĐHQG Hà Nội.

3. Võ Quốc Bá Cẩn,Trần Quốc Anh , Bất đẳng thức và những lời giải hay, NXB Hà Nội,2009.

4. T.Andreescu,V.Cirtoaje, G.Dospinescu, M.Lascu.Old and New Inequalities, Gil publishing House

5. http://forum.mathscope.org/index.php;
http://onluyentoan.vn/index.php;
http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?act=idx