Một số bài toán trên tâm đường tròn Euler

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

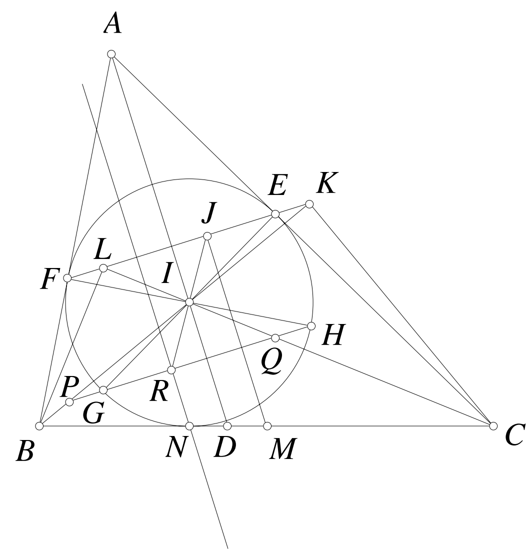
Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một số bài toán hay liên quan tới tâm đường tròn Euler hầu như đều là kết quả của tác giả trong quá trình đi dạy với nhiều công cụ hình học thuần túy khác nhau.

Đường tròn Euler hay tên quốc tế thường gọi là đường tròn 9 điểm [7] đi qua trung điểm ba cạnh, chân ba đường cao và trung điểm ba đoạn thẳng nối trực tâm và ba đỉnh tam giác là một kết quả rất nổi tiếng và được khai thác trong rất nhiều bài toán khác nhau. Tâm đường tròn này cũng là một đề tài thú vị trong các cuộc thi học sinh giỏi toán trong nước và quốc tế. Tôi xin trình bày lại một số bài toán chủ yếu do tôi đề xuất liên quan đến tâm đường tròn thú vị này.

Xuất phát từ kỳ thi học sinh giỏi quốc gia năm 2013 có bài toán hay như sau [1]

Bài toán 1. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB lần lượt tại E, F. G, H lần lượt là đối xứng của E, F qua I. Đường thẳng GH giao IB, IC lần lượt tại P, Q. Giả sử B, C cố định, A thay đổi sao cho tỷ số $\dfrac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải. Gọi IB, IC lần lượt cắt EF tại K, L. Chú ý tam giác AEF cân tại A nên $\angle KEC = \angle AEF = \dfrac{180^\circ - \angle A}{2} = 180^\circ - (90^\circ - \dfrac{\angle A}{2}) = 180^\circ - \angle BIC = \angle KIC$. Từ đó tứ giác $KEIC$ nội tiếp suy ra $\angle IKC = \angle IEC = 90^\circ$. Tương tự $\angle ILB - 90^\circ$. Từ đó nếu gọi M là trung điểm BC, J là trung điểm KL dễ có tam tam giác KLM cân nên $MJ \perp EF \quad (1)$.

Do G, H lần lượt là đối xứng của E, F qua I nên đường thẳng GH đối xứng đường thẳng EF qua I. GH, EF lần lượt cắt IB tại P, K suy ra I là trung điểm PK, tương tự I là trung điểm QL. Vậy hai đoạn KL và PQ đối xứng nhau qua I. Từ đó nếu gọi R là trung điểm PQ thì trung điểm J của KL và R đối xứng nhau qua I hay I là trung điểm RJ.

Gọi trung trực PQ cắt BC tại N, ta thấy RN vuông góc PQ, PQ song song $EF \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra RN song song JM. Gọi IA cắt BC tại D, dễ có $ID \equiv IA$ vuông góc EF nên ID cũng song song với RN, JM. Từ đó trong hình thang $RJMN$ có I là trung điểm RJ nên ID là đường trung bình, vậy D là trung điểm MN.

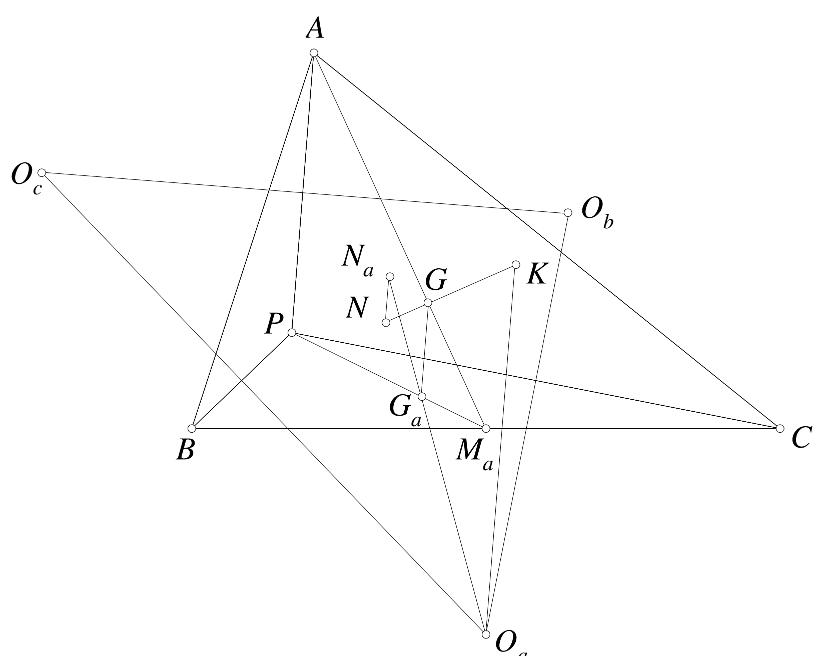
Theo tính chất đường phân giác $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = k$ không đổi nên D cố định. M là trung điểm BC cố định nên N đối xứng M qua D cố định. Vậy trung trực PQ đi qua N cố định. □

Nhận xét. Việc dựng ra thêm các điểm phụ L, K trong lời giải đóng vai trò quan trọng, nó cho phép ta sử dụng phép vị tự để chuyển các tính chất đường thẳng RN và JM cho nhau. Trong quá trình tìm hiểu bài toán tôi nhận thấy rằng thực chất K, L, N là các chân đường cao từ C, B, I của tam giác IBC. Như vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác NKL là đường tròn Euler của tam giác IBC nên nó cũng đi qua M và vì vậy tâm đường tròn Euler của tam giác IBC nằm trên trung trực KL cũng là đường thẳng JM. Vậy nếu từ tâm đường tròn Euler của tam giác IBC mà ta vẽ đường thẳng song song với IA thì nó cũng chính là trung trực KL mà đi qua trung điểm BC. Ta dễ thấy là các đường thẳng qua trung điểm BC, CA, AB mà lần lượt song song với IA, IB, IC thì đồng quy. Do đó ta đề xuất bài toán thú vị sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC tâm nội tiếp I. Gọi N_a, N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác IBC, ICA, IAB thì các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt song song với IA, IB, IC đồng quy.

Qua tìm hiểu và khai thác tôi nhận ra rằng bài toán này đúng không chỉ với tâm nội tiếp I mà thực chất nó đúng với mọi điểm P bất kỳ trong mặt phẳng. Do đó tôi đề xuất bài toán sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. Gọi N_a, N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy.



Hình 1.

Lời giải. Gọi O_a, O_b, O_c lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBC, PCA, PAB. Ta dễ thấy đường thẳng qua O_a song song PA chính là đường cao từ O_a của tam giác $O_aO_bO_c$ do đó các đường thẳng qua O_a, O_b, O_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy tại trực tâm K của tam giác $O_aO_bO_c$.

Gọi G_a, G_b, G_c, G lần lượt là trọng tâm tam giác PBC, PCA, PAB, ABC ta dễ thấy PG_a và AG đi qua trung điểm M_a của BC, từ đó dễ thấy G_aG song song PA nói cách khác các đường thẳng qua G_a, G_b, G_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy tại trọng tâm G của tam giác ABC.

Đến đây là lại chú ý vì N_a là tâm đường tròn Euler của tam giác PBC nên dễ có $2\overrightarrow{G_aN_a}+\overrightarrow{G_aO_a}=\overrightarrow{0}$. Từ đó sử dụng phép chiếu song song phương PA xuống đường thẳng KG, gọi N là hình chiếu song song phương PA của N_a xuống KG ta dễ suy ra $2\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GK}=\overrightarrow{0}$ nói cách khác đường thẳng qua N_a song song PA đi qua N xác định. Tương tự các đường thẳng qua N_b, N_c lần lượt song song với PB, PC cũng đi qua N ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán trong trường hợp tâm nội tiếp đã thú vị thì bài toán tổng quát của chúng ta còn thú vị hơn rất nhiều. Việc cho P di chuyển trùng một số tâm đặc biệt để tạo ra bài toán mới là công việc thú vị. Qua bài toán này ta cũng dễ rút ra tâm đường tròn Euler cũng chỉ là một trường hợp đặc biệt. Tương tư như cách chứng minh trên thì bài toán cũng sẽ đúng với trực tâm hoặc tổng quát hơn là một điểm trên đường thẳng Euler chia đoạn nối trực tâm, trọng tâm tỷ số cố định. Ta có các bài toán khác như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm của các tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua H_a, H_b, H_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm của các tam giác PBC, PCA, PAB. Gọi G_a, G_b, G_c lần lượt là trọng tâm các tam giác PBC, PCA, PAB. Gọi L_a, L_b, L_c lần lượt chia các đoạn H_aG_a, H_bG_b, H_cG_c cùng một tỷ số. Chứng minh rằng các đường thẳng qua L_a, L_b, L_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy.

Hoặc một khai thác tương tự được tác giả đề nghị trong cuộc thi giải toán mathley [3], các bạn hãy làm như bài luyện tập

Bài toán 6. Cho tam giác ABC và DEF nội tiếp đường tròn (O). Gọi N_a, N_b, N_c là tâm đường tròn Euler các tam giác DBC, ECA, FAB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt song song AD, BE, CF đồng quy.

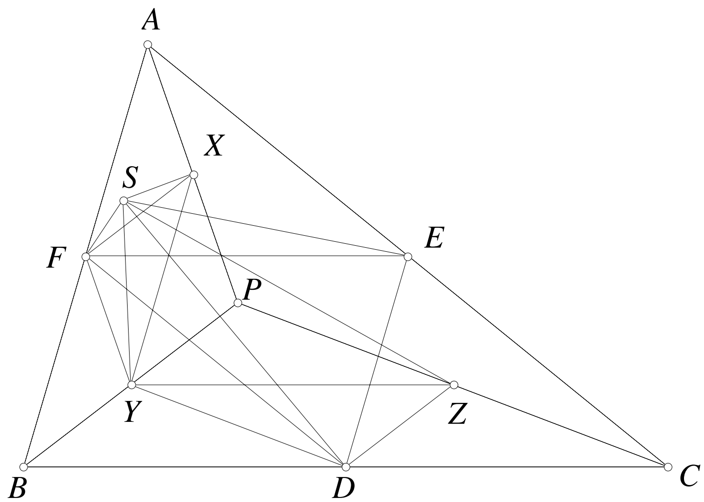
Sau khi đề xuất bài toán 3, tôi đã mạnh dạn nghĩ tới kết quả thay đường thẳng song song bởi đường thẳng vuông góc và thật tuyệt vời khi bài toán vuông góc đúng và rất thú vị như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. Gọi N_a, N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt vuông góc với PA, PB, PC đồng quy.

Bài toán trên theo đánh giá của tôi là bài toán hay. Tôi đã sử sụng bài toán này trong đợt kiểm tra đội tuyển VMO của trường THPT chuyên KHTN thật đáng tiếc là không có em nào giải được bài toán này.

Lời giải đầu tiên của bài toán này được góp ý từ một sinh viên trường ĐH khối kinh tế nhưng dài và không đẹp, sau đây tôi trình bày một lời giải khác tham khảo ý tưởng từ học trò **Tạ Hà**

Nguyên học sinh lớp 12A1 Toán khóa 48 trường THPT chuyên KHTN. Trong suốt bài toán này ta ký hiệu (XYZ) chỉ đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ.



Lời giải. Gọi D, E, F, X, Y, Z lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB, PA, PB, PC, thì các đường tròn $(DYZ), (EZX), (FXY), (DEF)$ lần lượt là các đường tròn Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB, ABC. Gọi đường tròn (DYZ) và đường tròn (DEF) cắt nhau tại S khác D. Ta có biến đổi góc

$(SF, SY) = (SF, SD) + (SD, SY)$

$= (EF, ED) + (ZD, ZY)$ (Do S thuộc các đường tròn $(DYZ), (DEF)$)

$= (BD, BF) + (BY, BD)$ (Do $EF \parallel BD, ED \parallel AC, YZ \parallel BD, ZD \parallel BY$)

$= (BY, BF)$

$= (XF, XY)$ (Do $XY \parallel BF, XF \parallel BY$).

Do đó S thuộc (FXY). Tương tự S thuộc (EZX). Ta có điều phải chứng minh.

Theo bài toán 3 thì các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt song song PA, PB, PC đồng quy tại Q. Ta chỉ cần chứng minh rằng Q nằm trên đường tròn $(N_aN_bN_c)$ thì hiển nhiên đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt vuông góc với PA, PB, PC sẽ đồng quy tại điểm đối tâm Q. Vậy ta biến đổi góc $(QN_b, QN_c) = (PB, PC) = (DZ, DY) = (SZ, SY) = (N_aN_b, N_aN_c)$. Ta chú ý đẳng thức cuối có là do đường tròn (N_a) và (N_b) có dây cung chung là SZ nên $N_aN_b \perp SZ$, tương tự $N_aN_c \perp SY$. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán nếu cho P trùng với một số điểm đặc biệt cũng sẽ dẫn tới nhiều hệ quả thú vị.

Bài toán trên cũng đã được tác giả gửi làm đề đề nghị cho cuộc thi giải toán kỷ niệm 50 năm tạp chí toán học và tuổi trẻ. Xong thật đáng tiếc không hiểu vì lý do gì mà bài toán lại được đăng lên diễn đàn toán học AoPS ở [2] bởi một nick name đến từ Việt Nam trước khi được đăng báo. Vì sự không may mắn này tôi xin thu hồi lại bài toán không gửi cho báo nữa và viết lại trong bài viết này để bạn đọc cùng tìm hiểu.

Ngoài ra khi khai thác các bài toán xoay quanh tâm đường tròn Euler tôi cũng đã tự tìm ra được nhiều bài toán khác khá thú vị, xin giới thiệu một vài bài toán với bạn đọc

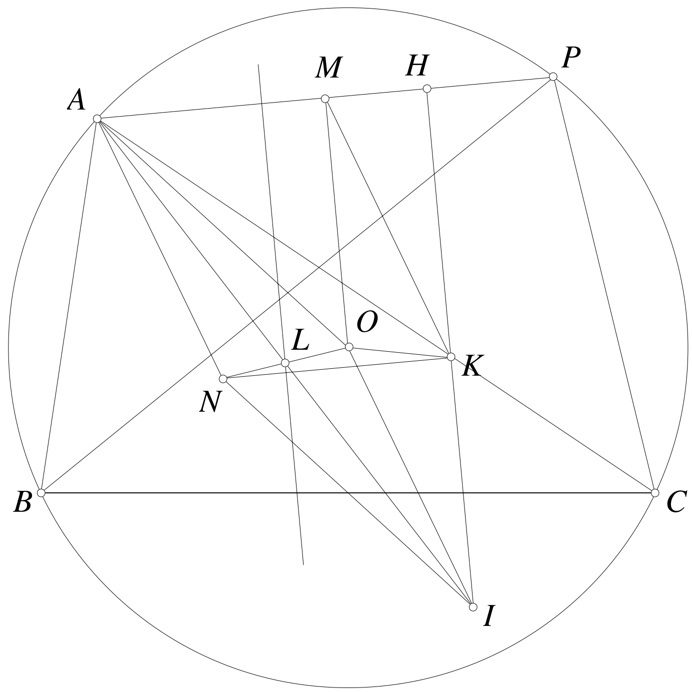
Bài toán 8. Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi K, L, N lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác DEC, BCA, FAE. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của K, L, N theo thứ tự lên AD, BE, CF. Chứng minh rằng trung trực của AX, EY, CZ đồng quy.

Trước hết ta có bổ đề sau

Bổ đề 8.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm trên (O). K là tâm đường tròn Euler của tam giác PBC.

a) Chứng minh rằng đường thẳng qua K vuông góc với PA luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

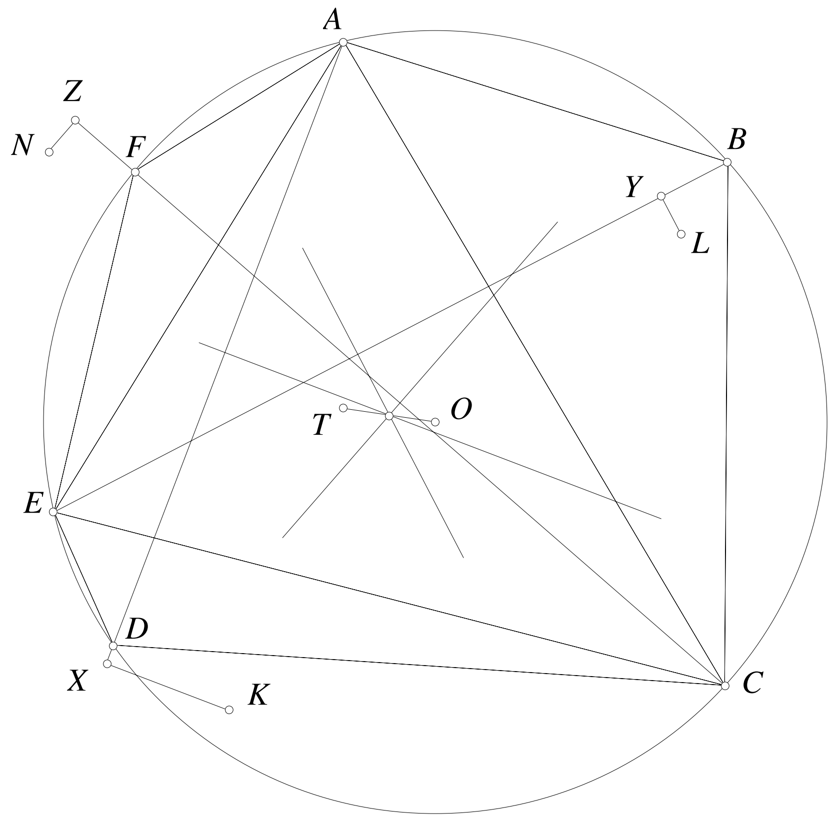
b) Gọi H là hình chiếu của K lên PA. Chứng minh rằng trung trực của AH luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.



Hình 2.

Chứng minh. a) Gọi N là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Gọi L là trung điểm của ON. Gọi I đối xứng A qua L, gọi M là trung điểm PA. Ta đã biết kết quả quen thuộc $\overrightarrow{KN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MA}$ suy ra $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MK}$. Do I đối xứng A qua L nên $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{OI}$. Vậy từ đó $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{KI}$ suy ra $KI \parallel OM \perp PA$. Vậy đường thẳng qua K vuông góc PA đi qua I cố định. Ta có điều phải chứng minh.

b) Dễ thấy trung trực của AH đi qua trung điểm L của AI cũng là trung điểm ON cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

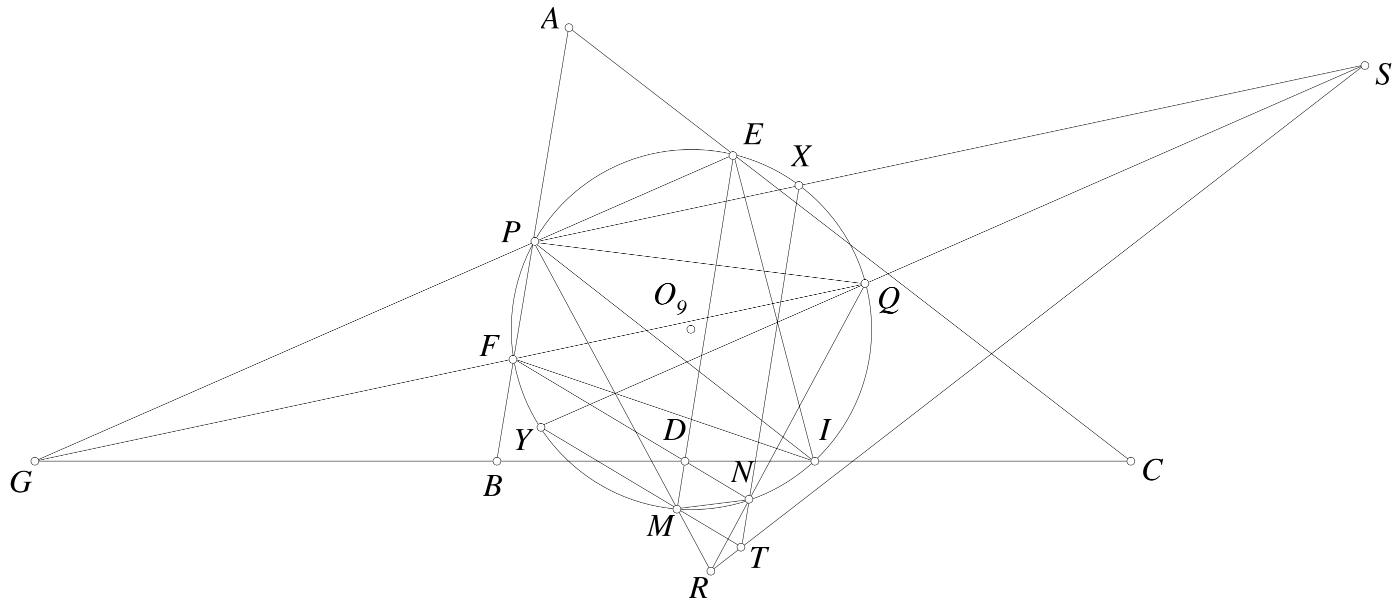


Hình 3.

Lời giải bài toán. Bài toán là hệ quả của bổ đề trên ta dễ thấy trung trực các đoạn AX, EY, CZ đồng quy tại trung điểm OT với T là tâm đường tròn Euler của tam giác AEC. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán trên dựa vào bổ đề là một bài toán đi qua điểm cố định rất thú vị. Chúng ta hoàn toàn có thể dựa vào bài toán đi qua điểm cố định để đề xuất thành các bài toán chứng minh đồng quy như trên. Bài toán trên đã được tác giả đề nghị trong kỳ thi chọn đội tuyển thi học sinh giỏi quốc gia trường THPT chuyên KHTN năm 2013 xem [4].

Bài toán 9. Cho tam giác ABC đường cao BE, CF và đường tròn Euler là (O_9), D, G thuộc BC sao cho $(BC, DG) = -1$. ED, FD lần lượt cắt (O_9) lần lượt tại M, N khác E, F. GE, GF cắt (O_9) lần lượt tại P, Q khác E, F. PM giao NQ tại R. Gọi S là đối xứng của G qua trung điểm PQ. Gọi T là đối xứng của D qua trung điểm MN. Chứng minh rằng R, S, T thẳng hàng.



Hình 4.

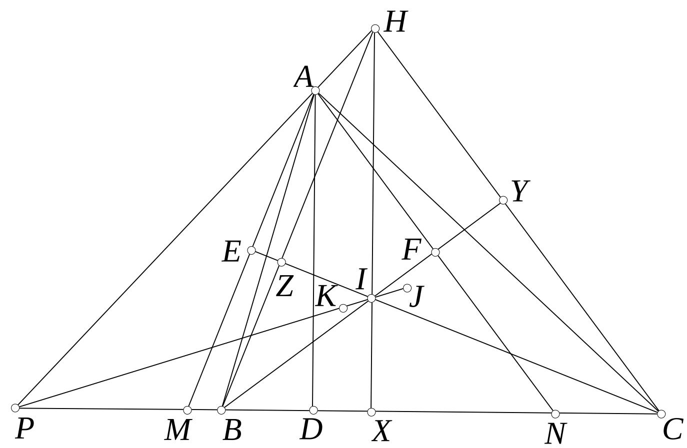
Lời giải. Gọi I là trung điểm của BC theo hệ thức Newton ta dễ có $IE^2 = IF^2 = IB^2 = IC^2 = \overline{ID}.\overline{IG}$.

Từ đó dễ có $\angle IFD = \angle IGF, \angle IED = \angle IGE$. Gọi PS cắt (O_9) tại X. Suy ra $\angle EPX = \angle EGF = \angle IGE - \angle IGF = \angle IED - \angle IFD = \angle IED - \angle IEN = \angle MEN$. Từ đó dễ suy ra $EM \parallel NX$ suy ra NT đi qua X. Tương tự gọi SQ cắt (O_9) tại Y thì MT đi qua Y. Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} P & N & Y \\ Q & M & X \end{pmatrix}$ ta thu được R, S, T thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán trên cũng là một kết quả đẹp được tác giả tạo ra khi đang tìm hiểu về các hệ thức trong hàng điểm điều hòa. Cũng thật đáng tiếc không hiểu vì một lý do gì mà bài toán cũng được đăng lên trong [6] bởi một nick name người Việt Nam mà cũng không thấy nhắc tới tên tác giả.

Ngoài ra việc khai thác tính chất tâm đường tròn Euler của tam giác IBC như trong bài toán 1 và bài toán 2 cũng đã mang đến rất nhiều bài toán thú vị khác, sau đây là ba bài toán thú vị do tôi đề xuất

Bài toán 10. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I. D, E, F là hình chiếu của A lên BC, IC, IB. Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác DEF. Chứng minh rằng KI đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác IBC.



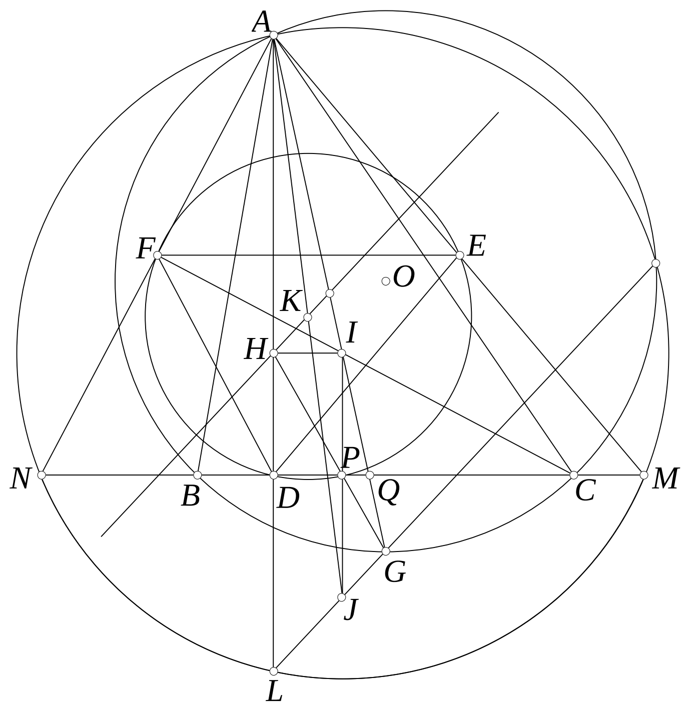
Hình 5.

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là giao điểm AE, AF với BC. Dễ dàng chứng minh E, F lần lượt là trung điểm AM, AN. Suy ra K là tâm ngoại tiếp tam giác DEF cũng là tâm đường tròn Euler của tam giác AMN. Cũng chứng minh được I là tâm ngoại tiếp tam giác AMN. Gọi IX, BY, CZ lần lượt là các đường cao của tam giác IBC và H là trực tâm tam giác. Dễ thấy $AM \parallel HB, AN \parallel HC$. Gọi P là giao điểm AH, BC. Phép vị tự tâm P biến tam giác AMN thành tam giác HBC. Lại có IK là đường thằng Euler của tam giác AMN. Gọi J là tâm đường tròn Euler của tam giác HBC, khi đó IJ là đường thẳng Euler của tam giác HBC. Vậy I, J, K thẳng hàng. J là tâm ngoại tiếp (XYZ), suy ra J cũng là tâm Euler của tam giác IBC. Suy ra điều phải chứng minh.

$\square$

Bài toán 11. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I. D, E, F là hình chiếu của A lên BC, IC, IB. Gọi AI cắt đường tròn ngoại tiếp (O) của tam giác ABC tại G khác A. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác DEF đi qua trung điểm AG.

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là giao điểm AE, AF với BC. H, K lần lượt là trực tâm và tâm ngoại tiếp tam giác DEF. AH cắt (AMN) tại L. J là đối xứng của A qua K và P là hình chiếu của I lên BC. Ta có các kết quả quen thuộc: L là đối xứng của A qua H, I là tâm ngoại tiếp tam giác AMN và J là đối xứng của I qua BC. Như vậy, dễ thấy $HK \parallel JL$ hay JL song song với đường thẳng Euler của tam giác DEF. Do $\angle FAH = \angle FCD = \dfrac{1}{2}\angle ABC = \angle ACF = \angle ADF = \angle FEH$ suy ra A, E, F, H cùng thuộc một đường tròn. Lại có $AE \perp IE, AF \perp IF$ suy ra A, E, F, I cùng thuộc một đường tròn, suy ra H thuộc đường tròn đường kính AI, suy ra $IH \perp AD$ suy ra $IHDP$ là hình chữ nhật.

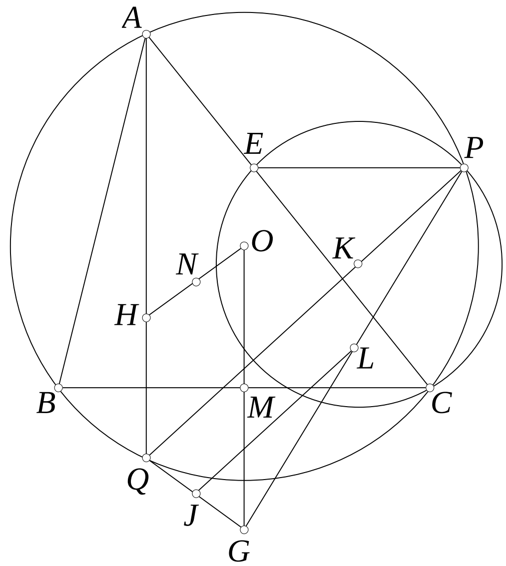


Hình 6.

Ta chứng minh H, P, G thẳng hàng. Gọi Q là giao điểm AG, BC. Lại có G là tâm ngoại tiếp tam giác IBC nên dễ có $QG.QA = QI(QG + GI)$ suy ra $QG.IA = QI.GI$ suy ra $\dfrac{QG}{IG} = \dfrac{IQ}{IA}$ suy ra $\dfrac{PQ}{PD} = \dfrac{PQ}{HI} = \dfrac{QG}{IG}$, suy ra H, P, G thẳng hàng. Suy ra L, J, G thẳng hàng. Suy ra $HK \parallel LG$ suy ra HK đi qua trung điểm AG. □

Bài toán 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P di chuyển trên (O). Đường thẳng qua P song song BC cắt CA tại E. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PCE và L là tâm đường tròn Euler của tam giác PBC. Chứng minh rằng đường thẳng qua L song song PK luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Lời giải. Gọi H, N lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm BC, và G là đối xứng của P qua L. Kết quả quen thuộc, ta có G là đối xứng của O qua BC. Gọi Q là giao điểm AH với (O). Do $PE \parallel BC$ suy ra $\angle CEP = \angle ACB$, suy ra $\angle CPK = 90° - \angle CEP = 90° - \angle ACB = \angle CAQ = \angle CPQ$ suy ra P, K, Q thẳng hàng.



Hình 7.

Đường thẳng qua L song song PK cắt GQ tại J. Suy ra J là trung điểm LQ. Tứ giác $OHQG$ là hình thang cân, NJ là đường trung bình của hình thang. Suy ra J đối xứng N qua BC. Suy ra đường thẳng qua L song song PK luôn đi qua điểm cố định là điểm đối xứng với tâm Euler của tam giác ABC qua BC. □

Nhận xét. Ba bài toán trên là ba bài toán mởi trên tâm đường tròn Euler và cũng đã được tác giả dùng nhiều lần trong các đợt tập huấn các đội tuyển trên cả nước. Các bài toán trên được hoàn thiện lời giải bởi học trò **Nguyễn Ngọc Chi Lan** học sinh lớp 12A1 Toán khóa 48 trường THPT chuyên KHTN.

Tài liệu

[1] Trần Quang Hùng, mở rộng bài toán hình học trong kỳ thi học sinh giỏi quốc gia năm 2013, tạp chí toán học và tuổi trẻ số 429 tháng 3 năm 2013.

[2] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=577336

[3] Cuộc thi giải toán mathley, http://www.hexagon.edu.vn/mathley.html

[4] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013.

[5] Trần Quang Hùng, Tỷ số kép, phép chiếu xuyên tâm, hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa, http://analgeomatica.blogspot.com/

[6] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=560895

[7] http://mathworld.wolfram.com/Nine-PointCircle.html

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com