BÙI QUANG TRƯƠNG

TÌM TỜI
LỜI GIẢI
CÁC PHƯƠNG TRÌNH VÔ ĐỊNH

Sách dùng cho học sinh
phố thông yểu toán

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - 1995
LÓI GIỚI THIỆU

Phương trình vở dinh là một chủ đề toán học xa xao và từ lâu rất quen thuộc đối với các bạn trẻ yêu toán. Nhưng điều kỳ diệu là những bí ẩn trong chứng không ngừng bị khám phá, mà cuốn sách này là một bằng chứng. Tác giả Bùi Quang Trưởng, với kinh nghiệm và sự áp ủ nhiều năm chủ đề này đã dẫn dắt bạn đọc đi từ phương trình vở dinh quen thuộc ax + by = c đến phương trình nghiệm nguyên bậc cao với những cách giải mới gọn gàng, dễ khi bắt ngòi, mang tính chất tìm tòi rõ rệt. Ví thế, cuốn sách này rất có ích cho các bạn trẻ yêu toán. Các em học sinh khá, giỏi toán ở cả cấp 2 và cấp 3 sẽ tìm thấy ở đây sự vận dụng khéo léo và linh hoạt các kiến thức thông thường như thế nào để giải những bài toán về tìm nghiệm nguyên từ đơn giản đến phức tạp, kể cả những bài toán có trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Hy vọng rằng sự dẫn dắt khéo léo của tác giả trong cuốn sách sẽ đem đến cho bạn đọc những giấy phút hào hứng và say mê với toán học phổ thông.

Tôi xin Trần trong giới thiệu cuốn sách "Tìm lời giải các phương trình vở dinh" với bạn đọc.


Giáo sư 1, phó Tiến sĩ

VŨ DƯƠNG THUY
LOẠI NỖI ĐẦU

Hơn ba thế kỷ đã trôi qua, phương trình Fecma không ngừng thách thức trí tuệ của con người. Chưa ai bác bỏ hay chứng minh được rằng "

"Phương trình \( x^n + y^n = z^n \) không có nghiệm trong tập hợp số tự nhiên khi \( n \) là số nguyên lớn hơn 2".

Trên lẽ cuốn "Số học" của Diophant - một cuốn sách mà các nhà sáng tạo ra lý thuyết số hiện đại đều phải học - Fecma đã ghi lại bài toàn đồ và tiếp sau đó là dòng chữ "Tôi đã tìm được cách chứng minh thật kỳ lạ mình đã này. Nhưng ở đây chiếu rọi của lẽ sách không cho phép trình bày cách chứng minh đó".

Fecma thường không công bố những phát hiện của mình khi còn sống. Và trong but tích còn lại của ông, người ta không tìm được một đầu vét nhỏ nào chứng minh ấy.

Nhiều bộ sách tuyệt đỉnh của nhân loại đã quan tâm đến bài toán này. Nhưng phương pháp tính toàn mới thật sặc bén và kỳ diệu đã được sáng tạo... mà lối khẳng định hay phù nhận chưa hề có.

Phương trình vô định là như thế!

Biệt bao con người vì đại như Acsimet (Archimede 287 - 212 trước công nguyên), Diophant (A. Diophante, thế kỳ III sau công nguyên), Fecma (P. Fermat, 1601 - 1665), Ole (L. Euler, 1707 - 1783), Gauco (K. Gauss, 1777 - 1855), Kumme (P. Kemmer, 1810 - 1893), ... đã bỉ chung lời cuối với một sứ mệnh gánh gom.

Sự khôn khéo và niềm sáng khơi mở hàn là phần thưởng xứng đáng giành cho những người yêu thích phương trình vô
dính.

Xưa nay, người ta vẫn xem phương trình vô định bậc hai không phải là để. Chỉ phương trình vô định bậc nhất là đã có phương pháp giải hoàn chỉnh nhờ Bkhaskara (nhà toán học Ấn Độ thế kỷ XII). Nhưng có lẽ của phương pháp chưa làm chúng ta vừa lòng. Các số nguyên $t$, $t_1$, $t_2$, ... liên tiếp phải xuất hiện, trợ giúp cho việc giải toán.

Nếu suy nghĩ một cách sáng tạo, chúng ta sẽ tìm ra những phương pháp giải vô cùng ngắn gọn, không bao giờ phải sử dụng đến $t_1$ và nếu không đòi hỏi mầu với kết quả thu được, chúng ta sẽ chính phục những phương trình còn phức tạp hơn nữa.

Cuốn sách này, được viết như một cuộc trò chuyện về việc tìm ra các phương pháp mới để giải phương trình $ax + by = c$ (chương I), tiên tới phương trình $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = f$ (chương II). Và chương III để cấp đến một số phương trình vô định bậc cao, cũng như một số phương trình vô định trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi trong nước và quốc tế.

Chúng tôi vô cùng cám ơn giáo sư Vũ Dương Thụy đã đọc kỹ bản thảo và cho những ý kiến quý báu.

Chúng tôi hy vọng rằng cuốn sách sẽ đem đến cho bạn đọc những giấy phướt hào hứng, và cùng hy vọng sẽ nhận được từ bạn đọc nhiều ý kiến bổ ích.

Tác giả
Chương I

BA CÁCH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH \( ax + by = c \)

§ 1. PHƯƠNG PHÁP TRUYỂN THÔNG

Sách giáo khoa* đã đưa ra thí dụ mẫu sau đây:

Bài toán 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định:
\[ 23x + 53y = 109 \]

Và giải như sau:

1. Ta rút án số có hệ số nhỏ hơn theo án số kia:
\[ x = \frac{109 - 53y}{23} = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23} \]
(tách các phần nguyên ra)

Muốn cho \( x \) nguyên khi \( y \) nguyên thì biểu thức \( \frac{17 - 7y}{23} \) phải bằng một số nguyên nào đó, mà ta gọi là \( t \).

Ta có: \( \frac{17 - 7y}{23} = t; \quad 17 - 7y = 23t \) hay \( 23t + 7y = 17 \)

Nếu ta tìm được cho \( t \) và \( y \) những giá trị nguyên thỏa mãn phương trình \( 23t + 7y = 17 \), tức là ta đã tìm được cho \( x \) những giá trị nguyên và đã giải được phương trình. Như vậy cách giải phương trình đã cho quý về cách giải một phương trình đơn giản hơn vì có hệ số nhỏ hơn.

* Đai số lớp 12, Nhà xuất bản giáo dục -1991
2. Với phương trình mới $23t + 7y = 17$ này, ta lại làm như trên. Ta rút $y$

$$y = \frac{17 - 23t}{7} = 2 - 3t + \frac{3 - 2t}{7}$$

Muốn cho $y$ nguyên thì biểu thức $\frac{3 - 2t}{7}$ phải bằng một số nguyên nào đó, chẳng hạn $t_1$. Ta sẽ có

$$\frac{3 - 2t}{7} = t_1 \text{ hay } 7t_1 + 2t = 3.$$ 

3. Thành thầu bài toán về cách giải một phương trình đơn giản hơn nữa. Ta lại tiếp tục làm như trên với phương trình này.

Ta rút $t$:

$$t = \frac{3 - 7t_1}{2} = 1 - 3t_1 + \frac{1 - t_1}{2}$$

Cho biểu thức $\frac{1 - t_1}{2}$ bằng một số nguyên $t_2$, ta có

$$\frac{1 - t_1}{2} = t_2 \text{ hay } 2t_2 + t_1 = 1$$

do đó:

$$t_1 = 1 - 2t_2$$

4. Bây giờ ta biểu thị trực tiếp $x$ và $y$ theo $t_2$.

Muốn thế, trong biểu thức của $t$, ta thay $t_1$ bằng biểu thức của nó theo $t_2$:

$$t = 1 - 3t_1 + t_2 = 1 - 3 \left( 1 - 2t_2 \right) + t_2$$

hay

$$t = -2 + 7t_2$$

Trong biểu thức của $y$ ta lại thay $t$ và $t_1$ bằng biểu thức của chúng theo $t_2$:  


\[ y = 2 - 3t + \frac{3 - 2t}{7} = 2 - 3t + t_1 = \]
\[ = 2 - 3(-2 + 7t_2) + (1 - 2t_2) \text{ hay } y = 9 - 23t_2. \]

Cuối cùng trong biểu thức của \( x \) ta thay \( t \) và \( y \) bằng biểu thức của chúng theo \( t_2 \):
\[ x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23} = 4 - 2y + t = \]
\[ = 4 - 2(9 - 23t_2) - 2 + 7t_2 = 4 - 18 + 46t_2 - 2 + 7t_2 \]
hay \[ x = -16 + 53t_2. \]

Nhu vậy, ta được hai biểu thức sau đây của \( x \) và \( y \) theo \( t_2 \):
\[ x = -16 + 53t_2; \quad y = 9 - 23t_2 \]

Cho \( t_2 \) những giá trị nguyên tùy ý (dương, âm hoặc 0), ta được vô số nghiệm của phương trình đã cho.

Hãy dừng lại một chút để ngẫm nghĩ về con đường đã dẫn tới đáp số.

Bằng việc dua ra các số nguyên \( t, t_1, t_2 \) sách giáo khoa đã liên tiếp thay phương trình phải giải bằng các phương trình có hệ số nhỏ hơn và tối khi xuất hiện hệ số bằng 1 bài toán sẽ kết thúc. Nhưng kết thúc vào lúc nào thì chỉ phụ thuộc vào các con số ở đầu bài, bắt chấp chúng ta hay sao? Phương pháp giải đó, về mặt lý thuyết, có thể xuất hiện \( t_{100}, t_{1000} \) hoặc hơn nữa mà máy tính dien tử mới đủ kiến nhân giải quyết. Và nói vắt và để đi tôi \( t_n \) là bao nhiêu thì nói vắt và trò về với \( x \) và \( y \) cũng bấy nhiêu. Như thế chúng ta đều leo lên đỉnh một ngôi nhà cóחר trời, rồi lên xuống để sang thấm anh bạn hàng xóm!

Cần tìm ra một con đường ngắn đáng lẽ phải có.
§ 2. **CON DUONG MÔI**

Có thể vào một lúc tình cờ, bạn gặp bài toán có dạng sau đây:

**Bài toán 2.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

\[ 12x + 67y = 43 \]

**GIẢI**

Ta có

\[
x = \frac{43 - 67y}{12} = 3 - 5y + \frac{7 - 7y}{12} = 3 - 5y + \frac{7(1 - y)}{12}
\]

Để \( x \) nguyên, với \( y \) nguyên thì \( \frac{7(1 - y)}{12} \) phải nguyên.

Nhưng vì 7 và 12 nguyên tố cùng nhau nên \( 1 - y \) phải chia hết cho 12, tức là \( 1 - y = 12t \) với \( t \) nguyên. Vậy \( y = 1 - 12t \) và \( x = 3 - 5(1 - 12t) + 7t = 67t - 2. \)

Các con số nguyên trong bài toán đã cho ta một lời giải đẹp! Có thể giải bài toán 1 theo cách đó được không? Niêu người cho ý kiến đó là kỳ quặc! Ta cứ thử xem.

Nhin lại dạng thức \( x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23} \)

chúng ta ước ao 17 và 7 có ước số chung, hay đẹp hơn nữa: 17 chia hết cho 7(!). Và cố tạo ra con số chia hết cho 7 ấy, ta cộng và trừ thêm 4 thì được

\[
x = 4 - 2y + \frac{7(3 - y) - 4}{23}
\]

Con số 4 mới xuất hiện đã gây thêm phiền phức. Nếu nó chia hết cho 23 thì tốt quá!
Bảng một lint cảm trục giác, chứng ta chọn con số khác: 46.
Ta viết:
\[ x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23} \]
\[ = 4 - 2y + \frac{17 + 46 - 7y - 46}{23} \]
\[ = 4 - 2y + \frac{7(9 - y)}{23} - 2 \]

Hệ số 1 đã xuất hiện! Do 7 và 23 nguyên tố cùng nhau nên để x và y nguyên ta phải có \( \frac{9 - y}{23} = t \) là một số nguyên. Suy ra
\[ y = 9 - 23t \] và \[ x = 4 - 2(9 - 23t) + 7t - 2 = 53t - 16. \]
Chứng ta đã đạt tới thằng lối, không còn nghi ngờ gì nữa. Lời giải đẹp của bài toán 2 có những con số đặc biệt đã được ép không thường tiếp cho bài toán 1 vòng không có gì đặc biệt đã thực sự thành công. Chứng ta tin tưởng xét bài toán tổng quát:

Tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định:
\[ ax + by = c \]
trong đó a, b, c là các số nguyên

Trước tiên, rút x và được \( x = \frac{c - by}{a} \)

Sau đó, chọn A là bội số nguyên của a, sao cho c + A chia hết cho b, tức là A = ma, c + A = kb với k, m là các số nguyên.

Vậy \( x = \frac{c + A - by - A}{a} = \frac{kb - by}{a} - m = \frac{b(k - y)}{a} - m \)

Cuối cùng, giải ước \( \frac{b}{a} \) để đưa về dạng tối giản \( \frac{b'}{a'} (= \frac{b}{a} ) \).

Để x nguyên phải có \( \frac{b'(k - y)}{a'} \) nguyên, nhưng do \( (b', a') = 1 \)
nên $k - y$ phải chia hết cho $a'$.

Vậy $k - y = ta'$ với $t$ nguyên $\rightarrow y = k - ta'$ và $x = \frac{t}{h'} \cdot m$.

Đó chính là con đường thử thật ngắn dẫn đến chứng ta tối thâm

và các hàng xóm - đáp số.

Chàng hạn, tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$-12x + 3\cdot x = 39 \cdot \frac{2}{9}$$

Trước hết, viết lại $3, 22 = 3, (2) = 3 + \frac{2}{9} = \frac{29}{9}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$-108x + 29y = 353.$$ 

Từ đó $y = \frac{353 + 108x}{29} = 12 + 3x + \frac{5 + 21x}{29}$

Nhận thấy trong các bộ số nguyên của $29$ là $\pm 29, \pm 58, \ldots$ thì $58$ khi cộng với $5$ sẽ chia hết cho $21$. Vậy:

$$y = \frac{5 + 58 + 21x - 58}{29} + 12 + 3x = 12 + 3x - 2 + \frac{21(3 + x)}{29}$$

Vì $(21, 29) = 1$ nên để $y$ và $x$ nguyên thì

$$\frac{3 + x}{29} = t$$

và $y = 10 + 3(29t - 3) + 21t = 108t + 1$.

Bảo giờ cùng chỉ cần đến ngắn ấy đồng cho mỗi phương trình với định bắc nhất $ax + by = c$. Chúng ta hay để $y$: khi thực hành tính toán với những con số cụ thể, nên chia $c$ và $b$ cho $a$ để thực hiện với những con số nhỏ hơn, để chi hơn.

Bản chất của phương pháp vừa nói là gì?

Là thay cho việc phải tìm ngay toán bổ các nghiệm, chúng ta chỉ cần tìm một nghiệm rồi sau đó suy ra tất cả các nghiệm còn lại.
Thật vậy, do \( c + A = kb \) và \( A = ma \), nên \( c + ma = kb \). Suy ra \( a(-m) + bk = c \).

Rõ ràng \( (-m; k) \) là một nghiệm nguyên của phương trình \( ax + by = c \).

\[\text{§3. CON DƯƠNG THÚ HAI}\]

Một câu hỏi rất tự nhiên xuất hiện: Có thể nhanh chóng giải được phương trình \( ax + by = c \) hay không, khi ta biết một nghiệm nguyên \((x_0, y_0)\) của nó. Câu trả lời là: Đúng:

Lúc này có thể viết

\[ ax_0 + by_0 = c \]

Nếu vậy thì

\[ ax_0 + by_0 = ax + by \] với cùng bằng \( c \). Suy ra:

\[ x = \frac{ax_0 + by_0 - by}{a} = x_0 + \frac{b(y_0 - y)}{a} \]

Thay \( \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \) với \( a', b' \) nguyên và \( (a', b') = 1 \)

chứng ta thấy rằng để \( x \) nguyên thì

\[ \frac{b'(y_0 - y)}{a'} \]

phải nguyên, tức là \( \frac{y_0 - y}{a'} = t \) nguyên.

Vậy \( y = y_0 - a't \) và \( x = x_0 + b't \).

\[\text{Thí dụ 1: Nếu nhằm được một nghiệm của bài toán 1 là} x = -16, y = 9 \text{ ta tiến hành giải như sau:}\]

\[\text{Vì} (-16; 9) \text{ là nghiệm nên} 23 \cdot (-16) + 53.9 = 109\]

Nhưng \[ 23x + 53y = 109 \text{ nên} \]

\[ 23x + 53y = 23 \cdot (-16) + 53.9 \]
\[
x = \frac{23(-16) + 53.9 - 53y}{23} = -16 + \frac{53(9 - y)}{23}
\]

Do 53 và 23 nguyên tố cùng nhau nên để \(x\) nguyên thì \(9 - y\) cần chia hết cho 53, tức \(9 - y = 53t\) với \(t\) nguyên.

Vậy \(y = 9 - 53t\) và \(x = -16 + 53t\).

**Thí dụ 2:** Nếu đoán được phương trình
\[-108x + 29y = 353\]
có nghiệm là \(x = -3, y = 1\) thì ta có thể viết
\[-108x + 29y = 353 = -108(-3) + 29.1\]

Suy ra
\[
x = \frac{108.3 + 29 - 29y}{-108} = -3 + \frac{29(1 - y)}{-108}
\]
Vi \((29, 108) = 1\) nên để \(x\) nguyên phải có
\[
\frac{1 - y}{-108} = t \text{ nguyên. Vậy } y = 1 + 108t \text{ và } x = -3 + 29t.
\]
Rõ ràng bản chất của phương pháp 1 và phương pháp 2 là như nhau: tim một nghiệm nguyên của ax + by = c rồi sẽ suy ra tất cả.

Có một điều khá thú vị: khi tìm hiểu bản chất của phương pháp 1, chúng ta khám phá ra phương pháp 2. Và một điều này nữa: một phương pháp thứ 3, với dạng vẻ mở ảo bên phương pháp 1, đã hiện lên ngày càng rõ nét khi việc tìm hiểu phương pháp 2 được hoàn toàn táo!

§ 4. **CON ĐƯỜNG THỦ BA**

Chúng ta xem lại bài toán 1, sau đó tác rút \(x\)
\[
x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23}
\]
Ta biết rằng để mau chóng đến được đáp số, phải làm xuất hiện hệ số của y là 1. Có nghĩa là phải làm thay đổi hình dạng bên ngoài của các con số. Hãy cử nhẫn vào đang thực trên rối nghiên nghiệm. Chợt vào một phút giây lắc lư sáng, ta bắt gặp khuôn mặt mới thích hợp của 17.

\[17 = 63 - 46.\]

Và thật nhanh chóng, chúng ta biến đổi:

\[x = 4 - 2y + \frac{63 - 46 - 7y}{23} = 4 - 2y + \frac{7(9 - y)}{23} - 2\]

Do \((7, 23) = 1\) nên muốn \(x\) và \(y\) nguyên phải có \(\frac{9 - y}{23} = t\) nguyên. Vậy \(y = 9 - 23t\) và \(x = 53t - 16.\)

Liệu điều đó có làm nên một phương pháp mới hay không?

Chúng ta nhìn lại thi dụ 2 (trang 13) và nhận thấy một biến dạng của 353:

\[353 = -108(-3) + 29.1\]

Điều đó có nghĩa là 353 cần được phân tích thành tổng dài số của hai số: một là bội số nguyên của \((-108),\) một là bội số nguyên của 29.

Chúng ta có phương pháp 3 để giải phương trình \(ax + by = c\) như sau:

Rút \(x\) được

\[x = \frac{c - by}{a}\]

Viết c dưới dạng \(c = ap + bq\) với \(p, q\) nguyên thì

\[x = \frac{ap + bq - by}{a} = p + \frac{b(q - y)}{a} = p + \frac{b'(q - y)}{a'}\]

trong đó \((a', b') = 1\) và \(a', b'\) nguyên sao cho \(\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}\)
Để $x$ nguyên thì $\frac{q - y}{a'} = t$ nguyên.

Do đó $y = q - a't$ và $x = p + b't$

Thế là chúng ta đã có trong tay ba phương pháp để tìm nghiệm nguyên của phương trình $ax + by = c$. Chúng được áp dụng với các mục mục khác nhau nhưng cũng một bản chất. Trong phương pháp 3 thì $(p, q)$ chính là một nghiệm của phương trình $ax + by = c$.

Bây giờ, chúng ta xét thêm một thí dụ nữa, giải bằng cả ba cách.

**Bài toán 3.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình $1994x + 2001y = 2027$.

(Các con số thể hiện năm 1994, năm đầu tiên của thế kỷ XXI và năm mà người ta dự đoán con người sẽ lên sao Hỏa).

**Giải**

**Cách 1:**

$$x = \frac{2027 - 2001y}{1994} = 1 - y + \frac{33 - 7y}{1994}$$

$$= 1 - y + \frac{33 - 2 \cdot 1994 - 7y + 2 \cdot 1994}{1994}$$

$$= 1 - y + \frac{7(-565 - y)}{1994} + 2$$

$$= 3 - y - \frac{7(565 + y)}{1994}$$

Vì 7 và 1994 nguyên tố cùng nhau nên để $x$, $y$ nguyên thì $565 + y = 1994t$
với $t$ nguyên. Vậy $y = 1994t - 565$, $x = 568 - 2001t$

*Cách 2:*

Thay $x = 568$, $y = -565$ vào phương trình thấy nó nghiệm đúng, tức là:

$$1994.568 + 2001(-565) = 2027$$

So sánh với phương trình đã cho ta rút ra

$$1994x + 2001y = 1994(568) + 2001(-565)$$

$$x = \frac{1994.568 + 2001(-565) - 2001y}{1994}$$

$$= \frac{2001(-565 - y)}{1994}$$

Do $(2001; 1994) = 1$ nên để $x$ nguyên phải có

$$\frac{565 + y}{1994} = t$$

Vậy $y = 1994t - 565$

$x = 568 - 2001t$.

*Cách 3:*

Trong bài toán này nó cũng tương tự như cách 1, nhưng nếu ta "quên" chia 2027 cho 1994 thì

$$x = \frac{2027 - 2001y}{1994} = -y + \frac{2027 - 7y - 3 \cdot 1994 + 3 \cdot 1994}{1994}$$

$$= -y + \frac{7(-y - 565)}{1994} + 3$$

Để $x$, $y$ nguyên thì phải có $\frac{y + 565}{1994} = t$

và suy ra $y = -1994t - 565$

$x = 568 - 2001t$. 

16
Cả ba phương pháp cùng tồn tại bên nhau, để khi gặp mỗi phương trình dạng \( ax + by = c \), phương pháp thích hợp nhất sẽ được sử dụng. Không có phương pháp nào tỏ ra ưu việt trong mọi trường hợp để có thể dễ dàng bỏ rơi các phương pháp còn lại.

Điều đó làm nên vẻ đẹp của toán học, của các con số tương chúng khó khan mà biên đối thật kỳ ảo. Nó thách thức chúng ta tân cống vào những thành lũy tương chúng bất khả xâm phạm.

Chương II

ĐƯỜNG DẤN TỚI PHƯƠNG TRÌNH

\[ ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = f \]

§ 1. MỘT BÀI THI ĐẠI HỌC:

PHƯƠNG TRÌNH \( a(x + y) = xy \)

Chúng ta bắt gặp bài toán sau đây trong kỳ thi vào Đại học tháng 6 năm 1970.


GIẢI

Gọi số đấu thủ của mỗi đối là \( x \) và \( y \), theo giả thiết chúng là nghiệm nguyên dương của phương trình vô định \( xy = 4(x + y) \)
Vậy $4x = xy - 4y = y(x - 4)$. Cần tách riêng hai ẩn:

$$y = \frac{4x}{x - 4}$$

Tới đây ta cần cộng và trừ thêm 16 vào 4x:

$$y = \frac{4x - 16 + 16}{x - 4} = 4 + \frac{16}{x - 4}$$

Để $y$ nguyên thì $x - 4$ phải chia hết 16, tức là $x - 4 = \pm 16, \pm 8, \pm 4, \pm 2, \pm 1$.

Giả sử $x$ lẻ, thế thì $x - 4 = \pm 1$.

Nếu $x - 4 = 1 \rightarrow x = 5$ và $y = 4 + 16 = 20$

Nếu $x - 4 = -1 \rightarrow x = 3$ và $y = 4 - 16 < 0$ (loại)

Vậy một đội có 5 người và đội kia có 20 người

Chúng ta lưu ý rằng phương trình thường trở nên khó hơn nhiều khi có mặt số hàng chéo $xy$.

Vậy mà khi cộng trừ thêm một con số thịnh hợp bài toán 4 đã được giải quyết một cách nhẹ nhàng.

Không may khôn khôn, chúng ta giải bài toán tổng quát:

Tim nghiệm nguyên của phương trình vô định:

$$a(x + y) = xy$$ với $a$ là số nguyên.

- Nếu $a = 0$ thì $x = 0$, $y$ nguyên bất kỳ
  hoặc $y = 0$, $x$ nguyên bất kỳ
- Nếu $a \neq 0$ thì $ax = xy - ay = y(x - a)$

Do $x = a$ ($\neq 0$) không phải là nghiệm nên

$$y = \frac{ax}{x - a} = \frac{ax - a^2 + a^2}{x - a} = \frac{a(x - a) + a^2}{x - a} = a + \frac{a^2}{x - a}$$
Để y nguyên thì $x - a$ phải là ước số nguyên của $a^2$, từ đó tính được $x$ và $y$.

Bài toán 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $p(x + y) = xy$ trong đó $p$ là số nguyên tố.

Giải

$$px = y(x - p)$$

Nếu $x = p$ thì dạng thức trở thành $p^2 = 0$; vò lý.

Vậy $x \neq p$, nên ta có thể viết:

$$y = \frac{px}{x - p} = \frac{px - p^2 + p^2}{x - p} = \frac{p}{x - p}$$

Để y nguyên thì phải có $p^2$ chia hết cho $x - p$, nghĩa là $x - p = \pm p^2$, $\pm p$, $\pm 1$. Ngoài ra không có khả năng nào khác vì $p$ là số nguyên tố. Bài toán có sáu nghiệm:

- $x - p = p^2 \Rightarrow x = p^2 + p, \quad y = p + 1$
- $x - p = -p^2 \Rightarrow x = -p^2 + p, \quad y = p - 1$
- $x - p = p \Rightarrow x = 2p, \quad y = p + p = 2p$
- $x - p = -p \Rightarrow x = 0, \quad y = 0$
- $x - p = 1 \Rightarrow x = 1 + p, \quad y = p + p^2$
- $x - p = -1 \Rightarrow x = p - 1, \quad y = p - p^2$

Trong các bài toán trên, hệ số của $x$ và $y$ như nhau, khá đặc biệt. Hãy xét trường hợp mạnh hơn.

Bài toán 6. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $7x - 12y = xy$

Giải

$$7x = xy + 12 \quad y = y(x + 12)$$
Giá trị \( x = -12 \) không nghiệm đúng, nên
\[
y = \frac{7x}{x + 12} = \frac{7x + 7.12 - 7.12}{x + 12} = 7 - \frac{7.12}{x + 12}
\]
Để \( y \) nguyên thì \( x + 12 \) phải là ước số nguyên của 7.12. Các ước số đó là \( \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 7, \pm 12, \pm 14, \pm 21, \pm 28, \pm 42, \pm 84 \).
Từ đó dễ dàng suy ra các nghiệm cần tìm.
Chúng ta có cảm giác các phương trình loại này luôn có nghiệm. Vì vậy hãy xét bài toán sau:

Bài toán 7. Tồn tại hay không nghiệm nguyên của phương trình
\[
ax + by = xy
\]
với \( a, b \) là các số nguyên?

GIÁI

Có thể viết \( ax = xy - by = y(x - b) \)

- Xét trường hợp phương trình có nghiệm \( x = b \).
  Thế thì \( ab = 0 \).
  + Nếu \( a = 0 \) \( \Rightarrow 0x + by = by \Rightarrow y \) nguyên bất kì
  + Nếu \( b = 0 \) (lưu ý \( x = b \)) \( \Rightarrow a.0 + 0.y = 0.y \Rightarrow y \) nguyên bất kỳ.
  (Nếu vậy khi \( a = 0 \) hoặc \( b = 0 \), phương trình đã cho có nghiệm \( x = b \), \( y \) nguyên bất kì và có cả nghiệm \( y = a, x \) nguyên bất kỳ)

- Xét trường hợp phương trình không có nghiệm \( x = b \).
Lực này $x \neq b$ nên

$$y = \frac{ax}{x - b} - \frac{ab}{x - b} + \frac{ab}{x - b} = a + \frac{ab}{x - b}$$

Để $y$ nguyên thì $x - b$ phải là ước số nguyên của $ab$, suy ra $x - b$ nhận ít nhất các giá trị sau (khi $a$ và $b$ là các số nguyên tố): $\pm ab, \pm a, \pm b, \pm 1$. Nếu $|a| = |b| = 1$, bài toán có hai nghiệm, đó là trường hợp số nghiệm ít nhất. Rõ ràng với $a, b$ nguyên, phương trình $ax + by = xy$ luôn luôn có nghiệm. Tối đây này sinh ra một loạt bài toán thật là thú vị.

**Bài toán 8.** Chứng minh rằng, điều kiện cần và đủ để phương trình $ax + by = xy$ với $|a| \neq 1, |b| \neq 1$ có đúng tâm nghiệm nguyên phân biệt là: $a$ và $b$ là các số nguyên tố không giống nhau.

**Bài toán 9.** Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để phương trình $ax + by = xy$ với $|a|, |b| \neq 1$ có sâu nghiệm nguyên phân biệt là: $a = b = p$ là một số nguyên tố.

Nhưng bài toán không kích một chút nào, nhưng trình bày lời giải ở đây là thừa, chúng được giải tương tự bài toán 7.

Thế là chúng ta đã bước một chân vào thế giới các phương trình vô định bậc hai và cảm thấy yên ơn. Chẳng có gì khiến ta phải dừng lại.

§ 2. **PHƯƠNG TRÌNH** $ax + by = xy + c$.

Đó là dạng tổng quát được nếu lên từ các phương trình $ax + by = c$ và $ax + by = xy$, với $a, b, c$ là các số nguyên.

Một lần nữa, chúng ta lại thử dùng phương pháp cộng và trừ thêm một con số thích hợp.
Trước tiên cần tách riêng hai ẩn:

$$ax = y(x - b) + c$$

Nhưng để chia hai ẩn cho $x - b$ ta cần xét hai khả năng:
- Giả sử phương trình có nghiệm $x \neq b$ thì

$$y = \frac{ax - c}{x - b} = \frac{ax - ab + ab - c}{x - b} = a + \frac{ab - c}{x - b}$$

Để $y$ nguyên thì $x - b$ phải là ước số nguyên của $ab - c$
- Giả sử phương trình có nghiệm $x = b$: lúc này $ax = 0 + c$ $\Rightarrow x = \frac{c}{a}$. Để nghiệm $x = b$ được chấp nhận thì phải có $b = \frac{c}{a} \Rightarrow c = ab$.

Tương tự như vậy, xét $y \neq a$ và $y = a$, ta đi tới kết quả:
- Nếu $ab = c$ thì phương trình $ax + by = xy + c$ có nghiệm $x = b$, $y$ nguyên bất kỳ và $y = a$, $x$ nguyên bất kỳ.
- Nếu $ab \neq c$ thì $x - b$ hoặc $y - a$ là ước số nguyên của $ab - c$.

Bài toán 10. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$4x + 3y = xy - 20$$

GIẢI

$$3y = x(y - 4) - 20$$

Nhận thấy $y = 4$ không nghiệm đúng nên

$$x = \frac{3y + 20}{y - 4} = \frac{3y - 12 + 12 + 20}{y - 4} = 3 + \frac{32}{y - 4}$$

Muốn $x$ nguyên thì $y - 4$ phải là ước số nguyên của 32, tức là $y - 4 = \pm 32, \pm 16, \pm 4, \pm 2, \pm 1$. 

22
Để gọn gàng, các nghiệm được tính theo bảng

<table>
<thead>
<tr>
<th>$y - 4$</th>
<th>32</th>
<th>16</th>
<th>8</th>
<th>4</th>
<th>2</th>
<th>1</th>
<th>-1</th>
<th>-2</th>
<th>-4</th>
<th>-8</th>
<th>-16</th>
<th>-32</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>$y$</td>
<td>36</td>
<td>20</td>
<td>12</td>
<td>8</td>
<td>6</td>
<td>5</td>
<td>3</td>
<td>2</td>
<td>0</td>
<td>-4</td>
<td>-12</td>
<td>-28</td>
</tr>
<tr>
<td>32</td>
<td>1</td>
<td>2</td>
<td>4</td>
<td>8</td>
<td>16</td>
<td>32</td>
<td>-32</td>
<td>-16</td>
<td>-8</td>
<td>-4</td>
<td>-2</td>
<td>-1</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Có tất cả 12 nghiệm.

Bài toán 11. Cho phương trình $6x - 5y = xy - 30$

Hãy tìm nghiệm a/ nguyên âm
b/ nguyên dương
c/ nguyên

GIẢI

$6x = y(x + 5) - 30$

Nếu $x = -5$ thì đẳng thức đúng với mọi $y$ nguyên

Nếu $x \neq -5$ thì $y = \frac{6x + 30}{x + 5} = 6$

a/ Các nghiệm nguyên âm là $x = -5$, $y$ nguyên âm bất kỳ.
b/ Các nghiệm nguyên dương là $y = 6$, $x$ nguyên dương bất kỳ.
c/ Các nghiệm nguyên là $x = -5$, $y$ nguyên bất kỳ hoặc $y = 6$, $x$ nguyên bất kỳ

Bài toán 12. Tồn tại hay không hai số nguyên tố $(x, y)$ thỏa mãn đẳng thức $x + 3,5y = 0,5xy$?
GIẢI

Có thể viết $2x + 7y = xy \iff 2x = y(x - 7)$

Nhận thấy $x$ không thể bằng 7, vậy

$$y = \frac{2x}{x - 7} = \frac{2x - 14 + 14}{x - 7} = 2 + \frac{14}{x - 7}$$

Để $y$ nguyên thì $\frac{14}{x - 7} = \pm 14, \pm 7, \pm 2, \pm 1$ là các ước số

nguyên của 14. Nhưng vì $y$ là số nguyên tố (để thấy là số nguyên tố lẻ) nên $\frac{14}{x - 7}$ chỉ có thể là 1. Nhưng khi đó $x = 21$, không phải là số nguyên tố nên không thỏa mãn đầu bài.

Chứng ta lưu ý rằng 1 không phải là số nguyên tố, cũng không phải là hợp số.

Tuy nhiên, dựa vào đặc điểm $x$ và $y$ là các số nguyên tố, ta sẽ có lời giải đẹp hơn:

Đẳng thức $2x = y(x - 7)$ chứng tỏ $2x$ chia hết cho $y$. Ví $(x, y) = 1$ nên 2 chia hết cho $y$, vậy $y = 2$. Nhưng nếu $y = 2$ thì $x$ không tồn tại. Phương trình đã cho không có nghiệm nguyên tố.

Bài toán 13.

Tìm các số nguyên trái đầu $x$ và $y$ thỏa mãn đẳng thức $2x + 5y = xy + 13$.

GIẢI

$$2x = y (x - 5) + 13.$$  

Do $x = 5$ không thỏa mãn đẳng thức nên $x - 5 \neq 0$
\[ y = \frac{2x - 13}{x - 5} = \frac{2x - 10 - 3}{x - 5} = 2 - \frac{3}{x - 5} \]

Để \( y \) nguyên thì \( x - 5 = \pm 1, \pm 3 \), do đó \( x = 4, 6, 2, 8 \) và các giá trị y tương ứng là 5; -1; 3; 1. Trong đố chỉ có một nghiệm thỏa mãn đầu bài là \( x = 6, y = -1 \).

Bây giờ, chúng ta thử "liệu linh" cho hệ số của số hạng chéo xy khác \( \pm 1 \).

**Bài toán 14.** Tôn tại chăng nghiệm nguyên của phương trình

\[ 4x + 7y = 2xy + 17 \]

**GIẢI**

\[ 4x = y (2x - 7) + 17 \]

Vì \( 2x - 7 \neq 0 \) (do \( x \) nguyên) nên

\[ y = \frac{4x - 17}{2x - 7} = \frac{4x - 14 - 3}{2x - 7} = 2 - \frac{3}{2x - 7} \]

Để \( y \) nguyên thì \( 2x - 7 = 3; -3; 1; -1 \). Khi đó \( x = 5; 2; 4; 3 \) và các giá trị y tương ứng là 1; 3; -1; 5. Bài toán có bốn nghiệm.

Nhưng niêm vui của chúng ta kéo dài không lâu khi xét bài toán tổng quát:

"Tiế nghiém nguyên của phương trình \( ax + by = c + dxy \) với các số nguyên \( a, b, c, d \).

Thật vậy, ta có \( ax = c + y (dx - b) \)

\[ \Leftrightarrow y (dx - b) = ax - c \]

Trước khi chia hai vế cho \( dx - b \) cần xét hai khả năng:

- Nếu phương trình có nghiệm \( x = \frac{b}{d} = k \) (nguyên)
thì lúc đó cả hai vế cùng bằng không, tức là \( x = c/a \). Phương trình có nghiệm \( x = k, y \) nguyên bất kỳ khi và chỉ khi

\[
\frac{b}{d} = \frac{c}{a} = k \text{ với } k \text{ nguyên}
\]

(dễ dàng suy ra tương tự \( \frac{a}{d} = \frac{c}{b} = k' \text{ nguyên} \))

thì có nghiệm \( y = k', x \) nguyên bất kỳ)

- Nếu \( dx - b \neq 0 \) (tức là \( b \) không chia hết cho \( d \))

\[
y = \frac{ax - c}{dx - b}
\]

Lúc này nếu \( \frac{a}{d} = m \) là một số nguyên thì

\[
y = \frac{dmx - mb + mb - c}{dx - b} = m + \frac{mb - c}{dx - b}
\]

Vậy \( dx - b \) phải là ước số nguyên của \( mb - c \), từ đó xác định được \( x \) và \( y \).

Nhưng nếu \( a \) không chia hết cho \( d \), \( mb \) cũng không chia hết cho \( d \), phương pháp cộng trừ thêm một con số thích hợp ra bất kỳ?

Xét

\[
y = \frac{ax - c}{dx - b}
\]

Nếu \( (d, a) = 1 \)

\[
dy = \frac{dax - dc - ab + ab}{dx - b}
\]

\[
= a + \frac{-dc + ab}{dx - b}
\]

Chúng ta đã nhận lến lung một con ngựa bất kham, lẽ nào lại
cam chịu để nó hắt xuống. Không! Chỉ có điều là phải dùng cách trị khác.

§ 3. **PHƯƠNG TRÌNH** \( ax + by = dxy + c \)

Khi chưa giải được bài toán tổng quát, ta hãy thử xét một trường hợp cụ thể. Biết đầu nó chăng gồm lên trong ta một điều gì đó.

Hãy lấy hổ hóa một phương trình và tìm nghiệm nguyên của nó.

**Bài toán 15.** Tồn tại hay không nghiệm nguyên của phương trình

\[ 2x - 3y = -5xy + 39 \]

**GIẢI**

\[ 2x = y(3 - 5x) + 39. \]

Vi \( 3 - 5x \neq 0 \) (đo \( x \neq \frac{3}{5} \)) nên \( y = \frac{2x - 39}{3 - 5x} \)

Để \( y \) nguyên thì điều kiện cần (mà chưa đủ) là \( |2x - 39| \geq |3 - 5x| \rightarrow (2x - 39)^2 \geq (3 - 5x)^2 \)

\[ \iff (2x - 39)^2 - (3 - 5x)^2 \geq 0 \iff (-3x - 36)(7x - 42) \geq 0 \]

\[ \iff -12 \leq x \leq 6. \]

Thật sung sướng! Chúng ta đã giới hạn được \( x \) để từ đó dễ dàng tìm được các nghiệm nguyên \((x, y)\) của phương trình là (-12; -1), (0; -13), (2;5), (6;1).

Nếu vậy, điều kiện cần để \( y = \frac{ax - c}{dx - b} \) nguyên

là \( |ax - c| \geq |dx - b| \)

2
Liệu đây có phải là phương pháp tổng quát để tìm nghiệm nguyên của phương trình $ax + by = dxy + c$?

Thử xét một bài toán khác.

Bài toán 16.

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $5x - 3y = 2xy - 11$.

GIẢI

$$5x = y (2x + 3) - 11 \iff y = \frac{5x + 11}{2x + 3}.$$ Để $y$ nguyên cần có $|5x + 11| \geq |2x + 3|$, điều này dẫn đến

$$(5x + 11)^2 \geq (2x + 3)^2 \iff (7x + 14) (3x + 8) \geq 0$$

$$x \leq -\frac{8}{3}; x \geq -2.$$ Dáng buồn thay $x$ có thể nhận tất cả các giá trị nguyên trên trục số. Chiều chung? Tất nhiên là không. Bối vi chúng ta đã có kinh nghiệm về việc biến đổi hình dạng các con số. Nay ta sẽ làm biểu thức $y$ phải thay đổi hình dạng:

$$y = \frac{5x + 11}{2x + 3} = 2 + \frac{x + 5}{2x + 3}$$

Rõ ràng $y$ nguyên khi $x = -5$. Vậy $x = -5$, $y = 2$ là một nghiệm. Để tìm các nghiệm còn lại ($x \neq -5$) ta nhận thấy điều kiện cần để $y$ nguyên là $|x + 5| \geq |2x + 3| \iff$

$$(x + 5)^2 - (2x + 3)^2 \geq 0 \iff (3x + 8) (-x - 2) \geq 0$$

$$-\frac{8}{3} \leq x \leq 2 \iff x = -2; -1; 0; 1; 2.$$ Thay vào phương trình đã cho, ta thu thêm được ba nghiệm $(x, y)$ là $(-2; -1), (2;3), (-1;6)$.

Chỉ còn một chút nữa thôi, chúng ta sẽ khẳng định được ta đã có trong tay phương pháp tổng quát để tìm nghiệm nguyên của phương trình vô định $ax + by = dxy + c$. Đó là việc giới hạn $x$
trong khoảng $x_1 \leq x \leq x_2$, một việc hoàn toàn có thể làm được.
Nhân thấy bất phương trình $|ax - c| > |dx - b|$ có nghiệm $x_1 \leq x \leq x_2$ khi và chỉ khi bất phương trình tương đương với nó $(ax - c)^2 - (dx - b)^2 \geq 0$

$\iff [(a + d)x - c - b] [(a - d)x - c + b] \geq 0$

$\iff f(x) = (a^2 - d^2)x^2 + 2(bd - ac)x + c^2 - b^2 \geq 0$

có nghiệm trong khoảng $x_1 \leq x \leq x_2$ với $x_1$ và $x_2$ là hai nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$.

Điều kiện cần và đủ là

\[
\begin{align*}
a^2 - d^2 &< 0 \quad (1) \\
\Delta' = (bd - ac)^2 - (a^2 - d^2)(c^2 - b^2) &> 0 \quad (2)
\end{align*}
\]

Điều kiện (1) $\iff a^2 < d^2 \iff |a| < |d|$. Nếu $|a| > |d|$ ta thực hiện phép chia đa thức tương tự bài toán 16. sẽ được

\[y = m + \frac{a'x - c'}{dx - b}
\]

$(a'x - c')^2 - (dx - b)^2 \geq 0$ sẽ có $|a'| < |d'|$

Xét điều kiện (2). Nếu ngược lại $\Delta' = ab - cd < 0$ thì bất phương trình vô nghiệm do $a^2 - d^2 < 0$.

Trường hợp $ab - cd = 0$ đã xét ở trang 26

(để $\frac{b}{d} = \frac{c}{a} = k$ nguyên hoặc $\frac{a}{d} = \frac{c}{b} = k'$ nguyên

thì có nghiệm, k và $k'$ không nguyên thì vô nghiệm).

Như vậy chỉ còn trường hợp $\Delta' > 0$, tức là có (2), khi đó $x_1 \leq x \leq x_2$. Vẫn dễ được hoàn toàn giải quyết. Nghiệm nguyên của phương trình vô định $ax + by = dx + c$ được tìm bằng cách đưa ra điều kiện cần và sử dụng trí số tuyệt đối.
Bài toán 17.

Chứng minh rằng trong đẳng thức

\[ 4x - 3y = 7xy - 6 \]

các giá trị x (hoặc y) không thể là các số nguyên âm để y (hoặc x) nguyên

GIÁI

\[ 4x = 3y + 7xy - 6 = y (3 + 7x ) - 6 \]

Vì \( 3 + 7x \neq 0 \) (do x nguyên) nên \( y = \frac{4x + 6}{7x + 3} \)

Nhận thấy \( 4x + 6 \neq 0 \) (do x nguyên)

nên để y nguyên thì điều kiện cần là

\[ |4x + 6| \geq |7x + 3| \iff (4x + 6)^2 - (7x + 3)^2 \geq 0 \]

\[ \iff (-3x + 3)(11x + 9) \geq 0 \iff -\frac{9}{11} \leq x \leq 1 \Rightarrow x = 0; 1. \]

Với \( x = 0 \) thì \( y = 2 \), với \( x = 1 \) thì \( y = 1 \Rightarrow (dpcm) \)

Bài toán 18.

Chứng minh rằng phương trình

\[ 3x + 10y = -6 - 5xy \]

có vô số nghiệm nguyên.

GIÁI

\[ 3x = -6 - 5y (x + 2) \]

Nếu \( x = -2 \) thì đẳng thức đúng với mọi y. Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên \( (x = -2, \ y \ nguyên \ bất \ kỳ) \).

Chúng ta lưu ý đây là trường hợp ab = cd = 0, cụ thể hơn là
\[
\frac{b}{d} = \frac{c}{a} = -2. \text{ Nếu vô ý thực hiện ngay phép chia }
\]
\[
y = \frac{-6 - 3x}{5(x + 2)} = -\frac{3}{5}
\]

mà thiếu lập luận chất chế chứng ta sẽ đi tới kết luận hoàn toàn khác là bài toán vô nghiệm(!)

Tóm lại, lúc đó để giải phương trình \(ax + by = dx + c\) với \(a, b, c, d\) nguyên như sau:

- Viết \(ax = y(dx - b) + c\)
- Xét \(dx - b = 0\). Nếu \(\frac{b}{d} = k\) nguyên, phương trình không có nghiệm \(x = k\) khi \(\frac{c}{a} \neq \frac{b}{d}\), và có vô số nghiệm \((x = k, y\) nguyên bất kỳ) khi \(\frac{c}{a} = \frac{b}{d}\).

- Xét \(dx - b \neq 0\) (tức là \(x \neq \frac{b}{d}\) ) thì \(y = \frac{ax - c}{dx - b}\)

+ Trường hợp 1: nếu a chia hết cho d, đặt a = d.k' với k' nguyên, thực hiện cộng và trừ một con số thích hợp:

\[
y = \frac{dk'x - k'b + k'b - c}{dx - b} = k' + \frac{k'b - c}{dx - b}
\]
suy ra \(dx - b\) là ước số nguyên của \(k'b - c\)... Từ đó tìm được \(x\) và \(y\) nguyên.

+ Trường hợp 2: nếu a không chia hết cho d mà \(|a| < |d|\) thì điều kiện cần để \(y\) nguyên là \(|ax - c| \geq |dx - b|\). Từ đó xác định được \(x\) nguyên rồi tính \(y\). Phương trình nhân thêm nghiệm \(x =\)
c/a; y = 0 nên c chia hết cho a.

+ Trường hợp 3: nếu a không chia hết cho d mà |a| > |d|
phantom thi hiện phép chia

\[ y = \alpha + \frac{a'x - c'}{dx - b} \]

với \( \alpha \) nguyên và |a'| < |d|. Điều kiện cần để có y nguyên là |a'x - c'| \( \geq \) |dx - b|. Từ đó xác định được x nguyên rồi tính y.
Luôn y nếu a' là ước số nguyên của c' thì phương trình có thêm nghiệm x = \( \frac{c'}{a'} \), y = \( \alpha \)

Bài toán 19.

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình

\[ 14x + 5y = 7xy - 3. \]

GÍA

Cách 1: \[ 5y = 7x \ (y - 2) - 3 \]
Giả trị y = 2 không thỏa mãn phương trình. Vậy y \( \neq \) 2 nên

\[ x = \frac{5y + 3}{7(y - 2)} \]

5y + 3 \( \neq \) 0 với y nguyên. Điều kiện cần để x nguyên là |5y + 3| \( \geq \) |7 (y - 2)| \( \Leftrightarrow \) (5y + 3)² - (7y - 14)² \( \geq \) 0

\( \Leftrightarrow \) (12y - 11)(-2y + 17) \( \geq \) 0 \( \Leftrightarrow \) \( \frac{11}{12} \leq y \leq \frac{17}{2} \)

Vi y nguyên nên chỉ nhận các giá trị trong bảng sau:
<table>
<thead>
<tr>
<th>x = \frac{5y + 3}{7(y - 2)}</th>
<th>\text{Không nguyên}</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>y</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>5y + 3</td>
<td>8</td>
</tr>
<tr>
<td>7(y - 2)</td>
<td>-7</td>
</tr>
</tbody>
</table>

Kết quả là không thu được giá trị x nguyên nào.

Chúng ta lưu ý rằng phương trình vô nghiệm thường có cách giải hay. Nếu đề ý hệ số của x và xy là 14 và 7 ta có cách giải gần hơn như sau:

Cách 2: \[14x = y(7x - 5) - 3\]

Do \(7x - 5 \neq 0\) (\(\Rightarrow x \neq \frac{5}{7}\)) nên \(y = \frac{14x + 3}{7x - 5} = 2 + \frac{13}{7x - 5}\)

Để y nguyên thì \(7x - 5\) phải là ước số nguyên của 13, tức là 7x - 5 = 13, -13, 1, -1 \(\Rightarrow 7x = 18; -8; 6; 4\)

\(\Rightarrow x\) không nguyên. Bài toán không có nghiệm nguyên.

Cách 3:
\[7x = \frac{5y + 3 - 10 + 10}{y - 2}\]

\[7x = 5 + \frac{13}{y - 2} = t\]

\[\frac{13}{y - 2} = \pm 13, \pm 1\]

Nhưng t không có dạng 7x nên vô nghiệm

Bài toán 20. Phương trình 14x + 5y = 7xy + 12 có nghiệm nguyên hay không?
GIÁI

Cách 1:

14 x = y(7x - 5) + 12. Do 7x - 5 ≠ 0 (vi x nguyên) nên

\[
y = \frac{14x - 12}{7x - 5} = 2 + \frac{-2}{7x - 5}
\]

Để y nguyên thì 7x - 5 = ± 1, ± 2 ➞ 7x = 6; 4; 7; 3.

Chỉ có một giá trị x = 1 nguyên, khi đó y = 2 - 1 = 1.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên.

Cách 2:

5y = 7x(y - 2) + 12. Nếu y = 2 thì 10 = 12; vô lý. Vậy y ≠ 2

Suy ra \(x = \frac{5y - 12}{7(y - 2)}\). Do 5y - 12 ≠ 0 nên điều kiện cần để x nguyên là \(|5y - 12| ≥ |7(y - 2)|\)

\[(5y - 12)^2 - (7y - 14)^2 ≥ 0 \Rightarrow (12y - 26)(2y + 2) ≥ 0\]

\[1 ≤ y ≤ \frac{13}{6} \Rightarrow y = 1; 2.\] Giả trí y = 2 bị loại

Vậy y = 1, khi đó x = 1 phương trình có nghiệm nguyên.
(Cách 2 không hay bằng cách 1. Nó chỉ hay hơn khi phải thử với số trường hợp ít hơn hạn).

§ 4. PHƯƠNG TRÌNH \(ax^2 + by^2 = c\)

Ta có thể đặt \(X = x^2, Y = y^2\) và trước hết tìm nghiệm nguyên không âm của phương trình \(ax + bY = c\) quen thuộc, rồi từ đó tìm lại x và y.
Tuy nhiên, vấn đề không quá đơn giản như vậy. Nhiều học sinh giới trong các kỳ thi vô địch đã phải bỏ tay trước một số phương trình dạng này, vì bất lực trước số phép thử hậu thuẫn trong một thời gian hạn chế. Ngày cả khi có nhiều thời gian việc cơ tìm chỉ một vài nghiệm nguyên của một số phương trình dạng $ax^2 + by^2 = c$ cũng rất khó khăn. Tốt nhất là chúng ta hãy bắt tay vào việc giải các bài toán.

Bài toán 21. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình

$$17x^2 + 12y^2 = 23$$

GÍÁI

Rõ ràng $x^2, y^2$ là các số nguyên không âm. Nếu $x^2, y^2 \geq 1$ thì $17x^2 + 12y^2 \geq 29$. Như vậy, ít nhất một trong hai số $x^2, y^2$ phải bằng 0, tức là về trại số bằng 17, 12 hoặc 0. Điều đó không thể xảy ra, vậy bài toán vô nghiệm.

Bài toán 22. Tồn tại chăng nghiệm nguyên của phương trình

$$6x^2 - 5y^2 = 34$$

GÍÁI

Đặt $X = x^2 \geq 0$, $Y = y^2 \geq 0 \Rightarrow 6X - 5Y = 34$

$$X = \frac{34 + 5Y}{6} = \frac{40 + 5Y - 6}{6} = \frac{5(8 + Y)}{6} - 1$$

Để $X$ nguyên thì phải có $8 + Y = 6t$ với $t$ nguyên, vậy $Y = 6t - 8$, $X = 5t - 1$.

$Y \geq 0$ khi $t \geq \frac{4}{3}$, $X \geq 0$ khi $t \geq \frac{1}{5}$.

Điều kiện cần là $t = 2, 3, 4, \ldots$

Chẳng hạn, với $t = 2$ thì $X = 9$, $Y = 4$ nên $(x, y) = (3; 2), (3; 3)$. 

35
-2), (-3; 2), (-3; -2). Voi t = 3 thi X = 14 khong chinh phuong nen khong co x nguyen ...

Tat nhiên, ngay tu dau chung ta cucn co the dua ra x = 3, y = 2 và khang dinh phuong trinh da cho co nghiém nguyen.

Bài toán 23. Chứng minh phuong trinh
\[4x^2 + 231y^2 = 1613\]

vô nghiệm trong tập hợp số nguyên.

GIÁI

Đặt \(X = x^2 \geq 0, Y = y^2 \geq 0 \rightarrow 4X + 231Y = 1613\)

\[1613 - 231Y \quad \Rightarrow X = \frac{1613 - 231Y}{4} = 403 - 58Y + \frac{1 + Y}{4}\]

Để X nguyên, với Y nguyên thì \(1 + Y = 4t\) với t nguyên

\[\Rightarrow Y = 4t - 1, X = 403 - 58(4t - 1) + t = 461 - 231t\]

\(Y \geq 0\) khi \(t \geq \frac{1}{4}\), \(X \geq 0\) khi \(t \leq \frac{461}{231} < 2\).

Vậy để X và Y cùng không âm thì \(t = 1\). Nhưng với \(t = 1\) thì \(Y = 3 = y^2 \rightarrow y\) không nguyên (dpcm).

Bài toán 24. Tìm các nghiệm nguyên dương của phuong trinh
\[x^2 - 3y^2 = 1\]

GIÁI

Ta viết \(1 = (x + y\sqrt{3})(x - y\sqrt{3})\)

Nhu vậy cần phân tích 1 thành tích của hai số vợ tì có dạng \((x + y\sqrt{3})\) và \((x - y\sqrt{3})\) với x, y là các số nguyên dương. Có bao nhiêu cách phân tích như thế thì có ngàn ấy nghiệm.

Nhận thấy phương trình đã cho có nghiệm \(x = 2, y = 1\). Đô
là nghiệm nhờ nhất trong các nghiệm nguyên dương có thể có. Văn đề là làm thế nào để tìm tất cả các nghiệm nguyên dương còn lại khi đã biết được một nghiệm. Chúng ta nhớ lại phương pháp 2 tìm nghiệm nguyên của phương trình $ax + by = c$ (trang 12). Bây giờ có thể viết:

$$1 = (x + y\sqrt{3})^k \cdot (x - y\sqrt{3})^k$$

và nhận thấy với $k$ nguyên dương bất kỳ thì

$$(x + y\sqrt{3})^k = x_k + y_k\sqrt{3}$$

$$(x - y\sqrt{3})^k = x_k - y_k\sqrt{3}$$

mà $x_k$ và $y_k$ là các số nguyên dương.

Do đó $(x_k, y_k)$ là nghiệm của bài toán đã cho.

Chúng ta đã đoán được $x_1 = 2$, $y_1 = 1$ và $x_2$, $y_2$ được xác định như sau:

Với $k = 2$ $\Rightarrow x_2 + y\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$

Vậy $x_2 = 7$, $y_2 = 4$

Với $k = 3$ $\Rightarrow x_3 + y_3\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^3 = 26 + 15\sqrt{3}$

Vậy $x_3 = 26$, $y_3 = 15$,...

Số nghiệm rõ ràng là vô hạn.

Phương trình vừa xét là một trường hợp riêng của phương trình $x^2 - Py^2 = 1$, với $P$ là số nguyên dương không chính phương, được gọi là phương trình Pell.

Phương trình Pell có nghiệm $x = \pm 1$, $y = 0$ được gọi là nghiệm tần thường. Nó luôn có vô số các nghiệm không tần thường. Giả sử $x_o$, $y_o$ là các số nguyên dương nghiệm đúng phương trình Pell, thì thi các cặp số $(x_o, -y_o)$, $(-x_o, y_o)$, $(-x_o, -y_o)$ cũng là nghiệm. Thay thế, để tìm các nghiệm không tần thường của phương trình Pell, ta chỉ cần đi tìm các nghiệm nguyên dương của nó. Tất cả các nghiệm nguyên dương $x_k$, $y_k$ được xác định từ dạng thực...
\[ x_k + y\sqrt{P} = (x_1 + y_1\sqrt{P})^k \]

với \( k = 1, 2, 3, \ldots \) Trong đó \( x_1, y_1 \) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất.

Với \( P \) nhỏ, việc tìm \( x_1, y_1 \) không khó khăn lắm. Chúng ta chỉ việc thử lần lượt \( y = 1, 2, 3, \ldots \) để tìm \( x^2 = Py^2 + 1 \) là một số chính phương. Nhưng với \( P \) lớn, xác định được \( x_1, y_1 \) không quá đơn giản. Chẳng hạn, khi \( P = 13 \), ta có:

\[ 13y^2 = x^2 - 1 \]

\( x \) có dạng \( 13m + a \) với \( m \) nguyên không âm, và \( a = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6 \).

Vì \( x^2 - 1 = (13m + a)^2 - 1 = 169m^2 + 26am + a^2 - 1 \) nên điều kiện cần để phương trình có nghiệm nguyên là \( (a^2 - 1) \) chia hết cho 13. Để thấy rằng \( a^2 = 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36 \) và trong đó chỉ có \( a^2 = 1 \) thì \( (a^2 - 1)/13 \).

Vậy \( x = 13m \pm 1 \). Từ đó tìm được \( x_1 = 649 \).

Nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pell \( x^2 - Py^2 = 1 \) ứng với \( P \) từ 1 đến 20 (loại trừ các số chính phương) được tính và ghi lại trong bảng 1.

**Bảng 1. Nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pell với \( P \leq 20 \)**

<table>
<thead>
<tr>
<th>( P )</th>
<th>( x^2 - Py^2 = 1 )</th>
<th>( x_1 )</th>
<th>( y_1 )</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2</td>
<td>( x^2 - 2y^2 = 1 )</td>
<td>3</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td>( x^2 - 3y^2 = 1 )</td>
<td>2</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>( x^2 - 5y^2 = 1 )</td>
<td>9</td>
<td>4</td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>( x^2 - 6y^2 = 1 )</td>
<td>5</td>
<td>2</td>
</tr>
</tbody>
</table>

38
\[ P \quad x^2 - Py^2 = 1 \quad x_1 \quad y_1 \]

7 \[ x^2 - 7y^2 = 1 \quad 4 \quad 3 \]
8 \[ x^2 - 8y^2 = 1 \quad 3 \quad 1 \]
10 \[ x^2 - 10y^2 = 1 \quad 19 \quad 6 \]
11 \[ x^2 - 11y^2 = 1 \quad 10 \quad 3 \]
12 \[ x^2 - 12y^2 = 1 \quad 7 \quad 2 \]
13 \[ x^2 - 13y^2 = 1 \quad 649 \quad 180 \]
14 \[ x^2 - 14y^2 = 1 \quad 15 \quad 4 \]
15 \[ x^2 - 15y^2 = 1 \quad 4 \quad 1 \]
17 \[ x^2 - 17y^2 = 1 \quad 33 \quad 8 \]
18 \[ x^2 - 18y^2 = 1 \quad 17 \quad 4 \]
19 \[ x^2 - 19y^2 = 1 \quad 170 \quad 39 \]
20 \[ x^2 - 20y^2 = 1 \quad 9 \quad 2 \]

Bài toán 25. Chứng minh rằng phương trình
\[ x^2 - 13y^2 = 1 \]
không thể có nghiệm nguyên dương \( x_0, y_0 \) mà \( x_0 < 649 \).

GIÁI

Nhận thấy \( x_k = 649 \) nghiệm dương từng phương trình (lúc đó \( y_k = 180 \)). Giả sử đây không phải là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất \( x_1, y_1 \), tức là \( k \geq 2 \). Ta có:
\[ (x_1 + y_1\sqrt{13})^k = 649 + 180\sqrt{13}. \]
Nếu \( k = 2 \) thì \( x_1^2 + 13y_1^2 + 2x_1y_1\sqrt{13} = 649 + 180\sqrt{13}. \)
Vì vậy
\[ \begin{cases} x_1^2 + 13y_1^2 = 649 \\ x_1y_1 = 90 \end{cases} \]

Từ hệ phương trình ấy suy ra

\[ x_1^4 - 649x_1^2 + 13.8100 = 0 \]

nên \[ x_1^2 = 325 \] (không chính phương)

\[ 324 = 18^2 \]

Kết quả là \( x_1 = 18, y_1 = 5 \). Nhưng cặp số này không thỏa mãn dạng thức \( x^2 - 13y^2 = 1 \).

Nhu, vậy \( x_k = 649 \) không thể là \( x_2 \). Nếu \( k \geq 3 \) thì giá trị \( x_1 \) được tính tương tự như trên (nếu có) sẽ nhỏ hơn 18. Nhưng dễ dàng kiểm tra được các số nguyên \( x = 1, 2, ..., 18 \) không cho \( y \) là số nguyên. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

**Bài toán 26.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình

\[ x^2 - 81y^2 = 1 \]

**GIẢI**

Nếu \( y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \).

Giả sử phương trình có nghiệm \( x_0, y_0 \) nguyên dương, thì nó cũng có các nghiệm \( (x_0, y_0), (-x_0, y_0), (-x_0, -y_0) \), do đó chỉ cần tìm các nghiệm nguyên dương là suy ra các nghiệm nguyên còn lại.

Phương trình đã cho có thể viết lại là

\[ 1 = (x + 9y)(x - 9y) \]

Do \( x, y > 0 \nên x + 9y > 0 \Rightarrow x - 9y > 0 \). Vậy \( x + 9y = 1, x - 9y = 1 \Rightarrow x = 1/2, y = 0 \). Các giá trị này không thỏa mãn, phương trình đã cho chỉ có nghiệm \( (x, y) = (1; 0), (-1; 0) \).
Một cách tổng quát: phương trình
\[ x^2 - ky^2 = 1 \]

với \( k = 1, 2, 3, \ldots \) chỉ có nghiệm tâm thường \( x = \pm 1, y = 0 \).

**Bài toán 27.** Chứng minh phương trình
\[ x^2 - 2y^2 = 5 \]
không có nghiệm nguyên.

**GIÁI**

Để thấy \( x, y \neq 0 \). Do trong phương trình chỉ có lũy thừa bậc chân của \( x \) và \( y \) nên nếu phương trình có nghiệm thì nó phải có nghiệm \( x, y \) nguyên dương. Phương trình đã cho có thể viết là \( 4 + 2y^2 = (x - 1)(x + 1) > 0 \).

Do xét \( x > 0 \) nên \( x + 1 > 0 \), suy ra \( x - 1 > 0 \).

Điều kiện cần để phương trình đã cho có nghiệm là \((x - 1)(x + 1)\) là tích của hai số chân liên tiếp \( x - 1 = 2k, x + 1 = 2(k + 1) \) với \( k \) nguyên dương. Như vậy:

\[
4 + 2y^2 = 2k \cdot 2(k + 1) \\
2 + y^2 = 2k(k + 1)
\]

\( y \) phải là số chân, đặt \( y = 2t \) với \( t \) nguyên
\[
2 + 4t^2 = 2k(k + 1)
\]

Về phía là số chia hết cho 4 vì \( k(k + 1) \) là tích của hai số tự nhiên liên tiếp (nên chia hết cho 2), còn vế trái không chia hết cho 4. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

**Bài toán 28:** Chứng minh phương trình
\[ x^2 - 2y^2 = n \]
không có nghiệm nguyên nếu \( n = 8k \pm 3 \) với \( k \) là số nguyên.

**GIÁI**

Tương tự bài toán 27, xét \( x > 0 \). Phương trình được viết lại là
\[(x + 1)(x - 1) = 2(y^2 + 4k \frac{1}{2})\]

Vẽ trái phải chẵn, nên nó là tích của hai số chẵn liên tiếp \(x - 1 = 2m, x + 1 = 2(n + 1)\) với \(m\) nguyên dương, như vậy
\[2m(m + 1) = y^2 + 4k \frac{1}{2}\]

Nhưng \(m(m + 1)\) là số chẵn vì là tích hai số tự nhiên liên tiếp, đặt \(m(m + 1) = 2t\) với \(t\) nguyên dương:
\[4t = y^2 + 4k \frac{1}{2}\]
suy ra
\[y^2 = 4t - 4k \frac{1}{2} = 4S rac{1}{2}\]

Với \(S = t - k\) là một số nguyên. Nhưng không số chính phương nào có dạng \(4S - 1\) hoặc \(4S + 2\). Thật vậy:

- Bình phương của một số chẵn \(2n\) là \(4n^2\), có dạng \(4k\) với \(k\) nguyên.

- Bình phương của một số lẻ \(2n - 1\) là \(4n^2 - 4n + 1\) có dạng \(4k + 1\) với \(k\) nguyên.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 29. Chứng minh ràng phương trình
\[x^2 - 2y^2 = -1\]
có vô số nghiệm nguyên.

GIÁI

Nhận thấy phương trình có nghiệm \(x = y = 1\), và có thể viết dưới dạng
\[-1 = (x + y\sqrt{2})(x - y \sqrt{2})\]
Thay \(x = y = 1\) vào thì được
\[-1 = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})\]
Nếu nâng hai vệ lên lũy thừa bậc lê \(2k - 1\) với \(k\) nguyên dương:
-1 = (1 + \sqrt{2})^{2k-1} (1 - \sqrt{2})^{2k-1}

\text{thi'} \quad (1 + \sqrt{2})^{2k-1} = x_k + y_k \sqrt{2}
\quad (1 - \sqrt{2})^{2k-1} = x_k - y_k \sqrt{2}

với \quad x_k, y_k là các số nguyên dương. Đó là các nghiệm nguyên dương của phương trình đầu cho. Vậy phương trình có vô số nghiệm vì có vô số giá trị k nguyên dương.

Ta gọi phương trình dạng \( x^2 - Py^2 = -1 \)

với \quad P nguyên dương, không chính phương là phương trình đối Pell. Không phải phương trình đối Pell nào cũng có nghiệm nguyên. Nhưng nếu nó đã có một nghiệm nguyên thì số nghiệm nguyên của nó là vô hạn. Khi đó, ta cần trước hết xác định nghiệm nguyên dương nhỏ nhất (tương tự như đối với phương trình Pell).

Xét các phương trình đối Pell trong phạm vi \( P \leq 20 \). Cho \( y_1 = 1 \) thì \( x_1 \) lần lượt là 1, 2, 3, 4 ứng với \( P \) là 2, 5, 10, 17 là những số \( P \) có dạng \( n^2 + 1 \) với \( n \) nguyên dương, điều đó không có gì lạ. Nhưng thật ngạc nhiên khi khó mà tìm được một nghiệm của các phương trình đối Pell khác (với \( P \leq 20 \)). Đến nỗi chúng ta nghi ngờ rằng phải chính các phương trình đối Pell, hoặc có nghiệm \( y_1 = 1 \), hoặc không có nghiệm nguyên. Nếu điều đó đúng thì cũng thật thú vị.

Chúng ta đi theo hướng xác định khá nặng với nghiệm (nguyên) của phương trình đối Pell.

Với mỗi \( P \), điều kiện cần để phương trình đối Pell \( x^2 - Py^2 = -1 \) có nghiệm nguyên được xác định như sau: số nguyên dương \( x \) chỉ có thể nhận một trong \( P \) dạng \( Pk + a \) với \( k \) nguyên không âm, \( a = 0, 1, 2, ..., P - 1 \). Phương trình đối Pell được viết lại là \( Py^2 = (Pk + a)^2 + 1 = P^2k^2 + 2Pka + a^2 + 1 \) và điều kiện cần
để nó có nghiệm nguyên là $a^2 + 1$ chia hết cho $P$. Cái "sáng" này đã nhanh chóng chấm dứt các phương trình đối Pell còn lại trong phạm vi $P \leq 20$, chỉ trừ trường hợp $P = 13$ (chúng ta nhớ lại cùng với $P = 13$, phương trình Pell đã có một đốt biến như thế nào). Nghĩa là với $P = 3, 6, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 18, 19, 20$, phương trình đối Pell không có nghiệm nguyên. Riêng với $P = 13$, phương trình $x^2 - 13y^2 = -1$ có thể có nghiệm nguyên $x = 13k \pm 5$. Mặc dù vậy, ta vẫn nghĩ nó khả năng có nghiệm, và có chứng minh nó có nghiệm. Nhưng, lại một bất ngờ nữa, các có gang theo hướng đó không mang lại một kết quả nào. Phương trình có nghiệm chăng? Và sự thật khi $x = 18$ thì $y_1 = 5$. Nhưng kết luận ấy được ghi lại trong bảng 2 và bảng 3. Chúng ta cũng thấy rằng phương trình đối Pell không có nghiệm không tần thường.

**Bảng 2. Nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình đối Pell $x^2 - Py^2 = -1$ với $P \leq 20$**

<table>
<thead>
<tr>
<th>$P$</th>
<th>$x^2 - Py^2 = -1$</th>
<th>$x_1$</th>
<th>$y_1$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>2</td>
<td>$x^2 - 2y^2 = -1$</td>
<td>1</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>$x^2 - 5y^2 = -1$</td>
<td>2</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>10</td>
<td>$x^2 - 10y^2 = -1$</td>
<td>3</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>13</td>
<td>$x^2 - 13y^2 = -1$</td>
<td>18</td>
<td>5</td>
</tr>
<tr>
<td>17</td>
<td>$x^2 - 17y^2 = -1$</td>
<td>4</td>
<td>1</td>
</tr>
</tbody>
</table>

**Bảng 3. Các phương trình đối Pell vô nghiệm (nguyên) với $P \leq 20$**

<table>
<thead>
<tr>
<th>$P$</th>
<th>$x^2 - Py^2 = -1$</th>
</tr>
</thead>
<tbody>
<tr>
<td>3</td>
<td>$x^2 - 3y^2 = -1$</td>
</tr>
</tbody>
</table>
6 \quad x^2 - 6y^2 = -1  \\
7 \quad x^2 - 7y^2 = -1  \\
8 \quad x^2 - 8y^2 = -1  \\
11 \quad x^2 - 11y^2 = -1  \\
12 \quad x^2 - 12y^2 = -1  \\
14 \quad x^2 - 14y^2 = -1  \\
15 \quad x^2 - 15y^2 = -1  \\
18 \quad x^2 - 18y^2 = -1  \\
19 \quad x^2 - 19y^2 = -1  \\
20 \quad x^2 - 20y^2 = -1  \\

Bài toán 30:  
Tim các nghiệm nguyên của phương trình  
\[ x^2 - (ky)^2 = -1 \]  
với \( k \) nguyên dương.

GIẢI

Nếu \( k = 1 \), phương trình có nghiệm \( x = 0, y = \pm 1 \).

Nếu \( k \geq 2 \), phương trình không nghiệm đúng với \( x = 0 \), hoặc \( y = 0 \). Do chỉ có các lũy thừa chẵn trong phương trình, nên trước hết ta chỉ cần xét các nghiệm nguyên dương. Vì phương trình có thể viết là \((ky + x)(ky - x) = 1\) nên do \( x, y > 0 \) suy ra \( ky + x > 0 \), do đó \( ky - x > 0 \).

Vậy \( ky + x = 1, ky - x = 1 \Rightarrow x = 0 \). Giả trị này không thích hợp, phương trình đã cho không có nghiệm nguyên với \( k \geq 2 \).

Bài toán 31. Tim nghiệm nguyên của phương trình  
\[ x^2 - 5y^2 = 5 \]
GIÁI

Điều kiện cần để phương trình có nghiệm nguyên là $x = 5k$ với $k$ nguyên, suy ra $y^2 - 5k^2 = -1$. Đây là phương trình đối Pell mà $P = 5$. Để thấy nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là $y_1 = 2$, $k_1 = 1$, (nên $x_1 = 5$). Nghiệm nguyên dương thứ $n$ là $y_n$, $k_n$ mà $y_n + k_n \sqrt{5} = (y_1 + k_1 \sqrt{5})^{2n-1} = (2 + \sqrt{5})^{2n-1}$

Chạng hạn, với $n = 2$ thì

$y_2 + k_2 \sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^3 = 8 + 3.4. \sqrt{5} + 3.2.5 + 5 \sqrt{5} = 38 + 17 \sqrt{5} \Rightarrow y_2 = 38, k_2 = 17, (\Rightarrow x_2 = 5.17 = 85)$.

Phương trình đã cho có các nghiệm nguyên

$(x, y) = (x_n, y_n), (x_n, -y_n), (-x_n, y_n), (-x_n, -y_n)$ với $n = 1, 2, 3, ...$

Bài toán 32. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 8y^2 = 2$

GIÁI

$x$ phải là số chẵn, đặt $x = 2k$ với $k$ là số nguyên

$\Rightarrow 4k^2 - 8y^2 = 2 \Rightarrow 2k^2 - 4y^2 = 1$. Phương trình vô nghiệm vì $2$ chia hết cho $2$, $x$ phải là số lẻ.

Bài toán 33. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 3y^2 = 5$

GIÁI

$x^2 - 2 = 3(y^2 + 1)$. Nếu $x = 3k$ với $k$ nguyên thì phương trình vô nghiệm vì $2$ không chia hết cho $3$.

Nếu $x = 3k \pm 1$ phương trình đã cho trở thành $9k^2 + 1 \pm 6k - 2 = 3(y^2 + 1)$

46
Vẽ phải chia hết cho 3, vẽ trái không chia hết cho 3 nên phương trình vô nghiệm.

Bài toán 34: Chứng minh rằng phương trình \[x^2 - 21y^2 = 340\] có vô số nghiệm nguyên dương.

Giải

Để thấy nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình là \(x_0 = 19, y_0 = 1\). Ta chứng minh bài toán tổng quát: Nếu phương trình \(x^2 - Py^2 = m\) (với \(m\) nguyên khác 0, \(P\) nguyên dương không chính phương) có một nghiệm nguyên dương thì sẽ có vô số nghiệm nguyên dương. Ta có:

\[
x_0^2 - Py_0^2 = m
\]
\[
x_k^2 - Py_k^2 = 1
\]

Mà \(x_0, y_0\) là một nghiệm nguyên dương của phương trình \(x^2 - Py^2 = m\) (tồn tại do giả thiết) và \(x_k, y_k\), với \(k\) tự nhiên là các nghiệm (luôn có) của phương trình Pell \(x^2 - Py^2 = 1\). Nhận các ve của hai phương trình chung ta được:

\[m = (x_0^2 - Py_0^2)(x_k^2 - Py_k^2) = x_0^2x_k^2 + P^2y_0^2y_k^2 - Px_0y_2y_k - Py_0^2x_k^2\]

Con số thích hợp được cộng và trừ thêm vào vẽ phải là \(2Px_0x_ky_0y_k\), khi đó ta có:

\[m = (x_0x_k \pm Py_0y_k)^2 - P(x_0y_k \pm x_ky_0)^2 = X_k^2 - PY_k^2\]

Rõ ràng \(X_k = |x_0x_k \pm Py_0y_k|, Y_k = |x_0y_k \pm x_ky_0|\) là nghiệm của phương trình tổng quát.

\[m = x^2 - Py^2\]. Vi số nghiệm \(x_k, y_k\) của phương trình Pell là vô hạn, nên số nghiệm của phương trình \(x^2 - Py^2 = m\) là vô hạn.

Tuy nhiên, đó không phải là tất cả các nghiệm.
Trở lại phương trình \( x^2 - 21y^2 = 340 \) có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất \( x_0 = 19, y_0 = 1 \). Phương trình Pell tương ứng \( x^2 - 21y^2 = 1 \) có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất \( x_1 = 55, y_1 = 12 \) (còn \( x_2 = 6049, y_2 = 1320 \)) nên nghiệm \( x = X_1, y = Y_1 \) của phương trình đã cho là \( X_1 = |x_0x_1 \pm Py_0y_1| = |19.55 \pm 21.1.12| \Rightarrow X_1 = 793, X'_1 = 1297 \)

\[ Y_1 = |x_0x_1 \pm x_1y_0| = |19.12 \pm 55.1| \Rightarrow Y_1 = 173, Y'_1 = 283. \]

Chứng không chứa những nghiệm, mà bằng cách thử trực tiếp chứng ta có được là \( y = 1, 3, 4, 7, 12, 19, 23 \ldots \) với các giá trị tương ứng \( x = 19, 23, 26, 37, 58, 89, 107 \ldots \) (Tất nhiên, vấn đề kết luận là có vô số nghiệm).

Bài toán 35. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình \( x^2 - 2y^2 = 8 \)

GIẢI

Không thể chỉ đưa vào lý luận chứng minh phương trình \( x^2 - Py^2 = m \) có vô số nghiệm khi có một nghiệm (nguyên dương) như ở bài toán 34, vì không chỉ ra được tất cả các nghiệm.

Nhận thấy \( x = 2k \) với \( k \) nguyên, nên phương trình đã cho trở thành \( 2k^2 - y^2 = 4 \). Lại thấy \( y \) cũng phải là số chia \( 2t \) (với \( t \) nguyên), do đó \( k^2 - 2t^2 = 2 \).

Cuối cùng \( k = 2m \) với \( m \) nguyên, nên \( t^2 - 2m^2 = -1 \).

Đây là phương trình đối Pell mà nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là \( t_1 = m_1 = 1 \). Các nghiệm nguyên dương khác được xác định từ đẳng thức

\[ t_s + m_s\sqrt{2} = (t_1 + m_1\sqrt{2})^{2s-1} = (1 + \sqrt{2})^{2s-1} \]

với \( s \) là số nguyên dương.

Thí dụ: \( t_2 + m_2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3 = 7 + 5\sqrt{2} \).
Vậy $t_2 = 7$, $m_2 = 5$ suy ra $x_2 = 4m_2 = 20$, $y_2 = 2t_2 = 14$.
(Còn $x_1 = 4m_1 = 4$, $y_1 = 2t_1 = 2$.)

Các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là $(x, y) = (4m_s, 2t_s), (4m_s, -2t_s), (-4m_s, 2t_s), (-4m_s, -2t_s)$.

§ 5. PHƯƠNG TRÌNH $ax^2 + by^2 = c + dx y$

Chúng ta tiến thêm một bước bằng việc đưa thêm số hàng chéo $xy$ vào phương trình, và tìm cách giải phương trình đó trong tập hợp số nguyên.

Cách giải thứ nhất:

Xem phương trình là bậc hai đối với $x$, còn $y$ là tham số: $ax^2 - dx y + by^2 - c = 0$

Điều kiện cần để phương trình có nghiệm $x$ nguyên là biết số
$\Delta = k^2 = d^2y^2 - 4a(by^2 - c) = (d^2 - 4ab)y^2 + 4ac$ là một số chính phương, tức là $k$ nguyên.

Xét phương trình $(d^2 - 4ab)y^2 = k^2 - 4ac$

Đặt $\lambda = d^2 - 4ab$ thì $\lambda y^2 = k^2 - 4ac$

- Nếu $\lambda = 0$, Phương trình trở thành $0 \cdot y^2 = k^2 - 4ac$

Phương trình sẽ vô nghiệm nếu $k^2 - 4ac \neq 0$ và đúng với mọi $y$ nếu $k^2 - 4ac = 0$.

- Nếu $\lambda \neq 0$ thì $y^2 = \frac{k^2 - 4ac}{d^2 - 4ab} = \frac{k^2 - 4ac}{\lambda}$

a) Đặc biệt khi $\lambda = m^2$ là một số chính phương thì $(my)^2 - k^2 = - 4ac$

$(my + k)(my - k) = - 4ac$

Chi cần phân tích $- 4ac$ thành tích của hai số cùng chẵn, do
tổng hai số \((my + k)\) và \((my - k)\) là số chẵn 2 my.

Trước khi tiếp tục Cách giải thứ nhất chúng ta xem xét một số bài toán.

Bài toán 36. Giải phương trình
\[3x^2 + 48y^2 = 1003 + 30xy\]
trong tập hợp số nguyên.

GIÁI

Coi phương trình là bậc hai của \(x\):
\[3x^2 - 30yx + 48y^2 - 1003 = 0\]
thì \(\Delta' = (15y)^2 - 3(48y^2 - 1003) = 81y^2 + 3009 = k^2\) phải là số chính phương để có \(x\) nguyên.

Nhu vậy \(k\) là số nguyên. Giới hạn trong việc xét nghiệm nguyên dương của phương trình
\[k^2 - 81y^2 = 3009\]
(yì lý do chỉ có \(k^2\) và \(y^2\)), ta nhận thấy
\[(k + 9y)(k - 9y) = 3009 = 3.17.59.
(đo \(k, y > 0 \Rightarrow k + 9y > 0 \Rightarrow k - 9y > 0\).)

Xây ra bốn khả năng (chú ý ràng \(k + 9y > k - 9y\))

\[
\begin{align*}
\begin{cases}
k - 9y = 1 \\
k + 9y = 3009
\end{cases}
\end{align*}
\]
\[
\begin{align*}
\begin{cases}
k - 9y = 17 \\
k + 9y = 177
\end{cases}
\end{align*}
\]
\[
\begin{align*}
\begin{cases}
k - 9y = 3 \\
k + 9y = 1003
\end{cases}
\end{align*}
\]
\[
\begin{align*}
\begin{cases}
k - 9y = 51 \\
k + 9y = 59
\end{cases}
\end{align*}
\]
Nhưng không trường hợp nào cho \(y\) nguyên

Vậy bài toán vô nghiệm.
Nhưng chúng ta đã quá sa đà vào việc thực hiện các thủ thuật tính toán mà quên mất rằng: chỉ cần nhận thấy 1003 không chia hết cho 3 là đủ kết luận bài toán vô nghiệm. Đó là một bài học kinh nghiệm cần nhớ!

Bài toán 37:
Tim nghiệm nguyên của phương trình vô định
\[ 9x^2 + 4y^2 = 15xy - 38 \]

GIẢI

Xem phương trình có ẩn số là \( x \), còn \( y \) là tham số:
\[ 9x^2 - 15yx + 4y^2 + 38 = 0 \]
Để \( x \) nguyên, điều kiện cần là \( \Delta = k^2 \) là số chính phương (k nguyên không âm):
\[ \Delta = k^2 = (15y)^2 - 4\cdot9\cdot(4y^2 + 38) = 81y^2 - 1368 \]
Nhận thấy phương trình \( 81y^2 - k^2 = 1368 \) chỉ có các lũy thừa bậc chẵn nên tim các nghiệm nguyên dương sẽ suy ra được các nghiệm còn lại (để thấy \( y \neq 0, k \neq 0 \)). Dạng thức có thể viết lại là
\[ (9y + k)(9y - k) = 1368 = 2^3\cdot3^2\cdot19 \]
Vi \( y, k > 0 \) nên \( 9y + k > 0 \) suy ra \( 9y - k > 0 \)

Cần phân tích 1368 thành tích của hai số nguyên dương (có 12 khả năng). Nhưng nhận thấy \( (9y + k) + (9y - k) = 18 \) nên chỉ xét hai trường hợp có tổng hai số là bội của 18 (loại muối trường hợp còn lại)
- Trường hợp 1:
\[ \begin{align*}
 9y + k &= 114 \\
 9y - k &= 12
\end{align*} \quad \Rightarrow y = 7, k = 51 \]
Vậy $x = \frac{15y + k}{18} = \frac{15.7 + 51}{18} = 3$ (loại nghiệm không nguyên)

Suy ra các nghiệm $(x, y) = (3; 7), (-3; -7)$

- Trường hợp 2:

\[
\begin{align*}
9y + k &= 228 \\
9y - k &= 6
\end{align*}
\]

⇒ $y = 13$, $k = 111$

Vậy $x = \frac{15 \cdot 13 + 111}{18} = \frac{195 + 111}{18} = 17$

(loại nghiệm không nguyên)

Suy ra $(x, y) = (17; 13), (-17; -13)$.

Tóm lại bài toán có bốn nghiệm

Bài toán 38: Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$3x^2 - 12y^2 = -5 ± 12xy$$

GIẢI

Bài toán với nghiệm vi về trái chia hết cho 3 còn về phải không chia hết cho 3 với mọi $x, y$ nguyên.

b) Nếu phương trình $ax^2 + by^2 = c ± dxy$, với các số nguyên $a, b, c, d$ mà có $\lambda = d^2 - 4ac$ khác 0, cùng không phải là số chính phương, nhưng nhỏ hơn 0 thì ta có cách giới hạn $y$ trong một khoảng.

Bởi vì để tồn tại nghiệm $x$ của phương trình bậc hai thì phải có

$$\Delta = \lambda y^2 + 4ac \geq 0$$

Do $\lambda < 0$ nên bất phương trình $\lambda y^2 + 4ac \geq 0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm trong một khoảng $y_1 \leq y \leq y_2$. 

52
Bài toán 39. Tìm nghiệm nguyên của phương trình
\[3x^2 + 2y^2 = 19 + 4xy\]

GIÁI

Phương trình được viết lại là
\[3x^2 - 4yx + 2y^2 - 19 = 0\]
Để tồn tại x thì phải có \[\Delta' = -2y^2 + 57 \geq 0\]
Suy ra \[y^2 \leq \frac{57}{2} \Rightarrow |y| \leq 5,338.\]
Vì y nguyên nên \[y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5.\]
Để có x nguyên thì \[\Delta'\] phải là số chính phương, hay chính xâ:y hơn nửa:
\[x = \frac{2y \pm \sqrt{\Delta'}}{3}\]
là số nguyên.
Chứng ta tìm được đáp số trong các trường hợp sau đây:
- khi \(y = \pm 2 \rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \Delta' = 49 \Rightarrow x = \frac{\pm 4 \pm 7}{3} = \mp 1\),
- khi \(y = \pm 4 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow \Delta' = 25 \Rightarrow x = \frac{\pm 8 \pm 5}{3} = \pm 1\)
Vậy các nghiệm là \((x, y) = (1; -2), (1; 4), (-1; 2), (-1; -4).\)

Bài toán 40. Tìm nghiệm nguyên của phương trình
\[x^2 + 4y^2 = 4xy + 169.\]

GIÁI

Phương trình bậc hai đối với x:
\[x^2 - 4yx + 4y^2 - 169 = 0\]
Có $\Delta' = 4y^2 - (4y^2 - 169) = 169$

Vậy $x = 2y \pm 13$. Phương trình có vô số nghiệm là $y$ nguyên bất kỳ, còn $x = 2y \pm 13$. Một phương trình hiê UNHOI CHi CHAng? KHiNG phái! ChÚng ta có thể tạo ra vô số phương trình như vậy. (Đó là khi $\lambda = 0$ và $ac$ là một số chính phương), hoặc $\lambda = 0$ và $bc$ là số chính phương. Trường hợp sau thì có nghiệm $x$ nguyên bất kỳ).

**Bài toán 41.** Chứng minh phương trình

$$47x^2 + 34y^2 = 7 + 77xy$$

không có nghiệm nguyên

**GIẢI**

Coi là phương trình bậc hai đối với $x$, còn $y$ là tham số:

$$47x^2 - 77xy + 34y^2 - 7 = 0$$

Để có $x$ thì điều kiện căn là $\Delta \geq 0$

$$\Delta = (77y)^2 - 4.47. (34y^2 - 7) = -463y^2 + 1316 \geq 0$$

$$\Rightarrow y^2 \leq \frac{1316}{463} < 2.85$$

Vì $y$ nguyên nên chỉ có thể là 0 hoặc ±1.

Nếu $y = 0 \Rightarrow 47x^2 = 7 \rightarrow x$ không nguyên

Nếu $y = 1 \Rightarrow 47x^2 - 77x + 27 = 0$. Lúc này $\Delta = 853$ không phải số chính phương nên $x$ không phải là số nguyên.

Nếu $y = -1 \Rightarrow 47x^2 + 77x + 27 = 0$ vẫn có $\Delta = 853$ nên $x$ không nguyên.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

ở Nếu $\lambda > 0$ nhưng không phải là số chính phương thì điều
kiên cân để có $x$ nguyên là

$$\Delta = \lambda y^2 + 4ac = k^2$$

là một số chính phương. Tức là ta phải đi tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$k^2 - \lambda y^2 = 4ac$$

nên chúng ta đã biết cách giải. Tất nhiên đương lối này thường phức tạp.

Bài toán 42: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + 3y^2 = 6xy - 6$$

GIẢI

Để phương trình bậc hai đối với $x$

$$x^2 - 6yx + 3y^2 + 6 = 0$$

có nghiệm $x$ nguyên ($x = 3y \pm \sqrt{A}$) thì điều kiện cần và đủ là biết số

$$\Delta' = (3y)^2 - (3y^2 + 6) = 6y^2 - 6 = m^2$$

phải là số chính phương, tức là $m$ nguyên.

Rõ ràng $m^2$ là bội số của 6, nên $m$ là bội số của 6, đặt $m = 6t$ với $t$ là số nguyên, chúng ta có $6y^2 - 6 = 36t^2$. Hay $y^2 - 6t^2 = 1$.

Dây là phương trình Pell với $P = 6$ mà nghiệm tam thường là $t = 0, y = \pm 1$, và nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là $y_1 = 5, t_1 = 2$.

Các nghiệm nguyên dương $y_k$, $t_k$ được xác định từ dạng thức

$$y_k + t_k\sqrt{6} = (5 + 2\sqrt{6})^k$$

với $k$ là số nguyên dương.

Vậy các nghiệm phải tìm là $(x,y) = (3;1), (-3; -1),(3;5),(-3;-5), (27;5), (-27;-5),...$

Bài toán 43: Tìm nghiệm nguyên của phương trình
$$2x^2 + 3y^2 = 6xy - 6$$

**GIẢI**

Dua tất cả về vé trái mà xem như một phương trình bậc hai của $x$:

$$2x^2 - 6yx + 3y^2 + 6 = 0$$

Để có $x$ nguyên thì điều kiện cần là

$$\Delta' = (3y)^2 - 2(3y^2 + 6) = 3y^2 - 12 = m^2$$

là số chính phương, tức $m$ nguyên.

Rõ ràng $m^2$ phải chia hết cho 3 nên $m$ chia hết cho 3.

Đặt $m = 3n$ với $n$ nguyên, ta được

$$y^2 - 3n^2 = 4.$$  

Để thấy $y$ và $n$ phải cùng chẵn hay cùng lẻ, do đó

$$x = \frac{3y \pm m}{2} = \frac{3y \pm 3n}{2} = \frac{3(y \pm n)}{2}$$  

luôn là một số nguyên (chia hết cho 3) khi $y$ và $n$ nguyên.

Phương trình $y^2 - 3n^2 = 4$ có nghiệm $y = 2$, $n = 0$ và nghiệm nguyên dương nhỏ nhất $y_1 = 4$, $n_1 = 2$. Khi đó các nghiệm tương ứng của phương trình đã cho là $(x = 3, y = 2), (x_1 = 3, y_1 = 4), (x_1' = 9, y_1 = 4)$. Tắt nhiên phương trình dạng

$$ax^2 + by^2 = c + dxy$$

nếu có nghiệm $(x_o, y_o)$ thì cũng có nghiệm $(-x_o, -y_o)$. Để thấy trong bài toán này $x$ và $y$ cũng đầu.

Phương trình $y^2 - 3n^2 = 4$ có thể viết lại là

$$\frac{y + n\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{y - n\sqrt{3}}{2} = 1$$

Do đó các nghiệm nguyên dương $y_k, n_k$ được xác định từ dạng thức.
\[
\frac{y_k + n_k\sqrt{3}}{2} = \left( \frac{y_1 + n_1\sqrt{3}}{2} \right)^k = \left( \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} \right)^k
\]

⇒ \( y_k + n_k\sqrt{3} = 2(2 + \sqrt{3})^k \)

Với \( k = 2 \) ⇒ \( y_2 + n_2\sqrt{3} = 2(2 + \sqrt{3})^2 = 14 + 8\sqrt{3} \)

Vậy \( y_2 = 14, n_2 = 8 ⇒ x_2 = \frac{3}{2} (y_2 ± n_2) = 9;33 \)

Với \( k = 3 \) ⇒ \( y_3 + n_3\sqrt{3} = 2(2 + \sqrt{3})^3 = 52 + 30\sqrt{3} \)

Vậy \( y_3 = 52, n_3 = 30 ⇒ x_3 = \frac{3}{2} (y_3 ± n_3) = 33;123 \)

....

Phương trình có số nghiệm vì có số \( k \) nguyên dương.

Cách giải thứ nhất dựa khá nằng giải quyết tất cả các bài toán dạng \( ax^2 + by^2 = c + dxy \). Tuy nhiên, trong một số bài toán, khi không yêu cầu tìm tất cả các nghiệm thì chúng ta có thể giải quyết theo một hướng khác, đơn giản hơn.

**Cách giải thứ hai:**

Lưu ý rằng \( a, b, c, d \) là các số nguyên, chúng ta nhận thấy:

- Nếu phương trình có nghiệm \( x = 0 \) thì \( by^2 = c \), do đó \( c/b \) phải là số chính phương. Nếu \( c/b \) không chính phương thì phương trình không có nghiệm \( x = 0 \).

- Xét nghiệm \( x \neq 0 \) của phương trình. Lúc này có thể viết

\[
a + b \left( \frac{y}{x} \right)^2 = \frac{c}{x^2} + d\left( \frac{y}{x} \right)
\]

Đặt \( \alpha = \frac{y}{x} \). Vì \( y \) và \( x \) nguyên nên \( \alpha \) là số hữu tỷ.

Ta có
\( a + b \alpha^2 = \frac{c}{x^2} + d \alpha \Rightarrow b \alpha^2 - d \alpha + a - \frac{c}{x^2} = 0 \)

Diệu kiện cần để phương trình bậc hai có nghiệm hữu tỉ là biết số \( \Delta \) của nó phải là bình phương của một số hữu tỉ \( p/q \) với \( p,q \) nguyên. Tức là:

\[ \Delta = d^2 - 4b\left(a - \frac{c}{x^2}\right) = \frac{p^2}{q^2} \]

Rút ra \( x^2 = \frac{4bcq^2}{p^2 - q^2(d^2 - 4ab)} \)

Đây là đồng tác tách \( x \). Rõ ràng \( x^2 \) phải là ước số chính phương của \( 4bcq^2 \) nên \( x \) là ước số nguyên của \( 2q\sqrt{|bc|} \)

Tương tự \( y \) là ước số nguyên của \( 2s\sqrt{|ac|} \). Việc xác định \( q \) hoặc \( s \) không phải đơn giản.

Sau đây là một số bài toán mà cách giải thứ hai cho lời giải khá gọn.

Bài toán 44. Phương trình \( 41x^2 - 61072y^2 = 369 + 15453xy \) có nghiệm nguyên hay không?

GIẢI

Vì \( a = 41, c = 369 \) nên \( \frac{c}{a} = 9 \) là số chính phương

Do đó phương trình có nghiệm \( y = 0, x = \pm 3 \).

Bài toán 45. Chứng minh phương trình

\[ 2x^2 + py^2 = 4p + pxy \]

có ít nhất ba nghiệm nguyên với mọi \( p \) nguyên tố.
· GIÁI

\[ y = \text{uốn số nguyên của } 2\sqrt{ac} = 2\sqrt{2.4p} = 4\sqrt{2p} \]

nên \( y \) có thể là \( \pm 1, \pm 2, \pm 4 \). Nếu \( p = 2 \) thì \( y \) còn có thể là \( \pm 8 \).

- Nếu \( y = \pm 1 \Rightarrow 2x^2 \pm px - 3p = 0 \Rightarrow \Delta = p^2 + 24p \) không chính phương nên \( x \) không nguyên.
- Nếu \( y = \pm 2 \Rightarrow 2x^2 \mp 2px = 0 \Rightarrow x = 0 ; \pm p \)
- Nếu \( y = \pm 4 \Rightarrow x^2 \mp 2x + 6p = 0 \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow \) không có \( x \)

Tóm lại, với mọi \( p \) nguyên tố, phương trình đã cho có ít nhất bốn nghiệm nguyên \( (x, y) = (0;2),(0;-2),(p ;2), (-p ; -2) \) thỏa mãn đầu bài.

Bài toán 46. Chung minh phương trình

\[ 2x^2 - 3y^2 = 36 + 2xy \]

có ít nhất 10 nghiệm nguyên. Chỉ ra các nghiệm đó.

· GIÁI

\[ x = \text{uốn số nguyên của } 2\sqrt{|bc|} = 2\sqrt{3.36} = 12\sqrt{3} \Rightarrow x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12. \]

Chi cần xét các \( x > 0 \) vì nhận thấy nếu phương trình có nghiệm \( (x_o, y_o) \) thì cũng có nghiệm \( (-x_o, -y_o) \):

- Nếu \( x = 1 \Rightarrow 3y^2 + 2y + 34 = 0 \Rightarrow \Delta' < 0 \), không có \( y \)
- Nếu \( x = 2 \Rightarrow 3y^2 + 2y + 28 = 0 \Rightarrow \Delta' < 0 \), không có \( y \)
- Nếu \( x = 3 \Rightarrow y^2 + 2y + 6 = 0 \Rightarrow \Delta' < 0 \), không có \( y \)
- Nếu \( x = 4 \Rightarrow 3y^2 + 8y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2 \). Phương trình có nghiệm \( (x, y) = (4;-2), (-4; 2) \)
- Nếu $x = 6 \Rightarrow y^2 + 4y - 12 = 0 \Rightarrow y = -6$; 2. Phương trình có nghiệm $(x, y) = (6; -6), (6; 2), (-6; 6), (-6; -2)$.

- Nếu $x = 12 \Rightarrow 3y^2 + 24y - 252 = 0 \Rightarrow y = -14; 6$.

Phương trình có nghiệm $(x, y) = (12, -14), (12; 6), (-12; 14), (-12; -6)$.

Ta đã liệt kê được 10 nghiệm nguyên của phương trình đã cho.

**Bài toán 47. Tìm a để phương trình**

$$4x^2 + 31y^2 = a + 6 - 17xy$$

có nghiệm nguyên $(x, y)$ duy nhất.

**GIẢI**

Nếu phương trình có nghiệm nguyên $(x_0, y_0)$ thì nó cũng có nghiệm $(-x_0, -y_0)$. Do đó, điều kiện cần để phương trình có nghiệm nguyên duy nhất là $x_0 = -x_0, y_0 = -y_0$, tức là $x_0 = y_0 = 0$ khi đó $a = -6$.

Đây cũng là điều kiện kiện đủ vì phương trình đã cho với $a = -6$ là

$$4x^2 + 31y^2 = -17xy$$

Xem phương trình là bậc hai đối với $x$, còn $y$ là tham số thì $\Delta = -207y^2$. Để có $x$ thì $\Delta > 0, \Rightarrow y = 0$. Lục độ $4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = 0$.

§ 6. PHƯƠNG TRÌNH $AX^2 + BY^2 + CXY + DX + EY + F = 0$

Chúng ta đã tích lũy sức mạnh để tận công vào định lý kiến có nhất của phương trình vô định bậc hai có hai ẩn số.

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$
trong đó a, b, c, d, e, f là các số nguyên.

Viết lại dưới dạng phương trình bậc hai đối với x, còn y là tham số:

\[ ax^2 + (cy + d)x + by^2 + cy + f = 0 \]

Điều kiện cần để có x nguyên là biết số

\[ \Delta = (cy + d)^2 - 4a(by^2 + ey + f) = k^2 \]

là một số chính phương (k nguyên không âm). Để phương trình bậc hai có ẩn số

\[ (c^2 - 4ab)y^2 + (2cd - 4ae)y + d^2 - 4af - k^2 = 0 \]

có nghiệm y nguyên thì điều kiện cần là biết số \( \delta \) của nó là một số chính phương \( m^2 \) (m là số nguyên không âm). Dạng thức \( \delta = m^2 \) là phương trình vô định có dạng \( m^2 - Ak^2 = C \) với A, C là các số nguyên mà chúng ta đã biết cách giải.

**Bài toán 48.** Tìm nghiệm của phương trình

\[ 2x^2 + 3y^2 - 5xy + 3x - 2y - 3 = 0 \]

**GIẢI**

Xem phương trình là bậc hai đối với x:

\[ 2x^2 + (3 - 5y)x + 3y^2 - 2y - 3 = 0 \]

Để có x nguyên thì điều kiện cần là

\[ \Delta = (3 - 5y)^2 - 4.2(3y^2 - 2y - 3) \]
\[ = y^2 - 14y + 33 = k^2 \]

là số chính phương (k nguyên không âm).

Lại xem \( y^2 - 14y + 33 - k^2 = 0 \) là phương trình bậc hai đối với y. Để có y nguyên thì điều kiện cần là:

\[ \delta' = 49 - (33 - k^2) \cdot 16 + k^2 = m^2 \] là một số chính phương
(m nguyên dương). Để thấy số nguyên dương $m > k \geq 0$. Vi $16 = (m + k) (m - k)$ mà $m + k > 0$ nên $m - k > 0$, tức nhiên $m + k > m - k > 0$. Nhận thấy $(m + k)$ và $(m - k)$ có tổng là số chẵn $2m$ nên chúng đồng thời chẵn hay lẻ. Do đó cần phân tích 16 thành tích của hai số chẵn sau đây $16 = 8 \times 2 = 4 \times 4$.

a) \[
\begin{cases}
m + k = 8 \\
m - k = 2
\end{cases}
\]
Suy ra $m = 5$, $k = 3$. Lục đố phương trình
\[y^2 - 14y + 33 - k^2 = 0\] có nghiệm $y = 7 \pm 5 = 12; 2$ và \[x = \frac{5y - 3 \pm k}{4} = \frac{5.12 - 3 \pm 3}{4} = 15\]
(loại nghiệm không nguyên) khi $y = 12$;
\[x = \frac{5.2 - 3 \pm 3}{4} = 1\] (loại nghiệm không nguyên) khi $y = 2$;
phương trình đã cho có nghiệm $(x, y) = (15; 12), (1; 2)$

b) \[
\begin{cases}
m + k = 4 \\
m - k = 4
\end{cases}
\]
Suy ra $m = 4$, $k = 0$. Tương tự như trên, bài toán có thêm hai nghiệm $(x, y) = (13; 11), (3; 3)$

Bài toán 49: Tìm nghiệm nguyên của phương trình
\[-6x^2 - 2y^2 + 6xy + 8x + 3y = 168\]

GÌÁI

Việt lại dưới dạng phương trình bậc hai của $x$:
\[-6x^2 + 2(3y + 4)x - 2y^2 + 3y - 168 = 0\]
Xét biệt số $\Delta' = (3y + 4)^2 - (-6)(-2y^2 + 3y - 168)$
\[= -3y^2 + 42y - 152\]
\[= -3\left[(y - 7)^2 + \frac{5}{3}\right] < 0\]

Phương trình không tồn tại x, vậy không thể có nghiệm nguyên.

Bài toán 50. Tìm nghiệm nguyên của phương trình
\[1987x^2 + 1988y^2 = 3000 - 2x^2y^2\]

GIẢI

Để thấy rằng \(x^2\) và \(y^2\) không nghiệm đúng khi chúng cùng bằng 0, cùng bằng 1 hoặc một số bằng 0, số kia bằng 1.

Nếu \(x^2 = y^2 = 1\) thì về trái lớn hơn về phải.

Sử sai khác càng lớn khi \(|x|\) và \(|y|\) tăng lên.

Vậy phương trình vô nghiệm (nguyên).

Bài toán 51. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một cặp số nguyên \((x,y)\) cùng âm thoa mạn dạng thức
\[8x^2 - 7y = 100\]

GIẢI

Đặt \(x^2 = X > 0 \Rightarrow 8X - 7y = 100\)
\[\Rightarrow y = \frac{8X - 100}{7} = X - 14 + \frac{X - 2}{7}\]

Để y nguyên, với X nguyên thì \(X - 2 = 7t\) với \(t\) nguyên. Vậy \(X = 7t + 2, y = 8t - 12\)

Nhận thấy \(X > 0 \Rightarrow t > \frac{2}{7} \Rightarrow t = 0, 1, 2...,\)
và \( y < 0 \Rightarrow t < \frac{12}{8} \Rightarrow t = 1,0,-1,-2,... \)

Do đó để tồn tại \( x^2 \) và \( y \), \( t \) chỉ có thể là 0 hoặc 1

Nếu \( t = 0 \) \( \Rightarrow X = x^2 = 2 \) không phải là số chính phương nên \( x \) không phải là số nguyên.

Nếu \( t = 1 \) \( \Rightarrow X = x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \) và \( y = -4 \).

Vậy có một cặp số nguyên âm duy nhất \( x = -3, y = -4 \) thỏa mãn đầu bài.

**Bài toán 52. Giải phương trình**

\[ 2x^2 + 3y^2 = 19 - 4x \]

trong: \(-\) tập hợp số nguyên.

**GIẢI**

Viết lại phương trình đã cho

\[ 2x^2 + 4x + 3y^2 - 19 = 0 \]

và coi đó là phương trình bậc hai với \( x \)

Để phương trình có nghiệm \( x = \frac{-2 \pm k}{2} \) là một số nguyên thì điều kiện cần (và đủ) là biệt số \( \Delta' = k^2 = 4 - 2(3y^2 - 19) = 42 - 6y^2 \) là số chính phương chẵn \( k^2 \) (\( k \) là số nguyên chẵn).

Nhu vậy \( 6y^2 = 42 - k^2 \) nên

\[ y^2 = 7 - \frac{k^2}{6} \leq 7 \]

Từ đó suy ra số chính phương \( y^2 \) là 4, 1, 0 mà các giá trị tương ứng \( k^2/6 \) là 3, 6, 7. Suy ra \( k^2 \) là 18, 36, 42.

Chỉ có một giá trị thích hợp \( k^2 = 36, y^2 = 1 \).
Khi đó $x = -1 \pm 3 \Rightarrow x = 2, -4$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm $(x, y)$ là $(2; 1), (2; -1), (-4; 1), (-4; -1)$

**Bài toán 53.** Chứng minh rằng phương trình

$$5y^2 - 7y - 32 + 8m^2 = 0$$

không có nghiệm $y$ nguyên âm với mọi $m$ nguyên.

**GIẢI**

Nghiệm của phương trình phải có dạng

$$y = \frac{7 \pm k}{10} \text{ với } k^2 = \Delta = 49 + 160(4 - m^2)$$

mà $k$ là số nguyên dương ($k = 0$ thì $y$ không nguyên). Như vậy

$$y = \frac{7 + k}{10} > 0, \text{ còn } y = \frac{7 - k}{10}$$

nhỏ hơn 0 khi và chỉ khi $7 - k < 0 \iff k > 7$.

Lực độ $\Delta = k^2 > 49$ nên $4 - m^2 > 0 \Rightarrow m^2 < 4$

Vì $m$ nguyên nên $m^2 = 0; 1$.

Nếu $m^2 = 0$ thì $\Delta = 689$ không phải là số chinh phương nên không có $y$ nguyên.

Nếu $m^2 = 1$ thì $\Delta = 529 = 23^2 \Rightarrow y = \frac{7 - 23}{10}$ không nguyên. Từ đó suy ra dpcm.

Có thể dễ dàng tìm được tất cả các nghiệm nguyên là $y = 3$

khi $m = \pm 1$ và $y = 0$ khi $m = \pm 2$ bởi vì $\Delta \geq 0$ khi và chỉ khi $m < \frac{689}{160}$, tức là $m = 0, \pm 1, \pm 2$. 65
Bài toán 54.

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình

\[6x^2 - 5y^2 = - 40x - 3\]

GIẢI

Viết lại: \(3(2x^2 + 1) = 5(y^2 - 8x)\)

Nếu vậy \(2x^2 + 1\) chia hết cho 5. Vì \(2x^2 + 1\) là số lẻ nên phải tận cùng là 5, do đó \(2x^2\) tận cùng là 4, suy ra \(x^2\) tận cùng là 2 hoặc 7. Do là điều không thể xảy ra vì các số chẵn phương chỉ có thể tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9. Vậy bài toán vô nghiệm.

Bài toán 55. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

\[x^2 - 200xy + p = 0\]

với \(p\) là các số nguyên không lớn hơn 1999.

GIẢI

a) Với \(p = 1999\), phương trình đã cho có nghiệm nguyên \(x_{1,2} = 100y \pm k\) khi và chỉ khi \(k^2 = \Delta' = (100y)^2 - 1999\) là số chẵn phương, tức là \(k\) nguyên. Vì số mũ của \(y\) và \(k\) trong phương trình

\[1999 = (100y)^2 - k^2 = (100y + k)(100y - k) = x_1x_2\]

là chẵn nên trước hết xét nghiệm nguyên dương của phương trình. Do \(y, k > 0\) nên \(100y + k > 0,\) do đó \(100y - k > 0\). 1999 là số nguyên tố nên \(100y + k = 1999, 100y - k = 1\). Suy ra \(y = 10, k = 990\) nên \(x_1 = 1999, x_2 = 1\).

Phương trình có các nghiệm \((x,y) = (1,10), (1999, 10), (-1, -10), (-1999, -10)\)

b) Với \(p\) là số nguyên nhỏ hơn 1999, chứng tỏ chúng mình kết quả tổng quát sau đây:

Phương trình đã cho vô nghiệm (nguyên) với \(p = q^n\) trong đó
m là số lẽ dương, còn q là số nguyên tố không có dạng 200 n – 1

Thật vậy, ta có \( \Delta' = (100y)^2 - q^m = k^2 \) nên
\[
(100y + k)(100y - k) = q^m
\]

Để thấy rằng nghiệm x nguyên (nếu có) là \( x = 100y \pm k \). Giả sử \( x_1 = 100y + k \), \( x_2 = 100y - k \).

Do q nguyên tố nên \( 100y + k = \pm q^a \), \( 100y - k = \pm q^b \) với \( a + b = m \), \( a > b \) là các số nguyên dương. Theo định lý Vi - ét
\[
x_1 + x_2 = q^a + q^b = \pm 200y
\]
hay \( q^b(q^{a-b} + 1) = \pm 200y \) (*)

Rõ ràng \( a - b = a + b - 2b = m - 2b \) là số lẽ (do m lẽ) nên
\[
q^{a-b} + 1 = (q + 1)(q^{a-b-1} - q^{a-b-2} + \ldots - 1)
\]

= (q + 1) t.

t là số lẽ vi là tổng của một số lẽ (a - b) các số hang, mỗi số hang đều lệ. Thay vào (*)

\[
q^b(q + 1)t = \pm 200y
\]

Đẳng thức này không dùng vì \( q^b \) và t là các số lệ, còn \( q + 1 \) không chia hết cho 200.

Trở lại bài toán của ta các số nguyên tố có dạng 200n – 1 nhỏ hơn 1999 là 199, 599, 1399:

- khi \( p = 199 \) thì \( (x, y) = (1, 1), (199, 1), (-1, -1), (-199, -1) \)
- khi \( p = 599 \) thì \( (x, y) = (1, 3), (599, 3), (-1, -3), (-599, -3) \)
- khi \( p = 1399 \) thì \( (x, y) = (1, 7), (1399, 7), (-1, -7), (-1399, -7) \)
Chương III

Những phương trình vô định

Các phương trình vô định thật đa dạng, và các cách giải chúng cũng thật là đa dạng.

§ 1. Phương trình bậc hai và bậc hai mở rộng

Bài toán 56. Tìm nghiệm nguyên của phương trình
\[ x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = y^2 \]

Giải

\[ y^2 = x(x + 3)(x + 1)(x + 2) = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = (x^2 + 3x + 1 - 1)(x^2 + 3x + 1 + 1) = (x^2 + 3x + 1)^2 - 1 \]

Trong đây số chính phương 0, 1, 4, 9, ... chỉ có một trường hợp hiệu của hai số là 1, đó là \( y^2 = 0 \) và \( (x^2 + 3x + 1)^2 = 1 \), tức là \( y = 0 \) và \( x^2 + 3x + 1 = \pm 1 \)

\[ \Rightarrow x = 0, -1, -2, -3. \text{ Các nghiệm phải tìm là} \]
\[ (x,y) = (0;0), (-1;0), (-2,0), (-3,0) \]

Bài toán 57. Tìm các cặp số nguyên \((x,y)\) sao cho
\[ x(x + 1)(x + 7)(x + 8) = y^2 \]

(Dế thi chọn vào đội tuyển thi Toán quốc tế của Việt Nam)
GIÁI

Ta biến đổi như sau:

\[ y^2 = (x^2 + 8x) \left( x^2 + 8x + 7 \right) = (x^2 + 8x + \frac{7}{2} - \frac{7}{2}) \left( x^2 + 8x + \frac{7}{2} \right) \]

\[ = (x^2 + 8x + \frac{7}{2})^2 - \left( \frac{7}{2} \right)^2 \]

\[ \Rightarrow 4y^2 = (2x^2 + 16x + 7)^2 - 49 \]

\[ \Rightarrow (2x^2 + 16x + 7 + 2y)(2x^2 + 16x + 7 - 2y) = 49 \]

Hai thừa số ở vế trái là hai số nguyên lệ cùng đầu có tích là 49. Tù do suy ra các nghiệm \((x,y) = (0,0), (-1,0), (1,12), (1,-12), (-9,12), (-9,-12), (-8,0), (-7,0), (-4,12), (-4,-12)\)

**Bài toán 58**: Giải phương trình

\[ x(x + 8)(x + 9)(x + 1) = y^4 + 54y^2 + 713 \]

trong tập số nguyên.

---

GIÁI

Vẽ trái có thể viết là:

\[ (x^2 + 9x)(x^2 + 9x + 8) = (x^2 + 9x + 4 - 4)(x^2 + 9x + 4 + 4) = \]

\[ = (x^2 + 9x + 4)^2 - 16 \]

Còn vế phải \(y^4 + 54y^2 + 683 = (y^2 + 27)^2 - 16\).

Do đó phương trình đã cho trở thành \(|x^2 + 9x + 4| = y^2 + 27\)

a) Nếu \(x^2 + 9x + 4 \geq 0\) (tức là \(x > \frac{17}{2}\)) hoặc \(x < -\frac{17}{2}\) thì \(x^2 + 9x + 4 = y^2 + 27\). Xem như phương trình là bậc hai đối với \(x\) còn \(y\) là tham số:

\[ x^2 + 9x - y^2 - 23 = 0 \]
Để có nghiệm \( x = \frac{-9 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \) là số nguyên thì điều kiện cần

và đủ là \( \Delta = 4y^2 + 173 = k^2 \) là số chính phương lẻ (tức k lẻ nguyên dương)

Chỉ cần xét y nguyên dương vì phương trình đã cho nếu có nghiệm \((x_0, y_0)\) thì cũng có nghiệm \((x_0, -y_0)\).

Do \( 173 = k^2 - 4y^2 = (k + 2y)(k - 2y) \) và \( k + 2y > 0 \)

nên \( k - 2y > 0 \). Vì 173 là số nguyên tố nên \( k + 2y = 173, k - 2y = 1 \). Ta có \( k = 87, y = 43, \)

\[
\begin{align*}
\quad & x = \frac{-9 \pm k}{2} = \frac{-9 \pm 87}{2} = -48; 39.
\end{align*}
\]

Cả hai giá trị này đều nằm trong khoảng dương xε

b) Nếu \( x^2 + 9x + 4 \leq 0 \) cần tìm nghiệm nguyên của phương trình \( x^2 - 9x - 4 = y^2 + 27 \). Phương trình \( x^2 + 9x + y^2 + 31 = 0 \) vô nghiệm vì

\[\Delta = -4y^2 - 43 < 0 \] với mọi y.

Tóm lại, phương trình đã cho chỉ có bốn nghiệm \((x, y) = (-48, 43), (-48, -43), (39, 43), (39, -43)\).

Bài toán 59: a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình

\[x(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 73y - 83\]

b) Chứng minh phương trình \( x(x^2 - 1)(x - 4) = 73x - 83 \) không có nghiệm nguyên.

GIAI

a) Vẽ trái \( P = (x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2) \) là tích của năm số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 120. Thật vậy, trong năm số nguyên liên tiếp có ít nhất hai số chẵn, và có ít nhất một số
chia hết cho 4 nên P chia hết cho 8. Trong P cũng có ít nhất một số chia hết cho 3, ít nhất một số chia hết cho 5, vậy P chia hết cho 3, P chia hết cho 5. Vi 3, 5, 8 nguyên tố cùng nhau nên P chia hết cho 3.5.8 = 120. Vậy, với x nguyên bất kỳ P = 120 thì t là số nguyên.

Phương trình đã cho có thể viết là

$$73y - 83 = 120t$$

Suy ra $$y = \frac{120t + 83}{73} = 2t + 1 + \frac{-26t + 10}{73} =$$

$$= 2t + 1 + \frac{2(5 - 13t)}{73} = 2t + 1 + \frac{2(5 + 73 - 13t - 73)}{73}$$

$$= 2t + 1 + \frac{2[13(6 - t) - 73]}{73} = 2t + 1 + \frac{26(6 - t)}{73} - 2$$

$$= 2t - 1 + \frac{26(6 - t)}{73}$$

Vì (26, 73) = 1 nên để y nguyên trong khi t nguyên, phải có 6 - t = 73 k với k nguyên. Vậy t = 6 - 73 k và y = 2t - 1 + 26 k = 11 - 120 k với k nguyên bất kỳ, còn x được xác định từ dạng thức.

$$(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2) = 120t = 120(6 - 73k)$$.

Thì dự với k = 0 thì y = 11 và $$(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2) = 120.6 = 2.3.4.5.6$$, vậy x = 4

b/ Nghiệm nguyên của phương trình

$$x(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 73x - 83 \quad (1)$$

là giá trị x = y nguyên của phương trình

$$x(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 73y - 83 \quad (2)$$

Ta đã biết x = 4 thì y = 11. Khi x tăng thì y tăng nhanh hơn nên (1) không có nghiệm nguyên lớn hơn hay bằng 4. Nếu x =
3 thì \( y = (120 + 83) : 73 \approx 4,42 \). Nếu \( x = 2, 1, 0, -1, -2 \) thì vế trái của (2) bằng 0, còn \( y = 83 : 73 \approx 1,14 \). Nếu \( x = -3 \) thì \( y = -0,5 \), nếu \( x = -4 \) thì \( y = -8,7 \). Lúc này \( y \) giảm nhanh hơn nên (1) không thể có nghiệm nguyên nhỏ hơn hơn hay bằng -4. Tóm lại (1) không có nghiệm nguyên.

Bài toán 60. Chứng minh phương trình
\[
x^2 + y^2 = 4m - 1 \quad (1)
\]
không có nghiệm nguyên với mọi \( m \) nguyên.

GIÁI

Có thể biến đổi như sau:
\[
(x + y)^2 = 4m - 1 + 2xy \quad (2)
\]
Do \( 4m - 1 \) là số lẻ nên \( x \) và \( y \) không thể cùng lẻ,
suy ra \( xy = 2t \) là số chẵn (t nguyên)
Vậy \( (x + y)^2 = 4(m + t) - 1 \quad (3) \).
Rõ ràng \( (x + y)^2 \) là số chính phương, còn \( 4(m + t) - 1 = 4s - 1 \) không thể là số chính phương với mọi \( s \) nguyên.
Thật vậy, bình phương một số chẵn 2 \( k \) có dạng 4s, bình phương một số lẻ \( (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 \) có dạng 4s + 1. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 61. Chứng minh phương trình
\[
(1953x - 1988y)^2 = (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2 + (x + 4)^2 + (x + 5)^2 \text{ không có nghiệm nguyên.}
\]

GIÁI

Đặt vế trái là \( k^2 \) thì \( k \) nguyên. Vẽ phẳng rẽ gôn là \( 5(t^2 + 2) \)
neu đặt \( x + 3 = t \). Dạng thức \( k^2 = 5(t^2 + 2) \) chúng tọ k chia hết
cho $5$, suy ra $t^2 + 2$ cũng chia hết cho $5$ nên $t^2$ có tận cùng là $3$ hoặc $8$.

Điều này không thể xảy ra vì các số chính phương chỉ có thể tận cùng là $0, 1, 4, 5, 6, 9$. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

**Bài toán 62**: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$\frac{x^2 - 1989}{y^2} = \left(\frac{x}{y - z} + \frac{y}{z - x} + \frac{z}{x - y}\right) \left(\frac{y - z}{x} + \frac{z - x}{y} + \frac{x - y}{z}\right)$$

biết $x + y + z = 0$.

**GIÁI**

Trước hết rút gọn về phải $B = B_1 \cdot B_2$

trong đó

$$B_1 = \frac{x}{y - z} + \frac{y}{z - x} + \frac{z}{x - y} =$$

$$= \frac{x(x - y)(z - x) + y(y - z)(x - y) + z(z - x)(y - z)}{(x - y)(y - z)(z - x)},$$

$$B_2 = \frac{y - z}{x} + \frac{z - x}{y} + \frac{x - y}{z} = \frac{yz(y - z) + zx(z - x) + xy(x - y)}{xyz}.$$

Xét $B_1$: cho $x = 0$, khi ấy từ $x + y + z = 0$ có $y = -z$, từ $B_1$ là $T_1 = 0$. Vậy $T_1$ chia hết cho $x$. Tương tự $T_1$ chia hết cho $y$, $T_1$ chia hết cho $z$. Vậy $T_1 = \alpha xyz$. Để thấy $\alpha$ là hàng số (bằng $-9$) vì $T_1$ là hàm bậc ba.

Xét $B_2$: khi $x - y = 0$, $y - z = 0$, $z - x = 0$ thì từ $T_2$ của $B_2$. 

73
đều bằng 0. Ta có

$$T_2 = \beta(x - y)(y - z)(z - x) \ (*)$$

$T_2$ là hàm bậc ba nên $\beta$ là hàng số. Ta xác định được $\beta = -1$ khi cho $x, y, z$ những giá trị bất kỳ đối với một khác nhau (chẳng hạn $x = 1, y = 2, z = -3$) vào dỗ nhất thức (*)

Vậy $B = B_1B_2 = \frac{-9xyz}{(x - y)(y - z)(z - x)} \frac{-(x - y)(y - z)(z - x)}{xyz}$

$B = 9.$

Phương trình đã cho trở thành

$$x^2 - 9y^2 = 1989 = 9.13.17 \Rightarrow (x - 3y)(x + 3y) = 9.13.17.$$  

Nếu phương trình có nghiệm (nguyên) thì phải có nghiệm nguyên dương $x > y > 0$. Khi đó $x + 3y > 0$ nên $x - 3y > 0$. Tắt nhiên $x + 3y > x - 3y$. Lại thấy $(x + 3y) - (x - 3y) = 6y$ nên 1989 cần phân tích thành hai thừa số có hiếu chia hết cho 6. Nhưng 1989 chỉ có thể là tích của 1989 và 1, 221 và 9, 153 và 13, 117 và 17 không cặp nào có hiếu là số 6. Vậy bài toán vô nghiệm.

Bài toán 63. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương $(x, y)$ của phương trình

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

thỏa mãn điều kiện $80 < x < 120.$

(Dề tuyển vào lớp bồi dưỡng của Bộ Giáo dục lập đội tuyển Việt Nam thi toán quốc tế lần thứ 16 (1974))
GIẢI

Nhận thấy phương trình có nghiệm nhỏ nhất \(x_1 = 3, y_1 = 2\). Ví dụ \(l = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})\) nên \(l = (3 + 2\sqrt{2})^k(3 - 2\sqrt{2})^k\) với \(k\) nguyên dương.

Lại thấy rằng \((3 + 2\sqrt{2})^k = x_k + y_k\sqrt{2}\) thì

\((3 - 2\sqrt{2})^k = x_k - y_k\sqrt{2}\) với \(x_k, y_k\) nguyên dương nên

\(x_2 + y_2\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2} \Rightarrow x_2 = 17, y_2 = 12\)

\(x_3 + y_3\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^3 = 99 + 70\sqrt{2} \Rightarrow x_3 = 99, y_3 = 70\)

\(x_4 + y_4\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^4 = 577 + 408\sqrt{2} \Rightarrow x_4 = 577, y_4 = 408\).

Vậy \(x_3 = 99, y_3 = 70\) thỏa mãn đầu bài.

Cùng có thể giải theo cách sau đây: viết lại phương trình đã cho \((x - 1)(x + 1) = 2y^2\)

Rõ ràng \((x - 1)\) và \((x + 1)\) là hai số chẵn liên tiếp, chỉ có ước số chung là 1 và 2.

Do đó nếu \(x - 1\) có ước số nguyên tố lẻ là \(p\) thì \(y^2\) chia hết cho \(p \Rightarrow y \equiv p\) với \(p\) nguyên tố \(\Rightarrow y^2\) chia hết cho \(p^2 \Rightarrow (x - 1)(x + 1)\) chia hết cho \(p^2\). Nhưng \((x - 1)(x + 1)\) không cùng có ước số \(p\) nên \((x - 1)\) chia hết cho \(p^2\). Tương tự đối với \((x + 1)\).

Vậy \(x - 1\) và \(x + 1\) là hai số chẵn liên tiếp cùng có tính chất: nếu chia hết cho số nguyên tố lẻ \(p\) thì phải chia hết cho \(p^2\).

Trong các số chẵn từ 80 đến 120 chỉ có cặp số 80,100 có tính chất ấy.

Vậy \(x - 1 = 98, x + 1 = 100 \Rightarrow x = 99, y = 70\).
Bài toán 64.

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

\[ 4[1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + x(x+1)(x+2)] + 1 = y^2 \]

Giải

Bảng quy nap, dễ dàng chứng minh được

\[ X = 1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + x(x+1)(x+2) = \frac{1}{4} x(x+1)(x+2)x(x+3) \] (1)

Thật vậy, (1) đúng với \( x = 1 \).

Giả sử (1) đúng với \( x \), ta phải chứng minh nó cũng đúng với

\( x + 1 \), tức là từ (1) suy ra

\[ 1.2.3 + 2.3.4 + \ldots x(x+1)(x+2) + (x+1)(x+2)(x+3) = \frac{1}{4} (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) \] (2)

Do (1), vế trái của (2) là

\[ T = \frac{1}{4} x(x+1)(x+2)(x+3) + (x+1)(x+2)(x+3) = \]

\[ = (x+1)(x+2)(x+3) \left( \frac{1}{4} x + 1 \right) = \frac{1}{4} (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) \]

Vậy (2) đúng, và theo nguyên lý qui nap (1) đúng.

Do đó \( y^2 = x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 \)

\[ = (x^2 + 3x + 1 - 1)(x^2 + 3x + 1 + 1) + 1 \]

\[ = (x^2 + 3x + 1)^2 \]

Vậy \( x = t \) nguyên dương bất kỳ, \( y = |t^2 + 3t + 1| \)

Bài toán 65. Tìm các số hữu tỉ \( x \) sao cho giá trị của biểu thức

\[ x^2 + x + 6 \] là một số chính phương

(Thi chứng khảo vào dịch CHDC Đức -1978).
GIÁI

Đặt $x = \frac{p}{q}$ với $p, q$ nguyên, $(p, q) = 1$ và $q > 0.$

Từ $x^2 + x + 6 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{p}{q}\right) + 6 = y^2$ với $y$ nguyên dương:

Suy ra $p^2 = q(-p - 6q + y^2q)$

Điều đó chứng tỏ $p, q$ có ước số chung. Vì $(p, q) = 1$ nên $q = 1.$ Vậy $x = p.$ Bài toán trở thành tìm nghiệm nguyên của phương trình $p^2 + p + 6 = y^2$.

Để phương trình $p^2 + p + 6 - y^2 = 0$ có nghiệm

$$p = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

nguyên thì điều kiện cần và đủ là

$$\Delta = 1 - 4(6 - y^2) = k^2$$

là số chính phương lẻ ($k$ nguyên dương)

Vì $4y^2 - k^2 = (2y + k)(2y - k) = 23$ là số nguyên tố và $2y + k > 0$ ($\Rightarrow 2y - k > 0$) nên $2y + k = 23, 2y - k = 1.$

Vậy $y = 12, k = 11$ nên $x = p = \frac{-1 \pm k}{2} = 5, -6.$

Bài toán 66. Chứng minh phương trình:

$$3x^2 + (1989 - 2y^n)x + 4y^{2n} + 2y^2 = 1989$$

không có nghiệm nguyên với mọi $n$ tự nhiên.

GIÁI

Phương trình bậc hai đối với $x$ này không có nghiệm $x$ nguyên vì biết số $\Delta$ không phải là số chính phương do các hệ số đều lẻ.

That vậy, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c$ lẻ có nghiệm
\[ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ là số nguyên chỉ khi} \]

\[ \Delta = b^2 - 4ac = k^2 \text{ là số chính phương lẻ. Đặt } k = b + 2m \text{ với} \]

m nguyên ta có \[ k^2 = b^2 + 4m^2 + 4bm \]
Nhưng \[ k^2 = b^2 - 4ac \text{ nên } b^2 - 4ac = b^2 + 4m^2 + 4bm \]

\[ \Rightarrow -ac = m(m + b) \]
Đang thức này không thể xảy ra vì về trái là số lẻ, về phải là số chẵn.

Chứng ta có thể chứng mình được điều tổng quát: Phương trình đại số bậc chẵn không có nghiệm hữu tỷ nếu tất cả các hệ số đều lẻ.

Bài toán 67. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

\[ 9x^2 + 2y^2 + z^2 - 6xy - 6y + 2z + 10 = 0 \]

GÍAIl

Biến đổi phương trình đã cho

\[ 0 = (3x)^2 - 6xy + y^2 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 2z + 1 \]
\[ = (3x - y)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 \]
Vậy \[ 3x - y = 0, y - 3 = 0, z + 1 = 0 \Rightarrow z = -1, y = 3, x = 1 \]
Bài toán 68. Chứng minh rằng tồn tại vô số bộ ba số tự nhiên \( x, y, z \) sao cho

\[ 4xy - x - y = z^2 - 1 \]
(Dé dự bị thi toán Quốc tế – 1984 Ba Lan đề nghị).

GÍAIl

Phương trình có vô số nghiệm \( x = 1, y = 3k^2, z = 3k \) với \( k \) tự nhiên.
Cùng có thể đưa ra vở số nghiệm sau:  \( x = \frac{m(m - 1)}{2} \), 
\( y = \frac{m(m + 1)}{2} \), \( z = m^2 - 1 \) với \( m \) tự nhiên.

**Bài toán 69.** Chứng minh phương trình

\[ 4xy - x - y = z^2 \]

không có nghiệm nguyên.

**GIẢI**

Sử dụng định lý nhỏ Ferma với mọi \( p \) nguyên tố, a nguyên thì \( a^2 - a \) chia hết cho \( p \)

dưới tương đương với \( a^{p-1} \) chia \( p \) dư 1, tức là \( a^{p-1} \equiv 1 \) (modp) với \( p \) nguyên tố, a không chia hết cho \( p \), a nguyên)

Từ phương trình đã cho suy ra

\[ (4x - 1)(4y - 1) = 4Z^2 + 1. \]

Gọi \( p \) là ước số nguyên tố bất kỳ của \( 4x - 1 \) thì \( p \) cũng là ước số của \( 4Z^2 + 1 \), vày \( 4Z^2 \) chia \( p \) dư -1, tức là \( 4Z^2 \equiv -1 \) (modp).

Theo định lý nhỏ Ferma thì \( (2Z)^{p-1} \equiv 1 \) (modp) nên

\[ 1 \equiv (2Z)^{p-1} \equiv (4Z^2)^{p-2} \equiv (-1)^{p-2} \] (modp)

Suy ra \( \frac{p - 1}{2} = 2k \Rightarrow p = 4k + 1 \), k nguyên dương.

Vậy, tất cả các ước số nguyên tố của \( 4x - 1 \) đều có dạng \( 4k + 1 \). Suy ra \( 4x - 1 \) cũng phải có dạng \( 4k + 1 \), nghĩa là \( 4x - 1 = 4k + 1 \Rightarrow 4x = 4k + 2 \) (vô lý)

Trên đây là bài toán Euler đã chú ý đến trong quá trình nghiên cứu dẫn đến phát minh một định lý cơ bản trong lý thuyết
số. Ông đã chứng minh được nhờ định lý nhỏ Fecma, nhưng điều đó làm ông chưa ưng ý. Nhật gọi ý của nhà toán học Gôn Bách (Gold Bach), Euler đã đưa ra cách giải chỉ đúng kiến thức đơn giản như sau:

Giả sử phương trình có nghiệm là \( x = m, y = n, z = a \) và a là số nhỏ nhất có thể có của \( Z \). Ta viết \( (4^m - 1) (4^n - 1) - 1 = 4a^2 \) (1)

Cộng hai vế với \( 4(4n - 1)^2 - 8a(4n - 1) \) được

\( (4k - 1) (4n - 1) - 1 = 4(a - 4n + 1)^2 \) (2)

trong đó \( k = m - 2a + 4n - 1 \).

So sánh (1) và (2) thấy phương trình đã cho cũng có nghiệm là \( z = |a - 4n + 1| \). Vì a là số nhỏ nhất nên \( a < |a - 4n + 1| \)

\[ \Rightarrow a^2 < (a - 4n + 1)^2 \]

Suy ra, vế trái của (1) nhỏ hơn vế trái của (2), từ đó rút ra \( 4n - 1 > 2a \)

Tương tự \( 4m - 1 > 2a \)

Đặt \( 4m - 1 = 2a + b, 4n - 1 = 2a + c \) thì b, c là các số tự nhiên. Như vậy:

\( (4m - 1) (4n - 1) = 4a^2 + 2a (b + c) + bc \) (3)

So sánh (3) và (1) thấy \( 2a(b + c) + bc = 1 \); vói lí vì a, b, c là các số tự nhiên. Tùy do suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 70. Tìm các số tự nhiên sao cho \( n^2 + 6n + 1989 \) là số chính phương.

GIÁI

Đặt \( n^2 + 6n + 1989 = k^2 \) thì số nguyên dương

80
\[ k > 40 \text{ do } k^2 > 1 + 6 + 1989 = 1996. \]

Ta có \((n^2 + 3)^2 - k^2 = -1980\)

hay \((n + 3 + k)(n + 3 - k) = -2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11.\)

Trong hai thửa số ở vế trái, tất nhiên \(n + 3 + k > 0\) còn \(n + 3 - k < 0\), hơ nên \(n + 3 + k > 44\) vì \(k > 40, n \geq 1.\)

Tổng \((n + 3 + k) + (n + 3 - k) = 2(n + 3)\) là số chẵn nên chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau:

\((n + 3 + k; n + 3 - k) = (990, -2), (330, -6), (198, -10), (110, -18), (90, -22), (66, -30)\) nên các giá trị \(n\) thỏa mãn đầu bài là 491, 159, 91, 43, 31, 15.

**Bài toán 71:** Tìm các số nguyên \(x\) để \(N = 8x^2 + 8x + 1\) là số chính phương.

**GIẢI**

Đặt \(N = y^2\) thì \(y\) là số nguyên. Cần tìm nghiệm nguyên của phương trình \(8x^2 + 8x + 1 - y^2 = 0.\)

Điều kiện cần để có \(x\) nguyên là \(\Delta' = 16 - 8(1 - y^2) = 8 + 8y^2 = k^2\) là số chính phương.

Nếu vậy \(k^2\) chia hết cho 8 nên \(k\) chia hết cho 4, đặt \(k = 4t\) với \(t\) nguyên suy ra \(8 + 8y^2 = 16t^2.\) Vậy \(y^2 - 2t^2 = -1.\) Đây là phương trình đối Pell với \(P = -2\) (xem chương II).

\[ x = \frac{-4 \pm 4t}{8} = \frac{-1 \pm t}{2} \]

nên điều kiện cần và đủ để \(x\) nguyên là \(t\) lẻ. Ta biết phương trình đối Pell \(y^2 - 2t^2 = -1\) có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất \(y_1 = t_1 = 1,\)
vậy \[ x_1 = \frac{-1 \pm 1}{2} = 0; -1 \]

Các nghiệm nguyên dương khác là \( x_k \), \( y_k \) được xác định từ đẳng thức

\[ y_k + t_k\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{2k-1}; \]

từ đó suy ra \( x_k \).

Thí dụ:

\( k = 2 \rightarrow y_2 + t_2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3 = 7 + 5\sqrt{2} \rightarrow t_2 = 5 \)

\[ x_2 = 2, -3. \]

\( k = 3 \rightarrow y_3 + t_3\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^5 = 41 + 29\sqrt{2} \Rightarrow t_3 = 29 \)

\[ x_3 = 14, -15. \]

\( k = 4 \rightarrow y_4 + t_4\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^7 = 239 + 169\sqrt{2} \rightarrow t_4 = 169 \)

\[ x_4 = 84, -85. \]

**Bài toán 72:** Chứng minh phương trình sau không có nghiệm nguyên dương:

\[ y^2 = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5)(x + 6)(x + 7) \]

Giải:

Cách 1: Ó vẻ phải, nhóm các cặp đầu và cuối được

\[ y^2 = (x^2 + 7x)(x^2 + 7x + 6) (x^2 + 7x + 10) (x^2 + 7x + 12) \]

\[ = m(m + 6) (m + 10)( m + 12) \]

\[ = (m^2 + 14m)^2 + 56m^2 + 720m \]

trong đó \( m = x^2 + 7x \) là số nguyên \( \geq 8. \)

Đặt \[ T_k = (m^2 +14m+k)^2 \] và xét hiệu

\[ y^2 - T_k = 2m^2 (28-k) + 4m(180 -7k) -k^2 \]

Ta sẽ chứng minh rằng, với mọi \( x \) nguyên dương, \( y^2 \) luôn nằm giữa hai số chính phương liên tiếp.

- Trường hợp 1: \( x = 1 \Rightarrow m = x^2 + 7x = 8 \Rightarrow \)
\[ y^2 - T_k = -k^2 - 352 k + 9344. \]

Vì \( y^2 - T_{24} = 20 > 0 \), nên \( y^2 > T_{24} = (m^2 + 14m + 24)^2 \)
\[ y^2 - T_{25} = -81 < 0 \) nên \( y^2 < T_{25} = (m^2 + 14m + 25)^2 \)

Nếu vậy \( T_{24} < y < T_{25} \) nên \( y^2 \) không phải là số chính phương.

-Trường hợp 2: \( x = 2; \) \( 3 \Rightarrow 18 < m < 30. \) Ta có \( (m^2 + 14m + 26)^2 = T_{26} < y^2 < T_{27} = (m^2 + 14m + 27)^2 \), do đó \( y^2 \) không chính phương.

-Trường hợp 3: \( x \geq 4 \Rightarrow m \geq 44. \) \( T_{27} < y^2 < T_{28}. \) Vậy \( y^2 \) không chính phương.

Từ đó có điều phải chứng minh.

Cách 2: \( y^2 = (x^2 + 7x)(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 10)x \times (x^2 + 7x + 12) \]
\[ = (M - 6) M (M + 4)(M + 6) \] trong đó \( M = x^2 + 7x + 6 > 0. \)

Nhận thấy \( y^2 \) là số chẵn và nó nằm giữa bình phương của hai số chẵn liên tiếp:

\[(M^2 + 2M - 22)^2 < y^2 < (M^2 + 2M - 20)^2 \]
\[\Leftrightarrow -4M^2 + 56M + 484 < 0 < 64M + 400 \]
Điều vô lí đã chứng minh bài toán.

Bài toán 73: Chứng minh rằng nếu các số nguyên dương \( a, b, c \) thỏa mãn đẳng thức
\[ 24 + (a + b - c)^2 = \]
\[ a^2 \cdot \frac{(a + b)(a + c)}{(a - b)(a - c)} + b^2 \cdot \frac{(b + c)(b + a)}{(b - c)(b - a)} + c^2 \cdot \frac{(c + a)(c + b)}{(c - a)(c - b)} \]
thì chúng tạo thành một cặp số nhân.
GIÁI

a, b, c phải đều một khác nhau. Về phái P có mẫu số chung B

\[ = (a - b)(b - c)(c - a) \text{ thì tự số} \]

\[ A = a^2(a + b)(a + c)(c - b) + b^2(b + c)(b + a)(a - c) + c^2(c + a)(c + b)(b - a) \]

Khi a = b thì A = 0 nên A chia hết cho (a - b). Vì trong A, vai trò của a, b, c như nhau nên

\[ A = (a - b)(b - c)(c - a) f(a, b, c) \]

Lại thấy A = 0 khi a + b + c = 0 nên

\[ f(a, b, c) = (a + b + c) g(a, b, c) \]

Vì A là hàm bậc năm nên g(a, b, c) là hàm bậc nhất và a, b, c bình đẳng nên g(a, b, c) = k(a + b + c).

Vậy A = k(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)^2

Hàng số k được xác định bằng cách cho a, b, c những giá trị tùy ý. Ta tính được k = 1.

Từ đó suy ra

\[ P = \frac{A}{B} = (a + b + c)^2 \]

Phương trình đã cho trở thành

\[ 24 = (a + b + c)^2 - (a + b - c)^2 = 2(a + b). 2c \]

hay \( (a + b)c = 6 \) \( ( = 6.1 = 3.2) \)

Do a, b nguyên dương khác nhau nên a + b ≥ 3 \( \Rightarrow a + b = 6; 3. \)

Nếu a + b = 3 thì c = 2. Một trong hai giá trị a hoặc b bằng 2, trùng với c, không thỏa mãn bài toán.
Nếu $a + b = 6$ thì $c = 1$, $a$ và $b$ chỉ có thể một số là 2, số kia là 4. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 74. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 - 38y = 23$$

GIẢI

Ta có $x^2 - 4 = 38y + 19 = 19(2y + 1)$

hay $(x + 2)(x - 2) = 19(2y + 1)$

Suy ra $x$ lẻ. Vì 19 là số nguyên tố nên hoặc $x + 2$, hoặc $x - 2$ phải chia hết cho 19.

Nếu $x + 2 = 19t$ (với $t$ nguyên dương lẻ) thì

$$x = 19t - 2 và y = \frac{x^2 - 23}{38} = \frac{(19t - 2)^2 - 23}{38} =$$

$$= \frac{19^2t^2 - 4.19t + 4 - 23}{38} = \frac{19t^2 - 4t - 1}{2}$$

Nếu $x - 2 = 19t$ (với $t$ nguyên dương lẻ) thì

$$x = 19t + 2 và y = \frac{19t^2 + 4t - 1}{2}$$

Bài toán 75. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình

$$7x^2 + 13y^2 = 1820$$

(Dề thi quốc gia chọn học sinh giỏi toán lớp 9
năm học 1993 - 1994)

GIẢI

- Nhận thấy 7 và 13 là các ước số của 1820 nên $x^2$ chia hết cho
13 → x chia hết cho 13, y² chia hết cho 7 → y chia hết cho 7. Vậy
x = 13u, y = 7v với u, v là các số nguyên.

Từ phương trình đã cho suy ra

\[13u^2 + 7v^2 = 20\]

Không thể có u = 0 hoặc v = 0, do đó 13u² ≥ 13, 7v² ≥ 7,
vi vậy 13u² + 7v² ≥ 20, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi \(u^2 = v^2\)
= 1. Từ đó suy ra bốn cặp nghiệm \((x, y) = (13, 7), (13, -7), (-13, 7), (-13, -7)\).

Bài toán 76: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

\[(4x - \frac{3}{2})^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = (x^2 + \frac{5}{2})^2\]

Giải

Ta có \(\frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + 5}{2} + 4x - \frac{3}{2} = (x^2 + \frac{5}{2} - 4x + \frac{3}{2})\)

nên \(y^2 = x^2(x^2 + 4x + 1)(x^2 - 4x + 4)\)

\(y^2 = x^2[(x + 2)^2 - 3](x - 2)^2\)

Điều kiện cần và đủ để y nguyên là x = 0 hoặc x = 2, hoặc
\((x + 2)^2 - 3 = k^2\) là một số chính phương (k nguyên dương).

Nhận thấy 3 = (x + 2 + k)(x + 2 - k)

Vẽ phải là tích của hai số nguyên cùng đầu.

Xét các trường hợp có thể xảy ra, chúng ta có thêm nghiệm
\(x = -4\).

Do đó các nghiệm phải tìm là \((x, y) = (0, 0), (2, 0), (-4, 24), (-4, -24)\).

Bài toán 77: Tìm nghiệm nguyên của phương trình
\[ y = \frac{2x^3 - x^2 + 3x + 7}{x^2 + 1} \]

\[ y = 2x - 1 + \frac{x + 8}{x^2 + 1} \]

Để \( y \) nguyên, với \( x \) nguyên thì điều kiện cần và đủ là \( x + 8 \) chia hết cho \( x^2 + 1 \).

Nếu \( x + 8 = 0 \) thì \( x = -8 \), \( y = -17 \) là một nghiệm của bài toán.

Nếu \( x + 8 \neq 0 \) thì điều kiện cần để \( x + 8 \) là bội của \( x^2 + 1 \) là \( |x + 8| \geq x^2 + 1 \).

\[ \Rightarrow (x + 8)^2 \geq (x^2 + 1)^2 \Rightarrow (x^2 + x + 9)(x^2 + x + 7) \geq 0 \]

\[ \Rightarrow -x^2 + x + 7 \geq 0 \Rightarrow -\frac{5}{2} < \frac{1-\sqrt{29}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{29}}{2} < \frac{7}{2} \]

Trong các số nguyên \( x = -2, -1, 0, 1, 2, 3 \) chỉ có \( x = 0 \) và \( x = 2 \) thỏa mãn bài toán. Vậy các nghiệm phải tìm là \((x, y) = (-8, -17), (0, 7), (2, 5)\).

\textbf{Bài toán 78}: Tìm nghiệm nguyên của phương trình \( xy^2 + 2y(x - 14045) + x = 0 \)

\textbf{Giải}

Nếu \( y = 0 \) thì \( x = 0 \).

Xét \( y \neq 0 \), phương trình có thể đưa về dạng

\[ \frac{x}{y} (y + 1)^2 = 28090. \]

Điều kiện cần để \( y + 1 \) là số nguyên là \( x/y \) là một số nguyên.
Khi đó \((y + 1)^2\) là ước số chính phương của 28090 = \(53^2.2.5\).

Vậy \((y + 1)^2\) chỉ có thể là 1 hoặc 53².

Nếu \((y + 1)^2 = 1\) thì \(y + 1 = ± 1 \Rightarrow y = -2\) (ta đang xét \(y \neq 0\)), suy ra \(x = -56180\).

Nếu \((y + 1)^2 = 53^2\) thì \(y + 1 = ± 53 \Rightarrow y = 52, -54\), suy ra \(x = \frac{53^2.10y}{53^2} = 10y = 520, -540\).

Các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là
\((x, y) = (0, 0), (-56180, -2), (520, 52), (-540, -54)\)

Bài toán 79: Tìm nghiệm nguyên của phương trình
\(y = \frac{13}{6}x^3 + \frac{51}{2}x^2 - \frac{5}{3}x\)

GIẢI

Vẽ phải \(P = 2x^3 + \frac{x^3}{6} + 25x^2 + \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{x}{3}\)

\[= 2x^3 + 25x^2 - 2x + \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{6}\]

\[= 2x^3 + 25x^2 - 2x + \frac{x(x + 1)(x + 2)}{6}\]

Để dàng chứng minh được tích ba số nguyên liên tiếp \(x(x + 1)(x + 2)\) chia hết cho 6. Vậy bài toán có nghiệm \(x\) nguyên bất kỳ,

\[y = 2x^3 + 25x^2 - 2x + \frac{x(x + 1)(x + 2)}{6}\]

Chúng ta có thể chứng minh được rằng:
- Điều kiện cần và đủ để \(f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\) nguyên với mọi \(x\) nguyên là \(6a, 2b, a + b + c,\) và \(d\) là các số nguyên.
- Điều kiện cần và đủ để $g(x) = ax^2 + bx + c$ nguyên với mọi $x$ nguyên là $2a$, $a + b$ và $c$ là những số nguyên.

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TÍ

Bài toán 80: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$z = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$$

GIẢI

Nhân hai vế với $y$ được

$$yz = \frac{x^2 y - xy + 2y}{xy + 1} = x - 1 + \frac{1 + 2y - x}{xy + 1}$$

Để $yz$ nguyên, khi $x$ nguyên thì điều kiện cần là hoặc $1 + 2y - x = 0$, hoặc $1 + 2y - x \geq xy + 1$

a) Nếu $1 + 2y - x = 0$ thì $yz = x - 1$. Suy ra $yz = 2y$ nên $z = 2$. Lúc này $y = t$ nguyên dương bất kỳ, $x = 1 + 2t$

b) Nếu $1 + 2y - x \geq xy + 1$ thì $2y \geq x(y + 1)$

hay $x \leq \frac{2y}{y + 1} = \frac{2y + 2 - 2}{y + 1} = 2 - \frac{2}{y + 1} < 2$

Vậy $x$ chỉ có thể là 1, khi đó $\frac{2}{y + 1} = 1$

nên $y = 1$, suy ra $z = 2$

Bài toán 81. Trên đồ thị của hàm số

$$y = \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}}$$

tìm những điểm có toa độ là các số nguyên.

GIẢI

Vi $x - 2\sqrt{x - 1} = x - 1 - 2\sqrt{x - 1} + 1 = (\sqrt{x - 1} - 1)^2$ và $x +$
\[8 - 6\sqrt{x - 1} = x - 1 - 6\sqrt{x - 1} + 9 = (\sqrt{x - 1} - 3)^2\]
nên
\[y = |\sqrt{x - 1} - 1| + |\sqrt{x - 1} - 3| = |X - 1| + |X - 3| \text{ với } X = \sqrt{x - 1} \geq 0\]

- Khi \(0 \leq X \leq 1\) thì \(y = 4 - 2X\). Để y nguyên thì \(X = 0; 1\).
Lúc đó \(y = 4; 2\) và các giá trị tương ứng \(x = 1; 2\).

- Khi \(1 \leq X \leq 3\) thì \(y \equiv 2\). Lúc đó \(1 \leq \sqrt{x - 1} \leq 3\)
\[1 \leq x - 1 \leq 9 \iff 2 \leq x \leq 10 \iff x = 2, 3, 4, ..., 10.

- Khi \(X \geq 3\) thì \(y = 2X - 4\). Đế y nguyên thì điều kiện cần và đủ là \(X = t\) nguyên \(\geq 3\). Lúc đó \(t = \sqrt{x - 1} \Rightarrow t^2 = x - 1 \Rightarrow x = 1 - t^2\), còn \(y = 2t - 4\).

Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm
\[(x, y) = (1, 4), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (7, 2), (8, 2),
(9, 2), (10, 2), (1 + t^2, 2t - 4)\] với \(t\) nguyên lớn hơn 2.

Bài toán 82. Tìm nghiệm nguyên của phương trình
\[x = \sqrt{x + y\sqrt{x} + y\sqrt{x + ... + y\sqrt{x + y\sqrt{(y + 1)x}}}}\] (1)

GIẢI

Phương trình có nghiệm \(x = 0\), \(y\) là số nguyên bất kỳ.
Nếu \(x > 0\), thì \(y + 1 \geq 0\), tức là \(y \geq -1\). Ta xét ba trường hợp:
x bằng, nhỏ hơn hoặc lớn hơn \(y + 1\).

\[\text{a) } x = y + 1 \rightarrow y = x - 1\]
Khi đó \(\sqrt{(y + 1)x} = x \Rightarrow \sqrt{x + y\sqrt{(y + 1)x}} = \sqrt{x + (x - 1)x} = x, ...\)

(1) được nghiệm đúng. Vậy (1) có nghiệm là \(y = t\) với \(t\) nguyên \(\geq -1\), \(x = t + 1\).
b) $0 < x < y + 1$.
Khi đó $x^2 < (y + 1)x$ nên $x < \sqrt{(y + 1)x}$, suy ra
$yx < y\sqrt{(y + 1)x}$, và $(y + 1)x < x + y\sqrt{(y + 1)x}$, do đó:
$\sqrt{(y + 1)x} < \sqrt{x + y\sqrt{(y + 1)x}}$.
Tóm lại là từ $x < y + 1$ ta có
$Vũ trái = x < \sqrt{(y + 1)x} < \sqrt{x + y\sqrt{(y + 1)x}}$

và, liên tiếp suy ra
$\sqrt{x + y\sqrt{(y + 1)x}} < \sqrt{x + y\sqrt{x + y\sqrt{(y + 1)x}}} < ... < \text{vé phải}$

c) Nếu $x > y + 1$ thì tương tự ta lại có:
$Vũ trái lớn hơn vé phải$.

Vậy phương trình chỉ có nghiệm $y = t, x = t + 1$, với $t$ nguyên $\geq -1$

Bài toán 83. Chứng minh ràng phương trình
$$\frac{z^2}{\sqrt{7 + x}} + \frac{1}{\sqrt{y - 3}} = 2 + 2|z| - \sqrt{7 + x} - \sqrt{y - 3}$$

có vô số nghiệm nguyên.

GIẢI

Điều kiện để biểu thức có nghĩa: $x > -7, y > 3$.

Phương trình có thể viết lại là
$$\frac{z^2}{\sqrt{7 + x}} + \sqrt{7 + x} + \frac{1}{\sqrt{y - 3}} + \sqrt{y - 3} = 2 + 2|z| \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi thì
$$\frac{z^2}{\sqrt{7 + x}} + \sqrt{7 + x} \geq 2|z| = 2|z| \quad (2)$$
và \[ \frac{1}{\sqrt{y-3}} + \sqrt{y-3} \geq 2 \] (3)

Đạng thức (1) xây ra khi và chỉ khi đồng thời xây ra dấu bằng ở (2) và (3), tức là
\[\begin{cases}
\frac{z^2}{\sqrt{7+x}} = \sqrt{7+x} \\
1 = \sqrt{y-3} 
\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}
7+x = z^2 \\
y-3 = 1 
\end{cases} \]
tức là khi \( y = 4, \ z = t \) nguyên khác 0 và \( x = t^2 - 7 \).
Vì có vô số \( t \) nên bài toán đã cho có vô số nghiệm.

Bài toán 84. Tìm các số nguyên dương \( 1 \leq x, y, z \leq 9 \) nghiệm đúng dạng thức
\[\sqrt{\underbrace{x...x}_{2n}} - \underbrace{y...y}_{n} = \underbrace{z...z}_{n} \]
với mọi số \( n \) tự nhiên.

GIÁI

Đạng thức đã cho có thể viết như sau:
\[ x. \frac{10^{2n} - 1}{9} - y. \frac{10^n - 1}{9} = z^2. \frac{(10^n - 1)^2}{9^2} \]
hay \( 9x(10^n + 1) - 9y = z^2(10^n - 1) \)
hay \( 10^n(9x - z^2) - (9y - 9x - z^2) = 0 \) (1)

Xem (1) là phương trình có ẩn là \( n \), còn \( x, y, z \) là các tham số. Nói nghiệm đúng với mọi \( n \) tự nhiên khi và chỉ khi có các hệ số \( 9x - z^2 = 0 \) và \( 9y - 9x - z^2 = 0 \). Ta có \( z^2 = 9x \), do đó \( z^2 \) chia hết
cho 9 nên z chia hết cho 3 suy ra z = 3; 6; 9 và các giá trị tương ứng x = 1; 4; 9, y = 2; 8; 16. Bài toán chỉ có hai nghiệm (x, y, z) = (1, 2, 3), (4, 8, 6).

Bài toán 85. Tìm nghiệm nguyên của phương trình
\[ x + \sqrt{20y - 18} = 2y + \sqrt{12x - 22} \]

GIẢI

Ta có \[ x - 2y = \sqrt{12x - 22} - \sqrt{20y - 18} \]. (1)

Với mọi x nguyên thì 12x - 22 không phải là số chính phương vì nó là số chẵn nhưng không chia hết cho 4. Vậy \(\sqrt{12x - 22}\) là số vô tính.

Do \(x - 2y\) là số hữu tỉ (hơn nữa: là số nguyên) nên (1) xảy ra khi và chỉ khi hai vế của (1) cùng bằng 0. Tức là \(x - 2y = 0\),
\[ \sqrt{12x - 22} - \sqrt{20y - 18} = 0 \]

Hệ phương trình \(x = 2y, 12x - 22 = 20y - 18\) cho ta nghiệm \(x = 2, y = 1\) thỏa mãn đầu bài.

§ 3. PHƯƠNG TRÌNH MỦ

Bài toán 86. Tìm các bộ ba x, y nguyên, p nguyên tố thỏa mãn đẳng thức \(p^x + 1 = y^2\)

GIẢI

\(p^x = y^2 - 1 = (y + 1)(y - 1)\) là số nguyên nên \(x = 0\). Voi mọi \(x\), ta có hai giá trị y trái dấu nên chỉ cần xét y nguyên dương. Vì \(p\) là số nguyên tố nên \((y + 1)\) và \((y - 1)\) là các lũy thừa của \(p\).
Đặt $y - 1 = p^k, y + 1 = p^{k+s}$ với $k, s$ là các số nguyên không âm.
Nhận thấy $2 = (y + 1) - (y - 1) = p^{k+s} - p^k = p^k(p^s - 1)$ ta suy ra $p = 2, k = 1, s = 1$.
Nư vậy $y = 1 + p^k = 1 + 2 = 3$ và $2^x = 3^2 - 1 = 8 \Rightarrow x = 3$.

Bài toán 87. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$2^x = 7y + z \quad (1)$$

GIẢI

Vẽ phái là số nguyên nên $x \geq 0$. $x$ chỉ có thể là $3k, 3k + 1, 3k + 2$ với $k$ nguyên không âm.

a) Xét $x = 3k$

Lúc này

$$2^x = 8^k \text{ mà } 8^k - 1 = (8 - 1)(8^{k-1} + 8^{k-2} + \ldots + 8 + 1) = 7m \quad (2)$$

với $m$ nguyên dương nên $2^x = 7m + 1$.

So sánh với (1) rút ra $7y + z = 7m + 1$.

Phương trình này nghiệm đúng với $y = t$ nguyên bất kỳ,

$$z = 7m + 1 - 7y = 8^k - 7t.$$ 

Vậy (1) có nghiệm là $x = 3k, y = t, z = 8^k - 7t \quad (*)$.

b) Xét $x = 3k + 1$.

Từ (2) suy ra $14m = 2(8^k - 1) = 2.2.2^{3k} - 2 = 2^{3(k+1)} - 2 = 2^x - 2$.

Ta có $14m + 2 = 2^x$. So sánh với (1) rút ra

$$7y + z = 14m + 2.$$ Phương trình này có nghiệm $y = t$ nguyên bất kỳ, $z = 14m + 2 - 7y = 2^x - 7y$

$$= 2^{3(k+1)} - 7t = 2.8^k - 7t$$

94
Vậy (1) có nghiệm \( x = 3k + 1, y = t, z = 2.8^k - 7t \) (**)

c) Xét \( x = 3k + 2 \)

Từ (2) suy ra \( 28m = 4(8^k - 1) = 2^{3k+2} - 4 = 2^x - 4 \).

Nên vậy \( 2^x = 28m + 4. \) Nhưng \( 2^x = 7y + z \) nên \( 7y + z = 28m + 4. \) Phương trình nghiệm đúng với \( y = t \) nguyên bất kỳ và \( z = 28m + 4 - 7y = 2^{3k+2} - 7t. \)

Vậy (1) có nghiệm \( x = 3k + 2, y = t, z = 4.8^k - 7t \) (***)

Tóm lại, phương trình đã cho có các nghiệm (*) (**) (***) với k nguyên không âm, t nguyên.

Bài toán 88. Tìm các bộ nghiệm \((x,y,z)\) nguyên của phương trình

\[ x^2 + y^2 = 11z. \]

GIẢI

Vì về trái là số nguyên nên \( z \geq 0. \)

Nhận thấy các số \((11t + a)^2\) với t nguyên, \( a = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 5 \) khi chia cho 11 có các số dư \( a^2 \) là:

\(0,1,4,9,16,25\)

Trong số đó, tổng của hai số bất kỳ không chia hết cho 11.

Nên vậy, điều kiện cần để bài toán có nghiệm là \( x = 11x_1,\)

\( y = 11y_1 \) với \( x_1, y_1 \) là các số nguyên. Khi đó \( (11x_1)^2 + (11y_1)^2 = 11^2 \), nên

\[ x^2_1 + y^2_1 = 11^{z-2} \]

Lại thấy \( x_1 \) và \( y_1 \) là bội của 11 nên cuối cùng ta có:

\[ x^2_m + y^2_m = 11^2 - 2m \]

95
mà $z - 2m$ bằng 0 hoặc 1, (m là số nguyên) còn $x = 11^m, x_m, y = 11^m, y_m$.
- Nếu $z - 2m = 1$, tức $z$ lẻ thì $x_m^2 + y_m^2 = 11$ vô nghiệm.
- Nếu $z - 2m = 0$ tức $z$ chẵn ($z = 2m$) thì phương trình $x_m^2 + y_m^2 = 1$. Do đó, trong hai số $x_m, y_m$ thì một số bằng 0, số kia có trị tuyệt đối bằng 1. Vậy các bộ nghiệm $(x, y, z) = (0, \pm 11^m, 2m), (\pm 11^m, 0, 2m)$ với m nguyên không âm.

Ta có thể mở rộng bài toán bằng cách thay số 11 bằng số nguyên tô le p có tính chất là: Trong dầy $0, 1, 4, 9, 16, \ldots, \left(\frac{p - 1}{2}\right)^2$
tổng hai số bát kỳ không chia hết cho p.

Bài toán 89. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $3^x + 171 = y^2$.
đặt \( x = 2k + 1 \) với \( k \) nguyên dương, ta có
\[
\begin{align*}
z^2 &= 3^{x-2} + 19 = 3^{2k-1} - 1 + 20 \\
&= 20 + (3 - 1)(3^{2k-2} + 3^{2k-3} + \ldots + 3 + 1) \\
&= 20 + 2(2m + 1)
\end{align*}
\]
Nhận thấy với mọi \( k \) thì \( z \) không phải là số chính phương vì nó là số chẵn nhưng không chia hết cho 4.

Tóm lại, bài toán có một nghiệm \( x = 6, y = 30 \)

Bài toán 90. Tìm nghiệm nguyên của phương trình
\[
10^x - 1 = 7y.
\]

GIẢI

Vi \( 10^x = 1 + 7y \) là số nguyên nên \( x \geq 0 \). Nhận thấy
\[
x = 0, y = 0 \) thỏa mãn đầu bài.
\]
Xét \( x > 0 \). Ta có \( 10^x - 1 = \underbrace{9 \ldots 9}_x \)
nên bằng cách lấy \( \underbrace{9 \ldots 9}_x \) chia cho 7 ta thấy :

số dương \( x \) nhỏ nhất thỏa mãn đầu bài là
\[
x = 6 \) (khi đó \( y = 142857 \)). Tức là \( A = 999999 : 7 \)
\]
Nhu vậy các số \( \overline{A \ldots A} \) chia hết cho 7 (và chỉ có các số đó).

Bài toán có nghiệm \( y = \overline{BB \ldots B} \), trong đó \( B = 142857, x = 6n \)
với \( n \) nguyên, không âm.

Cũng có thể giải theo cách sau đây:
Ta có $x = 0, y = 0$ là một nghiệm. Nhận thấy số $x = 6$ là số dương nhỏ nhất nghiệm đúng bài toán

$$10^6 - 1 \quad 999999$$

(khi $y = \frac{10^6 - 1}{7} = 142857$), tức là $(10^6 - 1) \div 7$.

Nhu vậy $(10^6 - 1) \div 7$ vì $10^6 - 1 = (10^6)^n - 1 = (10^6 - 1)$. M với M nguyên dương. Số nguyên dương $x$ có thể viết dưới dạng $x = 6n + a$.

Ta cần tìm một nghiệm đúng bài toán.

Tất nhiên $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Có thể viết $7y = 10^x - 1 = 10^{6n+a} - 1 = 10^a (10^{6n} - 1) + (10^a - 1)$

Đăng thức xảy ra khi và chỉ khi $(10^a - 1)$ chia hết cho 7.

Nhưng chúng ta đã biết, trong các giá trị $a = 0, 1, 2, ..., 6$ chỉ có $a = 0$ thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm $x = 6n, y = \frac{10^{6n} - 1}{7}$ với $n$ nguyên không âm.

Bài toán 91. Tìm các số $a_i$ thỏa mãn đúng thức

$$T = a_1a_2a_3 \ldots a_n = 8. a_2a_3 \ldots a_na_1$$

GIẢI

Tất nhiên $a_i$ là các số nguyên (có thể giống nhau) từ 0 tới 9.

Để thấy rằng $a_2 = 1$ còn $a_1 = 8$ hoặc 9.

a) Xét $a_1 = 8$, ta có phép nhân

$$1a_3a_4\ldots a_{n-1}a_n8 \quad \times \quad 8$$

$$8 \quad 1a_3\ldots a_{n-1}a_n$$

98
Thực hiện phép tính trên, đầu tiên tìm ra \( a_n = 4 \). Thay 4 vào \( a_n \) ở số bị nhân, tìm ra \( a_{n-1} = 8 \).

Cú tiếp tục làm phép tính cho đến khi con số ở số bị nhân là số 1, và số ở kết quả là số 8. Khi đó ta được kết quả của phép tính nhân là: \( A = 8101265822784 \).

Cũng có thể thực hiện phép tính chia

\[
\begin{array}{c|c}
8 & 8 \\
\hline
a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n & (a_2 a_3 a_4 \ldots a_n 8) \\
\end{array}
\]

\( 8 : 8 = 1 \), vậy \( a_2 = 1 \). Thay 1 vào \( a_2 \) ở số bị chia, … cho tới khi ở thường xuất hiện số 8, và đồng thời số dư bằng 0 thì được.

b) Xét \( a_1 = 9 \). Thực hiện phép tính tương tự như trên, chằng hạn phép nhân

\[
\begin{array}{c|c}
1 & 8 \\
\hline
a_3 a_4 \ldots a_n 9 & 91a_3 \ldots a_n \\
\end{array}
\]

sẽ được kết quả

\( B = 9113924050632 \).

Nếu các phép tính trên được tiếp tục thực hiện thì ở kết quả ta lại thu được các con số lặp lại đúng các con số ở chữ ký A hoặc B. Do đó, các số T thỏa mãn đầu bài là

\( T_1 = \underbrace{A \ldots A}_{t} \) và \( T_2 = \underbrace{B \ldots B}_{t} \) với \( t = 1, 2, 3, \ldots \)

Bài toán 92. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

\[ 3x^{2y^2+1} + 2x^{2(y^2+1)} + x^{2y^2+3} - 4x^{2(y^2+2)} + x^{2y^2+5} + 10 = 0 \]
GIẢI

Việt lại dưới dạng:

\[ x^{2y^2} (3x + 2x^2 + x^3 - 4x^4 + x^5) = -10 \] (1) và gọi biểu thức trong ngoặc là \( f(x) \).

Vi \( x^{2y^2} = (x^{2y^2})^2 = (x^y)^2 \) là bình phương của số nguyên \( x^y \), nên nó là số nguyên và đồng thời do (1), nó là ước số chính phương của 10. Vi các ước số nguyên của ±10 là ±10, ±5, ±2, ±1 nên (\( x^y \))^2 = 1 → \( x^y = ±1 \)

- Nếu \( x^y = -1 \) thì \( x = -1 \), \( Y \) là tùy ý. Lúc đó \( f(-1) = -7 \) nên về trái của (1) bằng \( 7 \neq -10 \).

- Nếu \( x^y = 1 \) thì: hoặc \( x = 1 \), \( Y = y^2 \) nguyên không âm bất kỳ, hoặc \( x \) nguyên tùy ý, còn \( Y = y^2 = 0 \).

Trường hợp \( x = 1 \) không xảy ra vì \( f(1) = 3 \), về trái của (1) là \( 3 \neq -10 \).

Trường hợp \( y = 0 \), lúc đó \( f(x) = -10 \). Rõ ràng là \( x \neq 0 \).

a) Xét \( x \) nguyên âm. Ta đã biết \( f(-1) = -7 \).

Khi \( x \leq -2 \) thì \( f(x) = 3x + x^3 + x^5 - 2x^2(2x^2 - 1) < -10 \)

Vi \( 2x^2(2x^2 - 1) \geq 8 \). \( 7 = 56 \) và \( 3x + x^3 + x^5 < 0 \)

Vậy phương trình không có nghiệm \( x \) nguyên âm.

b) Xét \( x \) nguyên dương. Ta đã biết \( f(1) = 3 \).

Nhận thấy \( f(2) = -10 \) thỏa mãn đầu bài.

Đo là giá trị duy nhất \( vi \ f(3) = -27 \) và khi \( x \geq 4 \) thì

\[ f(x') = 3x + 2x^2 + x^3 + x^4(x - 4) > 0 > -10. \]

Tóm lại phương trình đã cho có một nghiệm \( x = 2, y = 0 \).
(Chúng ta cũng có thể tìm được nghiệm nguyên của phương trình \( f(x) = -10 \) bằng các cách khác).

Bài toán 93. Tồn tại hay không nghiệm nguyên của phương trình \( 31^{2x} + 12^{2x} + 1979^{2x} = y^2 \)

GIAI

Nhận thấy 31, 12 và 1979 đối một nguyên tố cùng nhau nên không thể có nghiệm \( x < 0 \).

Nếu \( x = 0 \) thì \( y^2 = 3 \) nên \( y \) không nguyên.

Xét \( x > 0 \). Khi đó vẽ trái là tổng của các số nguyên chính phương. Tù dằng thức

\[
(3t + a)^2 = 9t^2 + 6at + a^2
\]

với \( t \) nguyên, \( a = 0, \pm 1 \), nhận thấy:

- Bình phương của một số chia hết cho 3 thì chia hết cho 3.
- Bình phương của một số không chia hết cho 3 thì khi chia cho 3 sẽ dư 1. Suy ra số chính phương không có dạng \( 3k + 2 \).

Ta có \( 12^{2x} \) chia hết cho 3, \( 31^{2x} \) chia 3 dư 1, \( 1979^{2x} \) chia 3 dư 1. Vẽ trái của phương trình đã cho có dạng \( 3k + 2 \) với mọi \( x \) nguyên dương nên không thể là số chính phương \( y^2 \). Vậy bài toán vô nghiệm.

Bài toán 94. Kí hiệu \( n! = 1.2....n \)

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

\[ 10 + 11^x + 6^x = (\sqrt{3})^y \]

GIAI

Vì \( x \geq 1 \) nên \( 11^x \) tận cùng là 1 và \( 6^x \) tận cùng là 6, do đó vẽ trái tận cùng là 7.
Vẽ phải \((\sqrt{3})^{y!} = 3^{1.2.3.4.5...y/2} = 3^{3.4.5...y}\)

sẽ tận cùng là 1 nếu \(y \geq 4\), vì khi đó
\[(3^4)^{3.5...y} = (81)^{3.5...y}\]

Nên vậy, điều kiện cần để bài toán có nghiệm là \(y \leq 3\).

- Xét \(y = 1\):
  \[10 + 11^x + 6^x = \sqrt{3}\]

Không có \(x\) nguyên dương thỏa mãn đẳng thức này vì vẽ phải là số vô ti, vẽ trái là số hữu ti.

- Xét \(y = 2\):
  \[10 + 11^x + 6^x = (\sqrt{3})^2 = 9\]

Không có \(x\) nguyên dương vì vẽ phải không có tận cùng là 7 (cũng có thể thấy rằng \(10 + 11^x + 6^x > 9 > \sqrt{3}\) với mọi \(x\)).

- Xét \(y = 3\):
  \[10 + 11^x + 6^x = (\sqrt{3})^{2.3} = 27\]
  \[11^x + 6^x = 17 \Rightarrow x = 1\.

Bài toán có nghiệm duy nhất \(x = 1, y = 3\).

**Bài toán 95.** Chung minh rằng không tồn tại một số tự nhiên \(m\) sao cho \(1978^m - 1\) chia hết cho \(1000^m - 1\).

(Thi vở dịch Liên Xô lần thứ 12 - năm 1978)

**GIẢI**

Xét phân thức
\[x = \frac{1978^m - 1}{1000^m - 1}\]

Ta suy ra \(x - 1 = \frac{1978^m - 1000^m}{1000^m - 1} = \frac{2^m(989^m - 500^m)}{1000^m - 1}\)

Nhan thấy \(1000^m - 1\) là số lẻ, \(2^m\) là số chẵn, \(989^m - 500^m < 102\)
$1000^m - 1$ với mọi $m$ tự nhiên, nên $x - 1$ không thể là số nguyên.
Vậy $x$ không phải là số nguyên, bài toán được chứng minh.

§ 4. PHƯƠNG TRÌNH BẠC BA

Bài toán 96:

1) Phân tích ra thừa số:
   \[ A = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz. \]

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình
   \[ x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz. \quad (1) \]

GIẢI:

1) Nhận thấy khi $x + y + z = 0$, tức là khi $x + y = -z$
   thì \[ A = x^3 + y^3 - [x^3 + y^3 + 3xy(x + y)] + 3xy(x + y) = 0 \]
   Vậy $A : (x + y + z)$. Thực hiện phép chia $A$ cho
   $(x + y + z)$ được $A = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
   \[ = \frac{1}{2} (x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \]

2) Phương trình (1) tương đương với

   \[ A = 0 \iff \begin{cases} \text{hoặc} & x = y = z \\ \text{hoặc} & x + y + z = 0. \end{cases} \]

Do đó (1) có nghiệm là:

\[ \begin{cases} x = y = z = t \\ \text{hoặc} x = u, y = v, z = -(u + v) \end{cases} \]

với $t, u, v$ nguyên bất kỳ.

Bài toán 97. Tìm nghiệm nguyên của phương trình
\[ x^3 - y^3 = 6xy + 8. \]

GIẢI

Đây là bài toán 96 phần 2)', mà \( x, y, z \) lần lượt được thay bằng \( x, -y, -2 \) nên có nghiệm là \( x = -y = -2 \rightarrow x = -2, y = 2 \) hoặc \( x - y - 2 = 0 \rightarrow x = y + 2 \rightarrow y = t \) nguyên, \( x = t + 2 \).

Bài toán 98. Tim các nghiệm nguyên của phương trình
\[ x^3 + y^3 + z^3 - xyz = x(y - z)^2 + z(x - y)^2 + y(z - x)^2 \]
thỏa mãn điều kiện
\[
\max (x, y, z) < x + y + z - \max (x, y, z) (*)
\]

GIẢI

Áp dụng hằng đẳng thức ở câu 1) bài toán 96 ta có
\[ x^3 + y^3 + z^3 - xyz = \]
\[ = \frac{1}{2} (x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \quad (1) \]

Nhưng từ điều kiện (*) ta có:
\[ \frac{1}{2} (x + y + z) > x, y, z \]
suy ra
\[ \frac{1}{2} (x + y + z)(x - y)^2 \geq z(x - y)^2 \quad (2) \]
\[ \frac{1}{2} (x + y + z)(y - z)^2 \geq x(y - z)^2 \quad (3) \]
\[ \frac{1}{2} (x + y + z)(z - x)^2 \geq y(z - x)^2 \quad (4) \]
Từ (1), (2), (3), (4) ta có
\[ x^3 + y^3 + z^3 - xyz \geq z(x - y)^2 + x(y - z)^2 + y(z - x)^2 \quad (5) \]
Đầu bằng ở (5) xảy ra khi và chỉ khi đồng thời có đầu bằng

104
ô (2), (3), (4). Vậy phương trình đã cho nghiệm đúng với \( x = y = z = t \) nguyên bất kỳ.

Bài toán 99. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

\[
8x^3 + 12x^2 + 6x + 2 = y^2
\]

GÍÁI

\[
y^2 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 + 1 = (2x + 1)^3 + 1
\]

\[
\Rightarrow (2x + 1)^3 = (1 + y)(y - 1)
\]

Do vậy trái là số lẻ nên \( 1 + y \) và \( y - 1 \) là các số lẻ. Hơn nữa chúng là các số lẻ liên tiếp nên nguyên tố cùng nhau. Bởi vậy có thể viết \( 1 + y = a^3 \) và \( y - 1 = b^3 \) với \( a, b \) là hai số lẻ liên tiếp.

Lúc đó \( 2 = (1 + y) - (y - 1) = a^3 - b^3 \). Trong đây lập phương của các số nguyên:

\[
\ldots -27, -8, -1, 0, 1, 8, 27, \ldots
\]

Hiểu lập phương của hai số lẻ liên tiếp bằng 2 khi và chỉ khi \( a^3 = 1, b^3 = -1 \). Ta suy ra \( y = 1 + b^3 = 0, (2x + 1)^3 = -1 \) nên \( x = -1 \). Vậy \( x = -1, y = 0 \) là nghiệm duy nhất của bài toán.

Bài toán 100. Chung minh phương trình

\[
x^3 - 6x^2 y + 8xy^2 - 2xy + 7x + 3 = 0
\]

không có nghiệm nguyên.

GÍÁI

Đặt vế trái là \( f(x) \), xem đó là hàm số của \( x \), còn \( y \) là tham số nguyên. Giả sử phương trình có nghiệm nguyên là \( x = t \). Thế thì \( f(x) = (x - t)g(x) \) với \( g(x) \) là số nguyên vi có các hệ số nguyên.

Nhận thấy \( f(0) = 3 \) là số lẻ. Mà \( f(0) = -t.g(0) \) nên \( t \) là số lẻ.

Mặt khác \( f(1) = 1 - 6y^2 + 8y^2 - 2y + 7 + 3 \) là số lẻ mà \( f(1) \)
\[
(1 - t)g(1) \text{ nên } 1 - t \leq 1, \text{suy ra } t \text{ là số chẵn.}
\]
Số \(t\) không thể tồn tại. Bài toán được chứng minh.

**Bài toán 101:** Phương trình

\[
x^3 + 3x^2 - 6x + 12 = 2(3xy + 1000) \]

có nghiệm nguyên hay không?

**GIÁI**

Vẽ trái của phương trình có thể viết lại là:

\[
x^3 + 3x^2 + 2x - 6x + 12 = 12 - 6x + x(x^2 + 3x + 2) = 12 - 6x + x(x + 1)(x + 2).
\]

Vì \(x(x + 1)(x + 2)\) là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6 (trong ba số nguyên liên tiếp ít nhất một số chẵn và một số chia hết cho 3 mà 2 và 3 nguyên tố cùng nhau).

Phương trình đã cho vô nghiệm vì với mọi \(x, y\) nguyên về trái chia hết cho 6 còn về phải không chia hết cho 6.

**Bài toán 102:** Tìm nghiệm nguyên của phương trình

\[
4x + 1 = y^3 + 8y
\]

**GIÁI**

Ta có \(4(x - 2y) = y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1)\)

Nhận thấy \(y^2 + y + 1 = y(y + 1) + 1\) là số lẻ nên để \(x - 2y\)
là số nguyên, điều kiện cần và đủ là \(y - 1 = 4t\) với \(t\) nguyên. Vậy \(y = 4t + 1\).

Lúc đó \(4x = y^3 + 8y - 1 = (4t + 1)^3 + 8(4t + 1) - 1 = 16t^3 + 12t^2 + 11t + 2\).

**Bài toán 103.** Giải phương trình sau với nghiệm nguyên:
\[ x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1) \]

\((Thi
vở
do
đich
Ba
Lan
-1981)\)

**GIẢI**

Nhận thấy \(x\) và \(y\) phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Nếu \(x = y\) thì phương trình trở thành

\[ x^3 - 6x^2 - 2 = 0 \]

Nghĩa là nghiệm nguyên của nó (nếu có) phải là \(±1, ±2\) (uộc số nguyên của \(-2\)). Nhưng không giải trĩu nào nghiệm đúng.

Vậy \(x \neq y\).

Do \(x, y\) cùng tính chẵn, lẻ nên \(|x - y| ≥ 2\) suy ra

\((x - y)^2 ≥ 4, \text{vây } x^2 + y^2 ≥ 4 + 2xy.\)

Ta có \(x^2 + y^2 ≥ |2 + 2xy|\) (1), bởi vì

\[ x^2 + y^2 ≥ 4 + 2xy > |2 + 2xy| \text{ nếu } 2 + 2xy ≥ 0 \]

\[ x^2 + y^2 > |2 + 2xy| = -2 - 2xy (x - y)^2 \iff (x + y)^2 > -2 \]

nếu \(|2 + 2xy| ≤ 2\).

Phương trình đã cho tương đương với

\((x^2 + y^2)(x + y) = 8(x^2 + y^2) + 8(xy + 1) \iff \)

\((x^2 + y^2)(x + y - 8) = 8xy + 8 \) (2)

Ta có phương trình hệ quả:

\[ |x^2 + y^2| \cdot |x + y - 8| = 4|2xy + 2| \]

Do (1) nên \(|x + y - 8| < 4\)

\[ \Rightarrow 4 < x + y < 12 \]

Vì \(x + y\) là số chẵn nên nó chỉ có thể là \(6, 8\) hoặc \(10\). Với \(x + y\) bằng \(6\) hay \(8\) thì (2) không có nghiệm nguyên.
Khi \( x + y = 10 \): thay vào (2) được \( xy = 14 \). Vậy \( x \) và \( y \) là hai nghiệm của phương trình

\[
 z^2 - 10z + 16 = 0
\]

Giải được \( z_{1,2} = 2; 8 \) suy ra \( (x, y) = (2, 8); (8, 2) \).

\[\text{§ 5. PHƯƠNG TRÌNH BẠC 4}\]

\[\text{BÀI TOÁN 104. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình } xy + xz + yz = 10(x + y + z) \quad (1)\]

**GIÁI**

Xét nghiệm nguyên dương của phương trình

\[ xyz = t(x + y + z) \quad (1') \]

Vì \( x, y, z \) bình diện nên có thể giải thiết

\[ x \geq y \geq z > 0 \quad (2) \]

(1') suy ra \( xyz = tx + t(y + z) \) hay

\[ x \ (yz - t) = t \ (y + z) \quad (3) \]

Vì vế phải của (3) là số dương và \( x > 0 \) nên \( yz - t > 0 \) hay \( y > tz \). (4)

\[ t \ (y + z) \]

\[ \frac{yz - t}{} \]

\[ t \ (y + z) \geq yz^2 - tz \ nèn \ y(z^2 - t) \leq 2tz \quad (6) \]

- Nếu \( z^2 - t \leq 0 \), tức \( z^2 < t \) thì (6) đúng

- Nếu \( z^2 - t > 0 \) thì (6) \( \iff y \leq \frac{2tz}{z^2 - t} \quad (7) \)

suy ra \( z \leq \frac{2tz}{z^2 - t} \) hay \( 1 \leq \frac{2t}{z^2 - t} \) hay \( z \leq \sqrt{3t} \quad (8) \)

Từ (5) và do \( x \geq y \) ta có \( zy^2 - 2ty - tz \leq 0 \)
nên suy ra \( y \leq \frac{t + \sqrt{t^2 + tz^2}}{z} \) hay \( yz \leq t + \sqrt{t^2 + tz^2} \)

Do (8) nên \( yz \leq t + 2t = 3t \) (9)

Lần lượt đưa vào (8), (9), (4), (2), (5) ta tìm được nghiệm của (1')

Chằng hạn, với \( t = 10 \) ta có phương trình đầu bài.

Khi đó \( z \leq \sqrt{30} \Rightarrow z \leq 5 \)

- Với \( z = 5 \Rightarrow 5 = z \leq \frac{3t}{z} = \frac{30}{5} = 6 \Rightarrow y = 5; 6 \)

nhưng \( x \) không nguyên

- Với \( z = 4 \Rightarrow 4 = z \leq \frac{30}{4} \Rightarrow y = 4, 5, 6, 7. \) Chỉ có \( x \) nguyên
(bảng 9) khi \( y = 5 \).

- Với \( z = 3 \Rightarrow \frac{10}{3} = \frac{t}{z} \leq \frac{30}{3} = 10 \Rightarrow y = 4, 5, ..., 10. \) Có nghiệm

\( (x, y) = (35, 4), (16, 5) \)

- Với \( z = 2 \Rightarrow \frac{10}{2} = \frac{t}{z} \leq \frac{30}{2} = 15 \Rightarrow y = 6, 7, 8, ..., 15 \)

Có nghiệm \( (x, y) = (40, 6), (12, 10) \).

- Voi \( z = 1 \Rightarrow 10 = \frac{t}{z} \leq 30 \Rightarrow y = 11, 12, ..., 30 \)

Lực này \( x = \frac{10(y + 1)}{y - 10} = \frac{10y + 10 - 100 + 100}{y - 10} = 10 + \frac{110}{y - 10} \)

\( \Rightarrow y - 10 = 110, 11, 10, 2, 5, 1, 22, 55 \Rightarrow \)

\( y = 120, 21, 20, 12, 15, 11, 32, 65. \) Chỉ xét các giá trị \( y \) trong khoảng \( 11 \) tới \( 30 \), chúng ta có bốn nghiệm \( (x, y) = (21, 20), (65, 12), (32, 15), (120, 11) \)

Tất cả các nghiệm của (1) là những nghiệm đã tìm được mà trong mỗi bộ nghiệm thì \( x, y, z \) lấy những giá trị tùy \( y \).
Bài toán 105: Tìm nghiệm nguyên của phương trình
\[x^2 + y^2 + z^2 = xyzt \ (1)\]

GIẢI

Nếu một trong các thừa số ở vế phải bằng 0 thì vế trái bằng 0, nên \(x = y = z = 0, t\) nguyên bất kỳ là nghiệm của (1).

Xét \(x, y, z, t \neq 0\). Điều kiện cần để có (1) là số giá trị âm trong mỗi bộ nghiệm phải là 4, 2 hoặc 0. Nếu (1) có nghiệm âm \(-x_0, -y_0, -z_0, -t_0\) thì nó cùng có nghiệm \(x_0, y_0, z_0, t_0\). Hoặc nếu có nghiệm \(x_0, y_0, z_0, t_0\) hay \(x_0, -y_0, -z_0, t_0\) ... thì nó cùng có nghiệm \(x_0, y_0, z_0, t_0\). Vì vậy chúng ta chỉ cần tìm nghiệm của (1) trong tập hợp số nguyên dương rồi suy ra tất cả (bằng cách cho hai hoặc cả bốn giá trị trong mỗi bộ nghiệm đối đầu).

Giả sử \(x, y, z, t\) nguyên dương nghiệm đúng (1), ta có thể xem \(x\) như nghiệm của phương trình bậc hai
\[X^2 - yztX + y^2 + z^2 = 0 \ (2)\]
Như vậy \(X = \frac{yzt \pm \sqrt{\Delta}}{2}\) với \(\Delta = (yzt)^2 - 4(y^2 + z^2) \geq 0\)
\((k\ nguyễn\ không\ âm)\).

Thành thử, ứng với mỗi bộ \(y, z, t\), có định ta có hai giá trị \(x\) thỏa mãn đầu bài là \(x\) và \(x'\) mà
\[x = \frac{yzt - k}{2} \quad x' = \frac{yzt + k}{2} \quad (3)\]

Điều đó cũng xảy ra tương tự đối với \(y\) hay \(z\).
Tuy nhiên, không thể đồng thời có \(x^2, y^2, z^2 \geq xyzt/2\), vì lúc đó về trái của (1) không nhỏ hơn \(\frac{3}{2} xyzt\). 

110
Nhưng tồn tại \( x^2, y^2, z^2 \leq \frac{xyzt}{2} \), chặn hạn như \( x = y = z = 1, t = 3 \).

Xét một bộ \( x, y, z \) như vậy (\( x \leq \frac{yzt}{2}, y \leq \frac{xzt}{2}, z \leq \frac{xyt}{2} \)). Khỏng mặt tính tổng quát, giả sử \( x \geq y \geq z > 0 \).

(1) có thể viết lại là
\[
x^2 + y^2 + z^2 - 2x \cdot \frac{yzt}{2} + \left( \frac{yzt}{2} \right)^2 = \left( \frac{yzt}{2} \right)^2
\]
hay
\[
y^2 + z^2 + \left( \frac{yzt}{2} - x \right)^2 = \left( \frac{yzt}{2} \right)^2 \tag{4}
\]
Từ (4) suy ra \( y^2 + z^2 + \left( \frac{yzt}{2} - y \right)^2 \geq 0 \) \( \Rightarrow \left( \frac{yzt}{2} \right)^2 \tag{5} \)

bởi vì \( \frac{yzt}{2} - y \geq 0 \Rightarrow \frac{yzt}{2} - x \geq 0 \Rightarrow (y \leq x) \).

Khi đó \( y^2 + z^2 + \left( \frac{yzt}{2} \right)^2 + y^2 - y^2zt \geq \left( \frac{yzt}{2} \right)^2 \) nên
\[
2y^2 + z^2 \geq y^2zt, suy ra 3y^2 \geq y^2zt (vì y \geq z > 0).
\]
Vậy \( 3 \geq zt \Rightarrow t = 1, 2, 3 \).

a) Khi \( t = 2 \) thì \( zt = 2 \) nên (1) trở thành
\[
x^2 + y^2 + 1 = 2xy \rightarrow (x - y)^2 = -1, vô lí. Trường hợp này không xảy ra.
\]

b) Xét \( t = 3 \):

Do vâí trở x, y, z là như nhau, chúng ta sẽ đi tìm toàn bộ các nghiệm nguyên dương mà không cần phân biệt giá trị nào là x, y, z.

Từ nhân xét (3), nếu x, y, z (không cần theo thứ tự) là a, b, c thì ta sẽ có nghiệm khác (a', b, c) mà a' = 3bc - a. Sự đó tim
nghiệm như sau:

\[(1,1,1) \rightarrow (1,1,3.1.1 \cdot -1 = 2) \rightarrow \]
\[5.2.3.5.2 \cdot -1 = 29 \rightarrow \]
\[29.2.3.29. \cdot 2 - 5 = 169 \rightarrow \]
\[29.5.3.2.9.5 - 2 = 433 \rightarrow \ldots \]
\[\rightarrow (2,1.3.2.1 - 1 = 5) \rightarrow \]
\[5.1.3.5.1 \cdot -2 = 13 \rightarrow \]
\[13.5.3.13.5 - 1 = 194 \rightarrow \ldots \]
\[13.1.3.13.1 \cdot -5 = 34 \rightarrow \ldots \]

c) Xét \( t = 1 \):

Nhận thấy có một số hạng giữa nghiệm có \( t = 3 \) và \( t = 1 \). Nếu \((x, y, z, 3)\) là một nghiệm, tức là \( x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \) thì \((3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 = 1(3x)(3y)(3z)\) nên \((3x,3y,3z,1)\) cũng là nghiệm.

Mặt khác, với \( t = 1 \) thì nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là \( x = y = z = 3 \). Lại có định hai số, số còn lại được thay bằng \( a' = bc - a' = 3.3 - 3 = 6 \) thì dễ thấy rằng \( x, y, z \) là bội của 3. Suy ra nếu \((3x, 3y, 3z, 1)\) là nghiệm, tức là \((3x)^2 + (3y)^2 + (3z)^2 = 1(3x)(3y)(3z)\) hay \(3^2(x^2 + y^2 + z^2) = 27xyz\) hay \(x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\) thì \((x, y, z, 3)\) cũng là nghiệm.

Tóm lại, từ các nghiệm \((x,y,z,t) = (x_0, y_0, z_0, 3)\) ta có nghiệm \((3x_0, 3y_0, 3z_0, 1)\) cũng với các hoàn vị và đối đầu hai hoặc cả bốn giá trị \(x, y, z, t\) ta được mọi nghiệm không tần thường của (1) trong tập hợp số nguyên.

**Bài toán 106.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình

\[(x^2 + y^2)^2 = 8x^2 y^2 + 4xy + 1\]

**GIÁI**

Nếu \( x = 0 \) thì \( y = \pm 1 \). Nếu \( y = 0 \) thì \( x = \pm 1 \)
Đó là các nghiệm của bài toán.

Xét $x, y \neq 0$. Nếu phương trình có nghiệm $(x_0, y_0)$ thì cũng có nghiệm $(-x_0, -y_0)$. Viết lại phương trình đã cho: $(x^2 - y^2)^2 = (2xy + 1)^2$

Khi đó $x^2 - y^2 = \pm 2xy \pm 1$.

Coi là phương trình bậc hai đối với $x$. Dễ có nghiệm $x = y \pm \sqrt{\Delta}$ thì điều kiện cần (và đủ) là $\Delta' = 2y^2 \pm 1 = m^2$ là số chính phương (m nguyên). Phương trình $m^2 - 2y^2 = 1$ là phương trình Pell có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất $m_1 = 3, y_1 = 2$; các nghiệm nguyên dương khác $(m_k, y_k)$ được xác định từ đẳng thức

$$m_k + y_k\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^k$$

Còn phương trình $m^2 - 2y^2 = -1$ là phương trình đối Pell có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất $m_0 = 1$, $y_0 = 1$ và các nghiệm nguyên dương khác $(m_s, y_s)$ được xác định từ đẳng thức

$$m_s + y_s\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{2s-1}$$

Từ đó ta được $(x_k, y_k)$ hoặc $(x_s, y_s)$ và suy ra các nghiệm nguyên của phương trình đã cho.

Bài toán 107.

Tim nghiệm nguyên của phương trình

$$y^4 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

GIẢI

Xét ba trường hợp

+ $x = 0$ thì $y = \pm 1$

+ $x \geq 1$, nguyên: $x^4 < y^4 < (x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$,

suy ra $y$ không thể là số nguyên.
\[ x \leq -1, \text{ nguyên: đặt } x = -1 - t \text{ thì } t \geq 0. \]

Phương trình đã cho trở thành
\[ y^4 = (1 + t)^4 - 2(1 + t)^3 + 3(1 + t)^2 - 3(1 + t) + 1 \]
Nhận thấy 
\[ t^4 \leq y^4 = t^4 + 2t^3 + 3t^2 + t < (t + 1)^4 \]
Đầu bằng xảy ra khi và chỉ khi 
\[ 2t^3 + 3t^2 + t = 0 \]
Suy ra \( t = 0, -1, -\frac{1}{2} \), chỉ có \( t = 0 \) thuộc khoảng đang xét, lúc đó \( x = -1, y = 0 \)

Bài toán 108. Tìm các bộ ba: \( x, y \) nguyên, \( Z \) nguyên thỏa mãn dạng thức
\[ x^4 + 4y^4 = Z. \]

GIẢI

Không thể có \( x = 0 \) hoặc \( y = 0 \) vì lúc đó \( Z \) không phải là số nguyên tố. Vì chỉ có lũy thừa bậc chẵn của \( x \) và \( y \) trong dạng thức nên trước hết ta xét \( x, y \) nguyên dương.

Khi đó \( Z = x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 \)
\[ = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy) \]
\[ = [(x - y)^2 + y^2] [(x + y)^2 + y^2] \]
Để \( Z \) là số nguyên tố, điều kiện cần là \( (x - y)^2 + y^2 = 1 \) vì thừa số còn lại luôn lớn hơn 1 (do \( y > 1 \)). Suy ra \( x = y = 1, Z = 5. \) Dối đầu một hoặc cả hai giải trí \( x, y \) ta được mọi nghiệm phải tìm.

Bài toán 109. Tìm nghiệm nguyên của phương trình
\[ (2x + 1)^2 - 1 = \frac{384y}{(2x - 1)^2} - 1 \]

114
GIÁI

Suy ra $384y = (4x^2 + 4x)(4x^2 - 4x)$.

hay $24y = x^2 (x-1)(x+1)$.

- Nếu $x$ le thì $(x-1)(x+1)$ là hai số chẵn liên tiếp, nên có một số chia hết cho 4, nên $(x+1)(x-1) : 8$.

Trong ba số $x$, $(x-1)$, $(x+1)$ có một số chia hết cho 3. Vậy $x^2 (x-1)(x+1) = 24$ t với t nguyên vì $(8,3) = 1$. Phương trình đã cho có nghiệm $x = 2k+1$, $y = (1/6)k (k+1)(2k+1)^2$, $k$ nguyên.

- Nếu $x$ chẵn thì $(x-1)(x+1)$ là các số lẻ.

Trong ba số $x$, $(x-1)$, $(x+1)$ có một số chia hết cho 3. Điều kiện để phương trình có nghiệm là $x^2 : 8$, suy ra $x : 4$. Do đó bài toán có nghiệm $x = 4k$, $y = (1/6)k (4k-1) 4k (4k+1)$.

Bài toán 110. Có hay không các số nguyên tốt $x$, $y$, $z$ thỏa mãn phương trình

$$x^2 + y^3 = z^4$$

(Thi vô địch Liên Xô lần thứ 14 - 1980)

GIÁI

Không thể có ba số cùng lẻ, tức là ít nhất một số bằng 2.

- Giả sử $z = 2$: khi đó $x^2 + y^3 = 16$⇒ $y$ chỉ có thể là 2, nên $x^2 = 8$; vò lí ($x$ không nguyên)

- Giả sử $y = 2$: ta có $8 = (z^2 + x)(z^2 - x)$. Vì $z^2 + x > 0$ nên $z^2 - 8 > 0$. Tông $(z^2 + x) + (z^2 - x) = 2z^2$ phải là số chẵn nên phần tích $8 = 4.2$, nhưng $4 + 2 = 2z^2$; vò lí ($z$ không nguyên)
- Giả sử $x = 2$: khi đó $y^3 = (z^2 + 2)(z^2 - 2)$

Do $(z^2 + 2) - (z^2 - 2) = 4$ nên $z^2 + 2$ và $z^2 - 2$ chỉ có ước số nguyên tối là 2 (tức là $y = 2$)

hoặc $z^2 - 2 = 1$. Trường hợp sau không xảy ra còn nếu $y = 2$, khi đó có $x = 2$ thì $z$ phải chẵn.

Vì $z$ nguyên tố nên $z = 2$. Trường hợp này không nghiệm đúng dạng thức đã cho.

Bài toán vô nghiệm.

Bài toán 111: Tìm nghiệm nguyên của phương trình
\[8x^4 - 4y^4 + 2z^4 = t^4\] (1)

GIẢI

Giả sử phương trình có nghiệm nguyên $(x, y, z, t)$ thì $t = 2t_0$ phải chẵn, tức là $t_0$ nguyên.

Thay vào (1) được $4x^4 - 2y^4 + z^4 = 8t_0^4$.

Tương tự như trên, lại phải có $z = 2z_0$ chẵn nên
\[2x^4 - y^4 + 8z_0^4 = 4t_0^4\]

Lại phải có $y = 2y_0$ chẵn nên
\[x^4 - 8y_0^4 + 4z_0^4 = 2t_0^4\]

Lại phải có $x = 2x_0$ chẵn nên $8x_0^4 - 4y_0^4 + 2z_0^4 = t_0^4$.

So sánh với (1) ta thấy $(x_0, y_0, z_0, t_0)$ cũng là nghiệm,

mà \[x_0 = \frac{x}{2}, \quad y_0 = \frac{y}{2}, \quad z_0 = \frac{z}{2}, \quad t_0 = \frac{t}{2}.\]

Cú tiếp tục như vậy ta thấy $x, y, z, t$ chia hết cho $2^n$ với $n$ là số tự nhiên tùy $y$. Số đó, hoặc phải lớn vô cùng, hoặc bằng 0. Nhưng không có số lớn vô cùng nên phương trình có nghiệm nguyên duy nhất là $x = y = z = t = 0$. 

116
§ 6. PHƯƠNG TRÌNH BẮC CẢO

Bài toán 112. Tìm nghiệm nguyên của phương trình
\[ x^{53} + y^{53} = 53Z. \]

GIẢI

Vì Z là số nguyên nên \( x^{53} + y^{53} \) chia hết cho 53.

Nhận thấy 53 là số nguyên tố nên theo định lý nhỏ Ferma thì
\[ x^{53} - x \text{ chia hết cho 53, } y^{53} - y \text{ chia hết cho 53.} \]

Phương trình đã cho có thể viết lại là
\[ 53Z = (x^{53} - x) + (y^{53} - y) + (x + y) \]

Nó có nghiệm khi và chỉ khi \( x + y = 53 \) và \( t = 53 \) là số nguyên.

Vậy bài toán có nghiệm là \( x = u \) nguyên bất kỳ, \( y = 53t - u \) và
\[
Z = \frac{u^{53} + (53t - u)^{53}}{53} = t \left[ u^{52} - u^{51}(53t - u) + u^{50}(53t - u)^2 - \right.
\]
\[ - u^{49}(53t - u)^3 + ... - ... + (53t - u)^{52} \]

Bài toán 113. Tồn tại hay không nghiệm nguyên của phương trình
\[ x^{12} + y^{12} + Z^{12} = 2(19^{1953} + 88^{1953}) \]

GIẢI

Ta có
\[ 19^{1953} = (9.2 + 1)^{1953} = 9a + 1 \]
\[ 88^{1953} = (9.9 + 7)^{1953} = 9b + 7^{1953} \]
\[ 7^{1953} = 7^{3.651} = (38.9 + 1)^{651} = 9c + 1 \]

Vậy về phải phương trình đã cho có dạng
\[ 2(9a + 1 + 9b + 9c + 1) = 9M + 4 \]

Xét số nguyên bất kỳ \( n \). Ta có thể viết \( n = 9k + a \) với \( a = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \).

Nhận thấy \( n^3 = (9k + a)^3 \) mà \( a^3 = 0, \pm 1, \pm 8, \pm 27, \pm 64 \) nên \( a^3 \) chia cho 9 có số dư là 0, ±1.

Suy ra, vế trái của phương trình đã cho là tổng của \((x^4)^3\), \((y^4)^3\), \((z^4)^3\) chỉ có thể nhận một trong các dạng 9s, 9s ± 1, 9s ± 2, 9s ± 3 mà không thể có dạng 9s + 4. Vậy bài toán vô nghiệm.

Bài toán 114. Tìm nghiệm nguyên \((x, y, z, t)\) của phương trình \((x - y)^{1995} + (y - z)^{1995} + (z - x)^{1995} = t(x - y)(y - z)(z - x)\)

GIÁI

Ta xét phương trình tổng quát
\[ (x - y)^k + (y - z)^k + (z - x)^k = t(x - y)(y - z)(z - x) \quad (1) \]

mà \( k \) là số nguyên dương. Đặt vế trái của (1) là \( A \). (1) chứng tỏ \( A : (x - y) \). Có nghĩa là khi \( x - y = 0 \) thì \( A = 0 \).

Thay \( x = y \) vào \( A \) được \( 0 = A = (y - z)^k + (z - y)^k \quad (2) \)

- Nếu \( k \) chẵn thì \( y = z \). Đằm \( x = y = z \) vào (1) thì ta nhận thấy (1) có nghiệm là \( x = y = z \) nguyên thủy, \( t \) nguyên thủy, \( k \) nguyên dương đủ chần hay lệ.

- Nếu \( k \) lẻ: \( A = (y - z)^k - (z - y)^k \equiv 0 \). Điều đó có nghĩa là \( A : (x - y) \) khi \( k \) lẻ. Vì trong \( A \), vai trò của \( x, y, z \) như nhau nên suy ra \( A \) chia hết cho \( B = (x - y)(y - z)(z - x) \). Vậy (1) còn có nghiệm là \( k \) lẻ, \( x, y, z \) là những số nguyên bất kỳ, \( t = A/B \).

Trở lại bài toán đã cho: với \( k = 1995 \), nghiệm của phương trình là

118
\[ x = u, \ y = u, \ z = u \ \text{nguyên, t nguyên tỉy ý.} \]

hoặc \[ x, \ y, \ z \ \text{là các số nguyên bất kỳ, t} = \frac{A}{B} \]

Bài toán 115. Chứng minh rằng phương trình
\[ (x - y)^k + (y - z)^k + (z - x)^k = ku \]
có vô số nghiệm nguyên \( x, \ y, \ z, \ u \) khi \( k \) là số nguyên tố.

GIẢI

Đặt vé trái của phương trình đã cho là \( A \) thì
\[ A = [(x - y)^k - (x - y)] + [(y - z)^k - (y - z)] + [(z - x)^k - (z - x)] \]

Theo định lý nhỏ Ferma: mỗi số hạng trong móc vuông đều chia hết cho \( k \). Từ đó suy ra điều phải chứng minh (nghiệm là \( x, \ y, \ z \) nguyên bất kỳ và suy ra \( u \) nguyên tương ứng).

Từ bài toán 114 và 115 chúng ta thấy rằng: Phương trình
\[ (x - y)^k + (y - x)^k + (z - x)^k = kt(x - y)(y - z)(z - x) \]
nghiệm đúng với \( x, \ y, \ z, \ t \) nguyên bất kỳ, \( k \) nguyên tố le.

§ 7. PHƯƠNG TRÌNH CÂN ĐỒNG DANG

Trong một kỳ thi chon học sinh giỏi ở Liên Xô có bài toán sau đây:

Bài toán 116. Phương trình \( \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960} \)
có bao nhiêu nghiệm trong các số nguyên?

GIẢI

Trước hết ta dua ra lối giải của đáp án:

Từ phương trình đã cho ta có \( x = 1960 + y - 28\sqrt{10}y \).
Với $x, y$ nguyên suy ra $28\sqrt{10}y$ nguyên (ví binh phương của một phân số tối giản không thể nguyên). Vậy $10y = k^2$, từ đó $y = 10t^2$. Tương tự chứng minh được $x = 10s^2$. Khi đó từ phương trình đã cho có $|t| + |s| = 14$. Vậy với số nguyên $|t|$ ta có 15 giá trị có thể có $t = 0, 1, 2, ..., 14$. Phương trình đã cho có 15 nghiệm.

Nếu đề ý rằng $\sqrt{1960} = 14\sqrt{10}$ là một số vô tỉ chứng ta sẽ có lời giải đẹp hơn nhiều. Vẽ trái cần phải là çalışan đúng dạng với $\sqrt{10}$, tức là $\sqrt{x} = a\sqrt{10}, \sqrt{y} = \sqrt{10}$ với $a, b$ nguyên không âm thỏa mãn đúng thức $a + b = 14$.

Có 15 giá trị $a = 0, 1, ..., 14$ nên bài toán có 15 nghiệm.

Như vậy không nên "tránh" số vô tỉ và chỉ thích "làm việc" với các số nguyên ngay cả trong những bài toán tìm nghiệm nguyên.

Ta gặp lại dạng toán đó ở một kỳ thi chọn học sinh giỏi để lập đội tuyển Việt Nam đi thi toàn quốc té.

**Bài toán 117.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x, y)$ sao cho với $x < y$:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1980}$$

**GIẢI**

Chúng ta sẽ không thực hiện phép bình phương, cũng như sẽ không tiến hành một phép thế nào vì nhận thấy $\sqrt{1980} = 6\sqrt{55}$ là số vô tỉ.

Khi đó vẽ trái là số vô tỉ. Nói là tổng của hai căn thức (khác 0) nên hai căn thức ấy phải đồng dạng với $\sqrt{55}$, tức là $\sqrt{x} = a\sqrt{55}, \sqrt{y} = b\sqrt{55}$ với $a, b$ nguyên dương thỏa mãn đúng thức $a + b = 6$. 

120
Ví \(0 < a < b < 6\) nên \(a = 1\) hoặc \(a = 2\). Suy ra bài toán có hai nghiệm \((x, y) = (55, 1375), (220, 880)\).

Bài toán 118. Tìm nghiệm nguyên của phương trình
\[13\sqrt{x} - 7\sqrt{y} = \sqrt{2000}\]

GIẢI

Vẽ phải \(\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}\). Vẽ trái là hiệu của hai số nên: hoặc một trong hai số bằng 0, hoặc cả hai số là những căn thức dương bằng \(\sqrt{5}\), tức là \(\sqrt{x} = a\sqrt{5}, \sqrt{y} = b\sqrt{5}\) với \(a, b\) là các số nguyên không âm nghiệm đúng phương trình \(13a - 7b = 20\).

\[a = \frac{20 + 7b}{13} = 1 + \frac{7(1 + b)}{13}\]

Ví \((13, 7) = 1\) nên để \(a, b\) nguyên thì \(1 + b = 13t\) với \(t\) nguyên. Suy ra \(b = 13t - 1, a = 1 + 7t\). Để \(a, b > 0\)

thì \(t\) phải nguyên dương. Cuối cùng:

\[x = 5a^2 = 5(1 + 7t)^2, y = 5b^2 = 5(13t - 1)^2\] với \(t\) là số nguyên dương.

Tới đây, ta xét bài toán tổng quát: Tìm nghiệm nguyên của phương trình

\[a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = \sqrt{c}\]

với \(a, b\) nguyên, \(c\) nguyên dương không chính phương. Mà chúng ta có thể gọi là phương trình ở định cần đồng dạng.

Để giải phương trình, ta viết \(c\) dưới dạng \(c = km^2\), trong đó \(k, m\) là các số nguyên dương, \(k\) không chia hết cho bất kỳ số chính phương nào khác 1. Để thấy rằng với mỗi \(c\) thì cách viết đó là tồn tại và duy nhất. Vẽ phải \(\sqrt{c} = m\sqrt{k}\) là số vô ti. Vẽ trái là tổng của hai số nên hoặc một số bằng 0, hoặc cả hai là những

121
số vô ti đồng dạng với \( \sqrt{k} \). Trường hợp \( a = 0 \) hoặc \( b = 0 \) đơn giản.
Xét trường hợp \( a, b \neq 0 \). Lực này \( \sqrt{x} = u\sqrt{k}, \sqrt{y} = v\sqrt{k} \) với \( u, v \) là các số nguyên không âm. Thanh thử:
\[
a + bv = m(*)
\]
Đây là phương trình vô dinh mà chúng ta đã có cách giải hết sức ngắn gọn (chương I). Nếu \( m \) không chia hết cho ước số chung khác 1 của \( a, b \) thì (*) không có nghiệm nguyên. Ngược lại, nếu (*) có nghiệm nguyên \( u_o, v_o \) thì
\[
a + bv = au_o + bv_o (\ = m)
\]
Vì vậy \( u = \frac{au_o + bv_v - bv}{a} = u_o + \frac{b(v_o - v)}{a} = u_o + \frac{b'(v_o - v)}{a'} \)

với \( a', b' \) nguyên và \( (a', b') = 1 \).
Để \( u \) nguyên thì \( v_o - v = a't \) với \( t \) nguyên, nên
\[
v = v_o - a't, u = u_o + b't,
\]
Do \( u, v \geq 0 \) nên
\[
v_o - a't \geq 0 \Rightarrow a't \leq v_o
\]
\[
u_o + b't \geq 0 \Rightarrow b't \geq -u_o
\]
Vì trong hai số \( a, b \) có ít nhất một số dương nên trong \( a', b' \) có ít nhất một số dương. Không mất tính tổng quát, giả sử \( b' > 0 \),

thế thì \( t \geq -\frac{u_o}{b'} \)

- Nếu \( a' < 0 \) thì \( t \geq \frac{v_o}{a'} \) do đó \( t \geq \max \left( -\frac{u_o}{b'}, \frac{v_o}{a'} \right) \)

với \( u_o, v_o, b' > 0, a' < 0 \)

- Nếu \( a' > 0 \) thì \( t \leq \frac{v_o}{a'} \) do đó \( -\frac{u_o}{b'} \leq t \leq \frac{v_o}{a'} \)

với \( u_o, v_o, b', a' > 0 \)

122
Cuối cùng ta được \[ x = ku^2 = k(u_0 + bt)^2 \]
\[ y = kv^2 = k(v_o - at)^2 \]

Phương trình với định cánh đơn đồng dạng không chỉ bởi hep ở dạng đã nêu. Nhiều phương trình sẽ được giải một cách đơn giản nếu nó được nhìn từ góc con mắt như vậy. Chẳng hạn như:

Bài toán 119. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình
\[ \frac{3x}{5} - \sqrt{2x + 1} = \frac{7y}{3} - \sqrt{4y - 1} - 4 \]

GIÁI

Nhận thấy \( \sqrt{4y - 1} \) là số vô tính với mọi \( y \) nguyên (vì bình phương của một số lẻ có dạng \( 4m + 1 \)). Viết lại phương trình đã cho
\[ \frac{3x}{5} + \frac{4}{3} - \frac{7y}{3} = \sqrt{2x + 1} - \sqrt{4y - 1} \quad (1) \]

Vẽ trái của (1) là số hữu tỉ nên điều kiện cần (và đủ) để (1) có nghiệm nguyên là cả hai vế của (1) cùng bằng 0. Dễ dàng tìm được nghiệm (duy nhất) của bài toán là \( x = 5, y = 3 \).

Bài toán 120: Tìm tất cả các số tự nhiên \( x \) và \( y \) thỏa mãn phương trình
\[ (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 3361 - \sqrt{11296320} \]
(Bài dự tuyển thi vô địch toán quốc tế)

GIẢI

Nhận thấy \( x \) và \( y \) là các số nguyên không âm, và
\[ \sqrt{11296320} = 2^3 \cdot 41 \cdot \sqrt{105} \] là số vô tính. Phương trình đã cho có
thẻ viết lại:

\[(x + y)^2 + 4xy - 4(x + y)\sqrt{xy} = 3361 - 8 \cdot 41\sqrt{105}\]

hay \[(x + y)^2 + 4xy - 3361 = 4(x + y)\sqrt{xy} - 328\sqrt{105} \cdot (1)\]

Vẽ trái của (1) là số hữu tỉ nên điều kiện cần và đủ để phương trình có nghiệm nguyên là cả hai vé của (1) cùng bằng 0. Tới đây có hai cách giải

Cách 1: Ta có hệ

\[
\begin{align*}
(x + y)^2 + 4xy - 3361 &= 0 \\
4(x + y)\sqrt{xy} - 328\sqrt{105} &= 0
\end{align*}
\]

hay

\[
\begin{align*}
S^2 + 4P - 3361 &= 0 \ (2) \\
S\sqrt{P} &= 82\sqrt{105} \ (3)
\end{align*}
\]

trong đó \(S = x + y, P = xy\). Từ (3) rút ra \(P = \frac{82^2 \cdot 105}{S^2}\)

Thay vào (2) được

\[
S^2 + \frac{4.82^2 \cdot 105}{S^2} - 3361 = 0
\]

hay \(S^4 - 3361S^2 + 4.82^2 \cdot 105 = 0\)

Biết số \(\Delta = 3361^2 - 4.4.82^2 \cdot 105 = 1\) suy ra

\[S^2 = (3361 \pm 1) : 2 = 1681; 1680\]

1680 không phải số chính phương, còn 1681 = 41\(^2\) nên \(S = 41\), suy ra \(P = 420\). Lúc này \(x, y\) là hai nghiệm của phương trình \(z^2 - 41z + 420 = 0\).

Phương trình này có nghiệm \(Z_1 = 29, Z_2 = 21\).

Vậy \(x\) và \(y\), một số là 20, số kia là 21.

Cách 2: từ (3) suy ra \((x + y)\sqrt{xy} = 82\sqrt{105} \ (4)\)
Đăng thức xây ra khi và chỉ khi hai cạnh thức \( \sqrt{xy} \) và \( \sqrt{105} \) đồng dạng. Như vậy \( x + y = \frac{82}{k} \) và \( xy = 105k^2 \). Như vậy, hai số \( x, y \) là hai nghiệm của phương trình:

\[
t^2 - \frac{82}{k}t + 105k^2 = 0
\]

Phương trình này chỉ có nghiệm nếu

\[
\Delta = \left( \frac{82}{k} \right)^2 - 4 \cdot 105k^2 \geq 0 \Rightarrow \left( \frac{82}{k} \right)^2 \geq 4 \cdot 105k^2
\]

\[
\Rightarrow 82^2 \geq 4 \cdot 105k^2 \Rightarrow k \leq 2
\]

Nếu \( k = 1 \), phương trình \( t^2 - 82t + 105 = 0 \) không có nghiệm nguyên.

Nếu \( k = 2 \), phương trình \( t^2 - 41t + 4 \cdot 105 = 0 \) có nghiệm \( t_{1,2} = 20; 21 \). Vậy \( x, y \): một số là 20, một số là 21 nghiệm đúng phương trình đã cho.
Tôi đã mở đầu cuốn sách bằng định lý lớn Fecma, và tôi khi viết những dòng cuối cùng này, tôi muốn trở lại với nó. Bởi vì sự đón gián bê ngoài, vẻ đẹp cẩn đối và đó khó cao của phương trình Fecma đặc trưng cho vẻ đẹp và đó khó của những phương trình Diophâng – những phương trình vô định.

Hơn bất cứ một thông tin toàn học nào khác của mọi thời đại, bài toán Fecma đã gây nên án tướng sâu sắc và dai dẳng. Tôi đã từng nằm mơ giải được phương trình Phecma, sau nhiều ngày vật lộn với nó, để sáng hôm sau thực giấc long đầy thất vọng. Nhưng rồi tôi lón dẫn lén để hiểu: định lý lớn Fecma thật là... lớn!

Bạn có biết không, Fecma, niềm vinh quang của nền khoa học Pháp, một trong những người sáng lập lý thuyết số, người đã cùng Đê cặc (R. Descartes, 1596 – 1650) đạt nền móng cho hình học giải tích, cùng Pascan (B. Pascal, 1623 – 1662) đạt nền móng cho lý thuyết xác suất, không phải là một nhà toàn học chuyên nghiệp. Ông là một luật gia và chỉ nghiên cứu toàn học trong thời gian rảnh rỗi. Trong lĩnh vực toàn, Fecma là một người tư học thiên tài, những thành tựu của "nhà nghiệp dư" ấy đến những nhà toàn học chuyên nghiệp cũng phải ghen tị. Vậy mà, ông chỉ thực sự chúng mình định lý của mình cho trường hợp \( n = 4 \), tức là phương trình \( x^4 + y^4 = z^4 \) không có nghiệm tự nhiên. Lời giải với n tổng quát của ông không được ghi lại, phải chẳng vì ông đã nghi ngút sử dụng dân của nó.

Lêona Ole, nhà toàn học vi đại của Viên Hàn làm Pêtecbua, người Thuy Sĩ, người đã viết 366 công trình nghiên cứu đầy giá trị, người mà Đô Đơ rỏ, một triết gia Pháp, "sẵn sàng đánh đôi tất cả những điều mà tôi xay dung được chỉ để lấy một trang trong tác phẩm của ngại Ole", người mà Gauxơ – nhà toàn học Đức, được người đương thời tôn sùng như ông vua toàn học – đã phải công nhận: "Việc học tập những tác phẩm của Ole bao giờ cũng là cách tốt nhất để hiểu toàn học", người mà năm 13 tuổi đã trở thành sinh viên trường Đại học Baden, 16 tuổi được nhận học vi
tiền si, người mà sau khi mất đi, Viên hàn làm Pêtecbua phải mất 80 năm mới đăng hết trên tạp chí của mình những công trình ông viết cuối đời chứa kíp công bố, người say mê những phương trình vô định, cùng chi chứng minh được định lý lớn Fecma cho trường hợp n = 3 (năm 1770).

Nữa thử kỳ sau, vào năm 1825, Dirichle (P. Dilichlet 1805 - 1859) và Lo gang dram (Alegendre 1752 - 1833) mới chứng minh được định lý lớn Fecma với n = 5, sau một loat phát minh về lý thuyết số. Kumme nhà toán học Đức, để chứng minh được cho trường hợp n ≤ 100, đã phải sáng tạo ra cả một phương pháp nghiên cứu mới được gọi là lý thuyết đại số của các số.

Ngày nay, với sự giúp đỡ day hiệu quá của máy tính điện tử, của các phương pháp tính toán hiện đại, các nhà toán học trên thế giới mới chứng minh được định lý lớn Fecma đúng với n ≤ 125 000 (năm 1978).

Gần đây, Fanting (Gerd Faltings , sinh năm 1954), người CHLB Đức, giải sư trường Đại học tổng hợp Prinxtétôn (Mỹ), giải thưởng Fin* (Fields) 1986, bằng hình học đại số đã chứng minh dự đoán Moocden (Louis Joel Mordell), dem lại hy vọng tiếp tục đi tìm lời giải cho bài toán Fecma.

Vậy mà cái dịch ấy còn bị kéo ra xa xăm hơn nữa bởi giải thuyết Ole: Với mỗi số tự nhiên k và n sao cho 2 ≤ k ≤ n, phương trình Fecma tổng quát

\[ x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = x_{k+1}^n \]

không có nghiệm trong tập hợp số tự nhiên.

Có phải chúng những phương trình vô định vẫn luôn luôn ở phía trước...

T.T

* Giải thưởng quốc tế cao nhất dành cho các nhà toán học dưới 40 tuổi đã có những công hiến rất lớn góp phần thúc đẩy sự phát triển toán học. Giải thưởng này có thể xem như tương đương với giải Nobel dành cho các nhà vật lý, hóa học...
MỤC LỤC

Lời giới thiệu ..................................................... 3
Lời nói đầu ......................................................... 4

Chương I : Ba cách giải phương trình ax + by = c .............................................. 6
   § 1. Phương pháp truyền thống .......................................................... 6
   § 2. Con đường mới ................................................................. 9
   § 3. Con đường thứ hai ............................................................ 12
   § 4. Con đường thứ ba ............................................................ 13

Chương II : Đường dẫn tới phương trình $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = f$ ....... 17
   § 1. Một bài thi đại học : phương trình $a(x + y) = xy$ .......................... 17
   § 2. Phương trình $ax + by = xy + c$ ................................................. 21
   § 3. Phương trình $ax + by = c + dxy$ ................................................. 27
   § 4. Phương trình $ax^2 + by^2 = c$ ................................................... 34
   § 5. Phương trình $ax^2 + by^2 = c + dxy$ ........................................... 49
   § 6. Phương trình $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ .............................. 60

Chương III : Những phương trình vô định ......................................................... 68
   § 1. Phương trình bậc hai và bậc hai mở rộng ........................................ 68
   § 2. Phương trình vô tỉ ................................................................. 89
   § 3. Phương trình mũ ................................................................. 93
   § 4. Phương trình bậc ba .............................................................. 103
   § 5. Phương trình bậc bốn ............................................................ 108
   § 6. Phương trình bậc cao ........................................................... 117
   § 7. Phương trình cần đồng dạng ....................................................... 119

Lời tạm biệt .......................................................... 126
Mục lục ............................................................. 128