

HỘI THI SÁNG TẠO KỸ THUẬT
Thành phố Hồ Chí Minh 2007

PHÒNG GIÁO DỤC QUẬN 5
TRƯỜNG TRUNG HỌC CƠ SỞ HONG BANG
---oOo---

ÑỀ TÀI

PHÉP CHIA ĐA THỨC

ÑÒNH LY **BEZOUT & ÖNG DUNG**

TÁC GIẢ

ÑOAN VAN TO
Giáo viên Trường THCS HONG BANG

TP.HCM, 25/12/2007

LỜI NÓI ĐẦU

Tài liệu này được viết dựa theo Chương trình giảng dạy mới dành cho học sinh THCS, đặc biệt là các em học sinh Chuyên Toán.

Tác giả đã cố gắng trình bày và sắp xếp lại kiến thức toán cô đọng về Bài toán – phân NTA THỨC, thông qua việc nhắc lại các khái niệm cô đọng về bài toán và đặc biệt giới thiệu lại một trong các định lý cô đọng của bộ môn Bài toán – Định lý Bezout – song song với việc nêu được các ứng dụng quan trọng, phần kiến thức trọng tâm trong chương trình lớp 8, đó là việc “Phân tích một bài toán thành nhân tử”.

Trong quá trình viết về tài liệu này, tôi nhận được sự đồng ý của Ban giám hiệu nhà trường, quý Thầy-Cô đồng nghiệp và đặc biệt là sự ủng hộ của những học sinh Chuyên Toán do tôi phụ trách. Tài liệu cũng đã tham gia giải thưởng “Ngon nèn sáng tạo” do Báo Giáo dục và Xã hội GD-NT Thanh phố Hồ Chí Minh phối hợp tổ chức, tuy nhiên không thể không có những thiếu sót, xin các bạn chân thành góp ý.

Xin chân thành cảm ơn tất cả các Thầy-Cô, BGH nhà trường, đồng nghiệp và những học sinh của tôi !

NGUYỄN VĂN TỐ

MỤC LỤC

TAI LIEU GOM

PHAN 1 CÔ SÔ LY THUYET

- 1- HAI ÑÒNH LY CÔ BAN
- 2- ÑÒNH LY BEZOUT
- 3- SÔ ÑO HORNER
- 4- ÑÒNH LY VE NGHIEM NGUYEN CUA ÑA THÖC

PHAN 2 ÖNG DUNG – TÖ LUYEN

- 1- ÖNG DUNG 1
- 2- ÖNG DUNG 2
- 3- TÖ LUYEN (15 BAI TOAN CÔ BAN – NANG CAO)

PHAN 3 CAC BO ÑE – KINH NGHIEM HOC TAP

- 1- BO ÑE 1 : TÍNH CHIA HET
- 2- BO ÑE 2 : PHAN TÍCH ÑA THÖC THANH NHAN TÖ

NỘI DUNG CHI TIẾT

Ở TÀI

PHAN 1**CÔ SÔ LY THUYẾT**

---oOo---

HAI NỀN LY CÔ BAN**1- CÁC KHAI NIỆM**

1.1- Giả sử $f(x)$ là đa thức bậc n ($n \in \mathbb{N}$ - Tập các số tự nhiên) với biến x .

_ Ta viết dạng hình thức chính tắc $f(x)$:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (x \in \mathbb{R}, a_i \text{ là hệ số các hạng tử})$$

→ Khi đó: $f(x) = 0, \forall x \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i \in \{0, \dots, n\}$

$f(x)$ khác 0 $\Leftrightarrow$ có ít nhất a_i ($i \in \{0, \dots, n\}$) : $a_i \neq 0$

1.2- Giả sử $g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$

→ Khi đó: $f(x) = g(x), \forall x \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \{0, \dots, n\}$

1.3- Phân biệt các khái niệm “Đa thức không” ; “Đa thức có bậc không” ; “Đa thức không có bậc” :

- Đa thức không : Là đa thức dạng hình thức chính tắc mà mọi hệ số trong tất cả các hạng tử của đa thức đó bằng 0.
- Đa thức có bậc không : Mọi đa thức khác không đều xem là những đa thức có bậc là 0.
- Đa thức không có bậc : Đa thức 0, là một đa thức không có bậc.

2- NỀN NGHĨA

■ Phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $g(x)$ (khác 0) ta được thương và dư lần lượt là những đa thức $q(x), r(x)$.

Ta viết : $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$ với bậc $r(x) <$ bậc $g(x)$

■ Trường hợp nếu đa thức $r(x)$ bằng 0, ta được : $f(x) = g(x).q(x)$
và khi đó ta nói : “ $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ ”

3- NỀN LY

► Liên quan đến phép chia hết giữa các đa thức, ta cần biết hai nền lý sau

NỀN LY BEZOUT

Số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $(x - a)$ là $f(a)$

► Chứng minh

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Xét phép chia ã thõc } f(x) \text{ cho ã thõc } x - a \\ \text{Giã sõ, ta ãõõc thõõõõ va ãõõ trong phép chia ãõõ lan lõõõ la } q(x), \\ R \rightarrow f(x) = (x - a).q(x) + R \text{ võõõ } \text{bac } R < \text{bac } (x - a) \\ \rightarrow f(a) = (x - a).q(a) + R = 0 + R = R \rightarrow R = f(a) \end{array} \right.$$

■ Hệ quả :

$$a \text{ là nghiệm của ã thõc } f(x) \Leftrightarrow f(x) \text{ chia hết cho } (x - a)$$

Vã nhõõ vãy, khi phãñ tích $f(x)$ thành nhãñ tõ, $f(x)$ chõõa nhãñ tõ $x - a$

► Chứng minh

$$\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow) \\ \text{Vĩ } a \text{ là nghiệm } f(x) \text{ nên } f(a) = 0 \\ \text{Mãt khãc, theo ãõõõ lý Bezout :} \\ \text{Sõ ãõõ trong phép chia } f(x) \text{ cho } (x - a) \text{ là } f(a) = 0 \\ \text{Vãy } f(x) \text{ chia hết cho } (x - a) \\ \Leftrightarrow) \\ \text{Ta cõõ } f(x) \text{ chia hết cho } (x - a) \text{ nên ãõõ trong phép chia } f(x) \text{ cho } (x - a) \text{ là } 0. \\ \text{Mã ãõõ trong phép chia } f(x) \text{ cho } (x - a) \text{ là } f(a), \text{ nên } f(a) = 0 \\ \text{Ñĩõõ nay chõõõg tõ } a \text{ là nghiệm của } f(x). \end{array} \right.$$

☛* Thõõc te cho thay, vĩc sõõ ãõõ ãõõ ãõõ ãõõ lý Bezout là thõõõõ xuyẽn va phõõ biẽn hõõn cãõ bãn thãñ ãõõõ lý, cãõ bãn sẽ thay ãõõõ nay trong xuyẽn suõõt bãõ bãõ cãõõ nay !

S

Ô ÑÕ HORNER

■ Ñãñ vãn ãõõ

Xet phép chia $f(x)$ cho $x - a$

_ Sõ ãõõ trong phép chia là $f(a)$, ãõõõ nay ta ãõõ biẽn !

_ Nhõõ vãy, ta cõõ the vĩc : $f(x) = (x - a).q(x) + f(a)$

_ Vãn ãõõ ô ãõõ là ta cãñ xãc ãõõõ ãõõ sõõ cũã $q(x)$. Vĩc xãc ãõõõ nay cõõ the lãñ theo cãc “ Xep ãõõ phép chia ra va thõõõ ãõõõ phép chia ãõõ ãõõ thõõõõ $q(x)$ ”

_ Tuy nhĩc, ô ãõõ ta sẽ lãñ quẽn mõõ thũãñ toãñ ãõõ ãõõ ãõõ sõõ cũã $q(x)$, ta gõĩ là sõ ãõõ Horner.

- _ Trắc hết ta thay rang nếu $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ thì ta có thể đưa về dạng $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ để tìm nghiệm.
- _ Nhờ vậy việc tìm nghiệm của $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ta có thể đưa về việc tìm nghiệm của $g(x) = m.f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (m là mẫu chung của các hệ số trong $f(x)$)

c) Định lý cơ bản :

Cho đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_i \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$)

Nếu $\frac{p}{q}$ (tối giản) là nghiệm của $f(x)$ thì p là ước của a_0 và q là ước của a_n .

► Chứng minh

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{• Vì } \frac{p}{q} \text{ là nghiệm của } f(x) \text{ nên } f\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \\ \Leftrightarrow a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \quad (*) \\ \Leftrightarrow a_0 q^n = - (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1}) \\ \Leftrightarrow a_0 q^n = - p (a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}) \\ \text{Nhờ vậy } a_0 q^n \approx p, \text{ mà } (p, q) = 1 \text{ nên } (p, q^n) = 1 \\ \rightarrow a_0 \approx p \rightarrow p \text{ là ước của } a_0 \\ \text{• Ngoài ra, từ } (*) \text{ ta có :} \\ a_n p^n = - (a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n) \\ \Leftrightarrow a_n p^n = - q (a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) \\ \text{Tổng từ nhờ trên, ta cũng có } a_n \approx q \rightarrow q \text{ là ước của } a_n \end{array} \right.$$

HỆ QUẢ

- _ Nếu $f(x)$ có nghiệm nguyên thì nghiệm nguyên đó là ước của a_0
- _ Khi $a_n = 1$ thì mọi nghiệm hữu tỉ của $f(x)$ đều là nghiệm nguyên.

► Chứng minh

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{• Giả sử } a \text{ là nghiệm nguyên của } f(x) \\ \rightarrow \frac{a}{1} \text{ là nghiệm của } f(x) \rightarrow \text{Theo định lý trên, ta có } a \text{ là ước} \\ \text{của } a_0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{▪ Giả sử } a_n = 1 \text{ và } \frac{p}{q} \text{ là nghiệm của } f(x) \rightarrow \text{Theo định lý} \\ \text{trên, ta cũng có } q \text{ là ước của } a_n \text{ hay } q \text{ là ước của } 1 \\ \rightarrow q = \pm 1 \rightarrow \text{nghiệm } \frac{p}{q} = \pm p \text{ của } f(x) \text{ là một số nguyên.} \end{array} \right.$$

d) VÍ DỤ :

Tìm nghiệm hữu tỉ của đa thức $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$

_ Nghiệm hữu tỉ của đa thức trên (nếu có) phải là số nguyên và là ước của -6

_ Thử lần lượt các ước của -6, ta có $f(2) = 0$ và $f(-3) = 0$

$\rightarrow 2; -3$ là nghiệm của $f(x)$

_ Chia $f(x)$ cho $x - 2; x - 3$ theo sơ đồ Horner

	1	2	-4	-5	-6
2	1	4	4	3	0
-3	1	1	1	0	

_ Khi đó $f(x) = (x - 2)(x + 3)(x^2 + x + 1)$

_ Vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, với mọi x

nen $f(x)$ chỉ có 2 nghiệm là 2 ; -3.

PHẦN 2 ỨNG DỤNG – TÔI LUYỆN

---oOo---

ỨNG DỤNG

ỨNG DỤNG 1

TÌM HỆ SỐ ÑỂ $f(x)$ CHIA HẾT CHO $g(x)$

1- VÍ DỤ :

Xác ñịnh các hệ số a, b sao cho $x^4 + ax^3 + b$ chia hết cho $x^2 - 1$

Höông ñan

Cách 1 (Tìm số ñể và cho ñể bằng 0)

$x^4 + ax^3$	$+ b$	$x^2 - 1$
$- x^4$	$- x^2$	
$ax^3 + x^2$		$x^2 + ax + 1$
$- ax^3$	$- ax$	
$x^2 + ax + b$		
$- x^2$	$- 1$	
$ax + b + 1$		

Nhö vậy, ñể $x^4 + ax^3 + b$ chia hết cho $x^2 - 1$ thì $ax + b + 1 = 0, \forall x$

→ $a = 0$ và $b + 1 = 0$ hay $a = 0 ; b = -1$

Cách 2 (Ñöng nhất hệ số)

Ñặt $x^4 + ax^3 + b = (x^2 - 1)(x^2 + cx + d) = x^4 + cx^3 + (d - 1)x^2 - cx - d, \forall x$

Do ñö :

$$\begin{cases} c = a \\ d - 1 = 0 \\ c = 0 \\ b = -d \end{cases}$$

→ $a = 0 ; b = -1 ; c = 0 ; d = 1$

Vậy với $a = 0 ; b = -1$ ta có $x^4 + ax^3 + b$ chia hết cho $x^2 - 1$

Cách 3 (Thay 1 giá trị biết của biến - giá trị riêng)

Gọi Q là đa thức thương trong phép chia $x^4 + ax^3 + b$ cho $x^2 - 1$

$$\rightarrow x^4 + ax^3 + b = (x^2 - 1).Q = (x - 1)(x + 1).Q (*)$$

Vì (*) đúng với mọi x nên khi cho $x = 1$, $x = -1$ ta có :

$$\begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 1 - a + b = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow a = 0 ; b = -1$$

(các bạn nghĩ thử xem, tại sao chọn $x = 1; -1$)

2- TỔNG TÖ :

Tìm hệ số a, b sao cho $x^4 + ax^2 + b$ chia hết cho $x^2 - 3x + 2$ ($a = -5, b = 4$)

ÖNG DUNG 2

DUNG NÖNH LY BEZOUT PHAN TICH ÑA THÖC THANH NHAN TÖ

TIEU CHUAN PHAN TICH

Tất nhiên, có nhiều tiêu chuẩn phân tích một đa thức thành nhân tử. Trong khuôn khổ bài báo cáo này, ta chỉ nói về một khía cạnh sử dụng hiệu quả định lý Bezout cho nên tiêu chuẩn sau ta chứng minh dễ dàng bằng cách dùng định lý Bezout để chứng minh.

Gia số đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_i \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$)

có n nghiệm $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ thì :

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)$$

1- VÍ DU 1 :

Phân tích đa thức $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ thành nhân tử

Höông ðan

- Nếu a là nghiệm của $f(x)$ thì $f(x)$ chia hết cho $x - a$ (hệ quả Bezout)
- Nhờ vậy ta phải tìm một nghiệm của $f(x)$. Thông thường, ta dùng định lý nghiệm đa thức để tìm một nghiệm của $f(x)$.

- _ Thử các ôc của 12 ta thay $f(2) = 0$. Ta xem $f(x) = (x - 2).Q$
- _ Tôi này có thể lấy $f(x)$ chia cho $x - 2 \rightarrow$ thông là $x^2 + x - 6$
- _ Phân tích tiếp tục thông có nữa, cuối cùng ta có $f(x) = (x - 2)^2(x + 3)$.

2- VÍ DỤ 2 :

Phân tích đa thức $A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ thành nhân tử

Hướng dẫn

Cách 1 (Dùng phương pháp thông thường)

- _ Ta có $(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3 \rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
- _ Thay $a^3 + b^3$ vào A , ta có :

$$\begin{aligned} A &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc = (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b) - 3abc \\ &= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b + c) \\ &= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab] \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \end{aligned}$$

Cách 2 (Nhìn ly Bezout)

- _ Xem A là đa thức bậc 3 với biến a
- _ Đặt $A = f(a) = a^3 - 3abc + b^3 + c^3$. Để dạng tính nữa $f(-b-c) = 0$
 $\rightarrow f(a)$ chia hết cho $a - (-b-c) = a + b + c$
- _ Thực hiện phép chia đa thức $f(a)$ cho $a + b + c$, hoặc dùng sơ đồ Horner tìm hệ số đa thức thông :

	1	0	-3bc	$b^3 + c^3$
-b-c	1	-b-c	$b^2 + c^2 - bc$	0

- _ Đa thức thông là : $q(a) = a^2 - (b + c)a + b^2 + c^2 - bc$
 $\rightarrow f(a) = (a + b + c)[a^2 - (b + c)a + b^2 + c^2 - bc]$
 $= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

3- TÔNG TỒ :

3.1) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $3x^3 + 5x^2 - 14x + 4$

($x = \frac{1}{3}$ là nghiệm)

b) $2x^3 - x^2 - 3x - 1$

($x = -\frac{1}{2}$ là nghiệm)

3.2) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$

b) $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$

c) $bc(a + d)(b - c) - ac(b + d)(a - c) + ab(c + d)(a - b)$

Hd:

a) **Nhàt** $f(a) = a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ là nhà thốc bac 2 theo an a.

Ta có $f(b) = b^2(b - c) + b^2(c - b) = 0$ và $f(c) = 0$

→ b và c là hai nghiệm của $f(a)$

Theo tiêu chuan phân tích, ta có $f(a) = (b - c)(a - b)(a - c)$

b) **Nhàt** $f(a) = a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$ là nhà thốc bac 3 theo an a.

Ta có $f(b) = b^3(b - c) + b^3(c - b) = 0$ và $f(c) = c^3(b - c) + c^3(c - b) = 0$

→ b và c là hai nghiệm của $f(a)$

→ $f(a) = (b - c)(a - b)(a - c)(a - m)$ với m là nghiệm thố ba của $f(a)$

Sử dụng phương pháp đồng nhất hệ số, so sánh hệ số tổ do của hai vế, ta có :

$$bc(c - b).m = b^3c - c^3b \rightarrow m = -b - c$$

Nhà vậy, $f(a) = (b - c)(a - b)(a - c)(a + b + c)$

c) **Nhàt** $f(a) = bc(a + d)(b - c) - ac(b + d)(a - c) + ab(c + d)(a - b)$ là nhà thốc bac hai theo an a.

Ta có $f(b) = f(c) = 0$, và hệ số của a^2 là $b(c + d) - c(b + d) = d(b - c)$

Vậy $f(a) = d(b - c)(a - b)(a - c)$

3.3) Dùng nhà lý về nghiệm nhà thốc, nhà lý Bezout, phân tích các nhà thốc sau thành nhân tổ :

- a) $x^3 - 9x^2 + 15x + 25$
- b) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$
- c) $2x^4 + x^3 - 22x^2 + 15x - 36$
- d) $3x^3 + 5x^2 - 14x + 4$
- e) $2x^3 - x^2 - 3x - 1$

Hd:

- _ Sử dụng nhà lý tìm nghiệm, tìm một nghiệm của mỗi nhà thốc trên.
- _ Sau nhà dùng hệ qua nhà lý Bezout, nhà nhà Horner phân tích.

TỰ LUYỆN

BAI 1-

Cho biết ãa thöc $4x^3 + ax + b$ chia het cho ãa thöc $x - 2$ va $x + 1$.
Tinh $2a - 3b$?

Hd:

Ãa thöc $4x^3 + ax + b$ chia het cho ãa thöc $x - 2 \Leftrightarrow 2$ la nghiäm cua $4x^3 + ax + b$
 ãa thöc $4x^3 + ax + b$ chia het cho ãa thöc $x + 1 \Leftrightarrow -1$ la nghiäm cua ãa thöc $4x^3 + ax + b$

BAI 2-

Xac ãnh cac häng soi a, b sao cho :

- a) $x^4 + ax^2 + b$ chia het cho $x^2 - x + 1$
- b) $ax^3 + bx^2 + 5x - 50$ chia het cho $x^2 + 3x - 10$
- c) $ax^3 + bx - 24$ chia het cho $(x + 1)(x + 3)$

Hd:

Ta coi: $x^4 + ax^2 + b = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + a) + x(a + 1) - a + b$

Ñe $x^4 + ax^2 + b$ chia het cho $x^2 - x + 1$ thì $x(a + 1) - a + b = 0 \forall x$

Bai b va c giai töng töi bai a

BAI 3-

Xac ãnh cac häng soi a, b ãe ãa thöc $f(x) = 2x^3 + ax + b$ chia cho $x + 1$ dö -6 va khi chia $f(x)$ chia cho $x - 2$ dö 21.

Hd:

$$\text{Ta coi } \begin{cases} f(x) \text{ chia } (x + 1) \text{ dö -6} \Rightarrow f(-1) = 6 \\ f(x) \text{ chia } (x - 2) \text{ dö 21} \Rightarrow f(2) = 21 \end{cases}$$

BAI 4-

Xác định các hằng số a, b sao cho $x^3 + ax + b$ chia cho $x + 1$ thì dư 7 và khi chia cho $x - 3$ thì dư -5.

Hd:

Giai tổng rồi bài 3

BAI 5-

Xác định các hằng số a, b, c sao cho $ax^3 + bx^2 + c$ chia hết cho $x + 2$ và khi chia cho $x^2 - 1$ thì dư $x + 5$.

Hd:

Đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ và $g(x) = ax^3 + bx^2 + c - x - 5$

Ta có $f(x)$ chia hết cho $x + 2 \Leftrightarrow -2$ là nghiệm của $f(x)$

$\Rightarrow f(-2) = 0$

Ta có $g(x)$ chia hết cho $x^2 - 1$

$\Rightarrow g(x)$ chia hết cho $x - 1$ và $g(x)$ chia hết cho $x + 1$

$\Rightarrow g(1) = 0$ và $g(-1) = 0$

BAI 6-

Chứng minh rằng nếu $x^4 - 4x^3 + 5ax^2 - 4bx + c$ chia hết cho $x^3 + 3x^2 - 9x - 3$ thì tổng $a + b + c = 0$.

Hd:

Ta có: $x^4 - 4x^3 + 5ax^2 - 4bx + c$

$= (x^3 + 3x^2 - 9x - 3)(x - 7) + x^2(5a + 9) - x(4b - 60) + c - 21$

Nếu $x^4 - 4x^3 + 5ax^2 - 4bx + c$ chia hết cho $x^3 + 3x^2 - 9x - 3$

thì $x^2(5a + 9) - x(4b - 60) + c - 21 = 0 \quad \forall x$

BAI 7-

Tìm số thặng dư trong phép chia $x^{54} + x^{45} + x^{36} + \dots + x^9 + 1$ cho $x^2 - 1$.

Hd:

$$\text{Nhat } f(x) = x^{54} + x^{45} + x^{36} + \dots + x^9 + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = (x^2 - 1).q(x) + r(x) = (x - 1).(x + 1).q(x) + r(x) \quad (*)$$

Ta có: bậc của $r(x) <$ bậc của $x^2 - 1$

$$\Rightarrow r(x) = ax + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Vì (*) đúng với mọi x nên khi thay $x = 1, x = -1$ ta có:

$$\begin{cases} f(1) = (1 - 1)(1 + 1).q(1) + r(1) = 0.q(1) + a.1 + b = a + b \\ f(-1) = (-1 - 1)(-1 + 1).q(-1) + r(-1) = 0.q(-1) + a.(-1) + b \end{cases}$$

BAI 8-

Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để giá trị của $n^6 - n^4 - 2n^2 + 9$ chia hết cho giá trị của biểu thức $n^4 + n^2$

Hd:

Thực hiện phép chia $n^6 - n^4 - 2n^2 + 9$ cho $n^4 + n^2$, ta được số dư là 9.

Để giá trị $n^6 - n^4 - 2n^2 + 9$ chia hết cho giá trị $n^4 + n^2$ thì :

9 phải chia hết cho $n^4 + n^2$

Những $n^4 + n^2 = n^2(n^2 + 1)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên tích này là một số chẵn.

9 chia hết cho tích này là điều vô lý ! (một số lẻ không thể chia hết cho một số chẵn)

BAI 9-

Tìm số nguyên n sao cho :

a) $n^3 - 2$ chia hết cho $n - 2$

b) $n^3 - 3n^2 - 3n - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$

c) $n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1$ chia hết cho $n^4 - 1$

Hd:

a) Ta có $n^3 - 2 = n^3 - 8 + 6 = (n - 2)(n^2 + 2n + 4) + 6$

Ma $(n - 2)(n^2 + 2n + 4) \approx (n - 2)$, với mọi n khác 2.

Nhờ vậy, 6 phải chia hết cho $n - 2 \rightarrow n - 2 \in \mathcal{O}(6) \rightarrow$ tìm được n !

b) Ta có $n^3 - 3n^2 - 3n - 1 = (n^3 - 1) - 3(n^2 + n + 1) + 3$

$= (n - 1)(n^2 + n + 1) - 3(n^2 + n + 1) + 3$

Tổng tử nhỏ trên, ta có $3 \approx (n^2 + n + 1) \rightarrow$ tìm được n !

c) Các bạn làm tổng tử được không ? chắc chắn làm được !

BAI 10-

Không xếp phép chia, xét xem $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$ có chia hết cho :

- a) $x + 1$
- b) $x - 3$

Hd:

Đặt $f(x) = x^3 - 9x^2 + 6x + 16$

Xét $f(-1)$ và $f(3)$

Nếu $f(-1) = 0$ thì $f(x)$ chia hết cho $x + 1$, ngược lại không !

Tổng tử cho $f(3)$.

BAI 11-

Tìm dơ khi chia $x + x^3 + x^9 + x^{27}$ cho :

- a) $x - 1$
- b) $x^2 - 1$

Hd:

$$\begin{aligned} \text{Biến đổi } x + x^3 + x^9 + x^{27} &= (x^{27} - x) + (x^9 - x) + (x^3 - x) + 3x + x \\ &= x[(x^2)^{23} - 1] + x[(x^2)^4 - 1] + x(x^2 - 1) + 4x \end{aligned}$$

BAI 12-

Tìm dơ khi chia $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7$ cho :

- a) $x + 1$
- b) $x^2 + 1$

Hd:

$$\begin{aligned} \text{Biến đổi } x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7 &= (x^{99} + x) + (x^{55} + x) + (x^{11} + x) - 3x + x + 7 \\ &= x[(x^2)^{47} + 1] + x[(x^2)^{27} + x] + x[(x^2)^5 + 1] - 2x + 7 \end{aligned}$$

BAI 13-

Chứng minh rằng :

- a) $x^{50} + x^{10} + 1$ chia hết cho $x^{20} + x^{10} + 1$
- b) $x^2 - x^9 - x^{1945}$ chia hết cho $x^2 - x + 1$
- c) $x^{10} - 10x + 9$ chia hết cho $(x - 1)^2$
- d) $(x^2 - 3x + 1)^{31} - (x^2 - 4x + 5)^{30} + 2$ chia hết cho $x - 2$

Hd:

- a) $x^{50} + x^{10} + 1 = (x^{50} - x^{20}) + (x^{20} + x^{10} + 1)$
- b) $x^2 - x^9 - x^{1945} = (x^2 - x + 1) - (x^9 + 1) - (x^{1945} - x)$
 $= (x^2 - x + 1) - [(x^3)^3 + 1] - x[(x^6)^{324} - 1]$
- c) $x^{10} - 10x + 9 = (x^{10} - 1) - 10(x - 1)$

BAI 14-

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n :

- a) $(x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ chia hết cho $x(x + 1)(2x + 1)$
- b) $x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$ chia hết cho $(x + 1)^2$
- c) $(x + 1)^{4n+2} + (x - 1)^{4n} + 2$ chia hết cho $x^2 + 1$
- d) $(x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$ chia hết cho $(x + 1)(x - 1)^2$

Hd:

- a) Ta có $x=0$; $x=-1$ là 2 nghiệm của $x(x + 1)(2x + 1)$
 Xét $f(0) = 1 - 0 - 0 - 1 = 0 \rightarrow f(x)$ chia hết cho x
 $f(-1) = 0 - 1 + 2 - 1 = 0 \rightarrow f(x)$ chia hết cho $x + 1$
- b) $x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1 = (x^{2n+1} + 1)^2$ (ã y $2n + 1$ là số lẻ)
- c) $(x + 1)^{4n+2} + (x - 1)^{4n} + 2 = [(x+1)^2]^{2n+1} + [(x - 1)^2]^{2n+1}$
 (ã y $2n + 1$ là số lẻ)
- d) Ta có n và $n+1$ là 2 số tự nhiên liên tiếp $\rightarrow$ có 1 số chẵn và 1 số lẻ
 Ñặt $n = 2k$; $n + 1 = 2k + 1$ (k thuộc $\mathbb{N}$)
 Vậy ã thõc có dạng: $(x^{2k} - 1)(x^{2k+1} - 1)$
 $= (x^2 - 1)A(x)(x - 1)B(x)$
 $= (x - 1)^2(x+1) A(x)B(x)$

BAI 15-

Tìm số dư khi chia $f(x) = x^{50} + x^{49} + \dots + x^2 + x + 1$ cho $x^2 - 1$.

Hd:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^{50} + x^{49} + \dots + x^2 + x + 1 \\
 &= (x^{50} - 1) + (x^{49} - x) + \dots + (x^2 - 1) + x + 1 + 24x + 25 \\
 &= [(x^2)^{25} - 1] + x[(x^2)^{24} - 1] + \dots + (x^2 - 1) + 25x + 26
 \end{aligned}$$

PHẦN 3 CAC BO ÑE – KINH NGHIỆM HỌC TẬP

---oOo---

BO ÑE 1

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH MỘT ÑA THỨC CHIA HẾT CHO MỘT ÑA THỨC KHÁC

-----oOo-----

CÁCH 1

Phân tích ña thức bỏ chia thành nhân tử, trong ñó có một nhân tử là ña thức chia

Ví dụ

Chứng minh rằng $x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$ với mọi số tự nhiên n

Giai

$$\begin{aligned} x^{8n} + x^{4n} + 1 &= x^{8n} + x^{4n} + 1 = (x^{4n} + 1)^2 - (x^{2n})^2 \\ &= (x^{4n} + x^{3n} + 1)(x^{4n} - x^{2n} + 1) \end{aligned}$$

Tiếp tục phân tích:

$$\begin{aligned} x^{4n} + x^{2n} + 1 &= x^{4n} + 2x^{2n} + 1 - x^{2n} \\ &= (x^{2n} + 1)^2 - (x^n)^2 = (x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1) \end{aligned}$$

Vậy $x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$

CÁCH 2

Biến ñoi ña thức bỏ chia thành một tổng các ña thức chia hết cho ña thức chia

Ví dụ

Chứng minh rằng $x^{3m} + 1 + x^{3n} + 2 + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ với mọi số tự nhiên m, n

Giai

$$\begin{aligned} x^{3m} + 1 + x^{3n} + 2 + 1 &= x^{3m} + 1 - x + x^{3n} + 2 - x^2 + x^2 + x + 1 \\ &= x(x^{3m} - 1) + x^2(x^{3n} - 1) + (x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Ta thấy $x^{3m} - 1$ và $x^{3n} - 1$ chia hết cho $x^3 - 1$ nên chia hết cho $x^2 + x + 1$
 Vậy $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$

CÁCH 3

Sử dụng các biện pháp tổng quát.
Chẳng hạn để chứng minh $f(x) : g(x)$,
có thể chứng minh $f(x) + g(x) : g(x)$ hoặc $f(x) - g(x) : g(x)$

Ví dụ

Chứng minh rằng $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ với :

$$f(x) = x^{99} + x^{88} + x^{77} + \dots + x^{11} + 1$$

$$g(x) = x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1$$

Giai

Ta có: $f(x) - g(x) = x^9(x^{90} - 1) + x^8(x^{80} - 1) + \dots + x(x^{10} - 1)$
 các biểu thức trong dấu ngoặc đều chia hết cho $x^{10} - 1$,
 mà $x^{10} - 1$ chia hết cho $g(x)$
 Vậy $f(x)$ chia hết cho $g(x)$

CÁCH 4

**Chứng tỏ rằng mọi nghiệm của đa thức chia
 đều là nghiệm của đa thức bù chia**

Chú ý rằng ô này nói hơi phải xét cả nghiệm bội của đa thức

Ví dụ

Cho $f(x) = (x^2 + x - 1)^{10} + (x^2 - x + 1)^{10} - 2$. Chứng minh rằng $f(x)$ chia hết cho $x^2 - x$

Giai

Đa thức chia có hai nghiệm : $x = 0$ và $x = 1$.

Ta sẽ chứng tỏ rằng $x = 0$ và $x = 1$ cũng là nghiệm của đa thức bù chia

Ta có :

$$f(0) = 1 + 1 - 2 = 0 \text{ nên } f(x) \text{ chia hết cho } x.$$

Ta lại có $f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$ nên $f(x)$ chia hết cho $x - 1$. các nhân tử x và $x - 1$ không chia nhau cho chung

Do đó $f(x)$ chia hết cho $x(x - 1)$

BỘ ÑỀ 2**MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KHÁC
PHÂN TÍCH****MỘT ÑĨA THỨC THANH NHÂN TỐ**

-----oOo-----

1. PHƯƠNG PHÁP ÑẶT AN PHỤ

Trong một số trường hợp, để việc phân tích ñĩa thức thành nhân tồ ñễ dàng thuận lợi, ta phải ñặt an phụ phù hợp.

Ví dụ

$$\text{Phân tích thành nhân tồ } A = (a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 - 4b^2$$

Höông ñan

$$\text{Ñặt: } t = a + b + c$$

$$\text{Ta có: } A = t^2 + (t - 2b)^2 - 4b^2$$

$$A = t^2 + t^2 - 4bt + 4b^2 - 4b^2$$

$$A = 2t^2 - 4bt$$

$$A = 2t(t - 2b)$$

$$A = 2(a + b + c)(a - b + c)$$

2. PHƯƠNG PHÁP GIẢM DẦN SỐ MŨ CỦA LUY THỪA

Phương pháp này chæ sử dụng ñễ dàng cho các ñĩa thức nhỏ $a^7 + a^5 + 1$, $a^8 + a^4 + 1$, ... là những ñĩa thức cơ dạng $a^{3k+2} + a^{3k+1} + 1$. Khi tìm cách giảm dần số mũ của lũy thừa, ta cần chú ý ñến các biểu thức dạng $a^6 - 1$, $a^3 - 1$ là những biểu thức chia hết cho $a^2 + a + 1$.

Ví dụ

$$\text{Phân tích thành nhân tồ } A = a^5 + a^4 + 1$$

Höông ñan

$$\text{Ta có: } A = a^5 + a^4 + a^3 - a^3 + a^2 - a^2 + a - a + 1$$

$$= (a^5 + a^4 + a^3) - (a^3 + a^2 + a) + (a^2 + a + 1)$$

$$= (a^2 + a + 1)(a^3 - a + 1)$$

3. PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT NẪN

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (x \in \mathbb{R}, a_i \text{ là hệ số các hạng tử})$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

Khi đó: $f(x) = g(x), \forall x \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \{0, \dots, n\}$

Ví dụ

Phân tích đa thức $x^3 - 15x - 18$ thành tích một nhân thức bậc nhất và một tam thức bậc hai.

Hướng dẫn

Giả sử đa thức trên có thể phân tích thì: $x^3 - 15x - 18 = (x + a)(x^2 + bx + c)$

$$\Leftrightarrow x^3 - 15x - 18 = x^3 + x^2(a + b) + (ab + c)x + ac$$

Nhân nhất hai đa thức ở 2 vế ta có:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ ab + c = -15 \quad (*) \\ ac = -18 \end{cases}$$

Từ $ac = -18$ ta có thể chọn $a = 3 \Rightarrow c = -6; b = -3$ thỏa mãn (*)

$$\text{Vậy } x^3 - 15x - 18 = (x + 3)(x^2 - 3x - 6)$$

4. PHƯƠNG PHÁP XÉT GIÁ TRỊ RIÊNG

Ví dụ

Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$

Hướng dẫn

Với $x = 2$ ta có $f(2) = 8 - 4 - 28 + 24$

$\Rightarrow f(x)$ chia hết cho $x - 2$ và tìm được

$$f(x) = (x - 2)(x^2 + x - 12)$$

Tìm tiếp với $x = 3; -4 \Rightarrow f(3) = 0; f(-4) = 0$

$$\text{Vậy } f(x) = (x - 2)(x - 3)(x + 4)$$

LỜI KẾT

- Chung ta đều biết rằng - không một nền tài nào, một giải pháp nào là hoàn hảo.
 - Trong phạm vi công tác của mình, với những kiến thức đã thu nhận khi còn đi học và kinh nghiệm thực tiễn khi giảng dạy, tôi viết nền tài này nhằm chỉ một mục đích duy nhất : Mong các Thầy – Cô đã và đang công tác trong lĩnh vực giáo dục nói chung và giảng dạy môn Toán nói riêng, cố gắng không ngừng nghỉ việc nghiên cứu các ứng dụng của các định lý Toán học - trong phạm vi giảng dạy - nhằm bồi dưỡng rèn luyện mình và quan trọng nhất là cố gắng một kiến thức vững chắc để giảng dạy cho các em học sinh ngày một tốt hơn.
 - Chân thành cảm ơn quý Thầy – Cô trong Ban Giám Hiệu nhà trường đã tạo nhiều điều kiện cho tôi được viết bài báo cáo này. Tôi biết cảm ơn những người “Thầy” nhỏ của tôi – những em học sinh Chuyên Toán – chính các bạn đã tạo niềm đam mê trong việc nghiên cứu và học tập của tôi.
- Xin chân thành cảm ơn hai học sinh xuất sắc của tôi, em NGUYỄN THỊ NGỌC LAN và HUYNH KÝ NHẢ (đạt giải thưởng toán học Nguyễn Đình Chung Song) đã hỗ trợ tôi trong quá trình làm nền tài.
- Mong rằng, khi bài báo cáo này được quý Thầy – Cô thông qua nghiệp vụ được, tôi sẽ nhận được nhiều sự góp ý chân thành để ngày càng hoàn thiện mình hơn !

CHÚC CÁC BẠN CỐ GẮNG NHIỀU KINH NGHIỆM TRONG VIỆC GIẢI TOÁN SAU KHI THAM KHẢO TẠI LIỆU NÀY !

TOÁN HỌC KHÔNG CỦA RIÊNG AI – LUÔN BAO DUNG & RỘNG MỞ !

Hoàn chỉnh ngày 25/12/2007

TÁC GIẢ