Chuyên đề phương trình

Phạm Hùng Vương -Học sinh lớp 12C1 trường THPT Phan Đăng Lưu, Nghệ An

• Mở rộng cách nhìn về hệ đối xứng kiểu II.

Trước hết, hãy xem xét cách giải hệ phương trình sau:

Ví dụ 23: $\begin{cases} x^3 + y^2 = 1 \\ y^3 + x^2 = 1 \end{cases}$

Bài giải: Trừ theo vế 2 phương trình của hệ ta thu được:

$$x^3 - y^3 + y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)\left[x^2 + xy + y^2 - (x + y)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x^2 + xy + y^2 = x + y \end{array}\right.$$

Trường hợp: $x = y$ thì thế và giải phương trình:

$$x^3 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}\left[\sqrt[3]{\frac{25}{2} - \frac{3\sqrt{69}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{25}{2} + \frac{3\sqrt{69}}{2}} - 1\right]$$

Cộng theo vế 2 phương trình và kết hợp với $x^2 + xy + y^2 = x + y$ ta được hệ đối xứng loại I:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = x + y \\ x^3 + y^3 + x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - xy = (x + y) \\ (x + y)^3 - 3xy(x + y) + (x + y)^2 - 2xy = 2 \end{cases}$$

Đặt $S = x + y$, $P = xy$, hệ trở thành:

$$\begin{cases} S^2 - P = S \\ S^3 - 3SP + S^2 - 2P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 + S^2 - 2 - (3S + 2)(S^2 - S) = 0 \\ P = S^2 - S \end{cases}$$

$$\begin{cases} (S - 1)(S^2 + 1) = 0 \\ P = S^2 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 0 \\ x = 0, y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm như trên.

• Qua bài giải trên, hẳn chúng ta nhận rõ vai trò của việc kết hợp "cộng" và "trừ" để đưa đến hpt đối xứng kiểu I (đây là một hướng nhìn mới). Việc làm này hoàn toàn có cơ sở. Hãy xem lại câu nói: "Cũng như loại I, loại II cũng có "đối xứng" nhưng là đối xứng giữa 2 phương trình chứ không phải là đối xứng trong từng phương trình như kiểu I". Như vậy, khi cộng theo vế sẽ luôn cho một trong hai phương trình đối xứng kiểu I. Và việc lấy đi nghiệm $(x - y)$ sau khi trừ cũng để lại cho ta 1 phương trình đối xứng nữa.

Ví dụ 24: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + y = 2 \\ y^3 + x = 2 \end{cases}$

• Và đôi lúc việc cộng trừ cũng không đem lại cho ta kết quả khả quan:

Ví dụ 25: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}} = y^2 + x \end{cases}$

Nhận xét: Quả đúng, khi cộng hay trừ ta không thể làm gì với cái căn khủng khiếp kia. Tuy nhiên, một số điểm ta lại thấy rõ và đáng phải nghĩ là trong cái căn bậc 3 kia, có một đẳng thức: $(x - 1)^2 + 8 = x^2 - 2x + 9$. Nhẩm nghiệm $x = y = 1$ và $\sqrt[3]{8} = 2$ (căn đẹp!). Phải liên kết và sử dụng chúng như thế nào?

Bài giải: Cộng theo vế 2 hệ của phương trình: $\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}} = x^2 + y^2$.

Sử dụng đánh giá:

$$\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9} = \sqrt[3]{(x - 1)^2 + 8} \geq 2 \Rightarrow \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} \leq \frac{2xy}{2} = xy$$

Tương tự ta có:

$$\frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} \leq xy \Rightarrow \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} \leq 2xy = x^2 + y^2 - (x - y)^2 \leq x^2 + y^2$$

Vậy hệ có nghiệm khi $x = y = 1$, thử lại thấy đúng, kết luận nghiệm.

• 2 kiểu hệ đối xứng I và II là những dạng rất cơ bản. Tuy nhiên, qua "chế biến" của người ra đề thì không thể nói trước được điều gì. Vì vậy, cần có cái nhìn tổng quan, nhìn nhiều khía cạnh, không nên chỉ biết nhìn hình thức rồi rập khuôn lời giải của dạng. Một số ví dụ thêm:

Ví dụ 26: (Thi thử ĐH CĐ THPT Lê Văn Hưu, Thanh Hóa năm 2011) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 + x - \frac{1}{y} = 2 \\ y - y^2x - 2y^2 = -2 \end{cases}$

Ví dụ 27: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3(2+3y) = 1 \\ (y^3-2)x = 3 \end{cases}$

Ví dụ 28: (Tuyển sinh vào lớp 10 THPT Chuyên Phan Bội Châu 2009-2010) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3(2+3y) = 8 \\ (y^3-2)x = 6 \end{cases}$

Ví dụ 29: (Thi ĐH - CĐ khối B 2003) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3y = \frac{y^2+2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$

Ví dụ 30: (Olympic 30-4-2010) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+22} - \sqrt{y} = y^2 + 2y + 1 \\ \sqrt{y^2+2y+22} - \sqrt{x} = x^2 + 2x + 1 \end{cases}$

Ví dụ 31: (Thi thử ĐH năm 2011, THTT số 379, 2009) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \sqrt{x^2-2x+2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2-2y+2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases}$

Ví dụ 32: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \sqrt{x^2-2x+2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2-2y+2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases}$

III. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP MỚI

1. Phương pháp 01: Hằng số $= t =$ ẩn số:

Xem xét cách giải một số ví dụ sau:

Ví dụ 1: (Hệ phương trình TST Nghệ An 2009-2010) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \\ 4x^2 + 3x - \frac{57}{25} = -y(3x+1) \end{cases}$

Bài giải: Nhân phương trình sau của hệ với 2 rồi cộng theo vế với phương trình đầu ta được:

$$9x^2 + y^2 + 6xy + 6x + 2y = \frac{119}{25} \Leftrightarrow (3x+y+1)^2 = \frac{144}{25} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + y + 1 = \frac{12}{5} \\ 3x + y + 1 = -\frac{12}{5} \end{array}\right.$$

Đến đây thì thế vào phương trình ban đầu ta giải phương trình bậc 2 nữa là xong.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)^2 + y = 3 \\ x^2 + 2xy - 5y^2 - 5x + 13y = 6 \end{cases}$

Bài giải: Nhân 3 vào phương trình đầu rồi trừ theo vế với phương trình sau ta được:

$$2x^2 + 8y^2 - 8xy + 5x - 10y = 3 \Leftrightarrow 2(x-2y)^2 + 5(x-2y) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y+3)(2x-4y-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2y = -3 \\ 2x - 4y = 1 \end{array}\right.$$

Đến đây, thế từng trường hợp rồi thay vào phương trình ban đầu là xong.

• Nhận xét: Hai bài giải trên thật hay, đơn giản với công việc nhân thêm rồi cộng lại, sau đó phân tích thành nhân tử.

Nhưng! Điều chúng ta băn khoăn và thắc mắc ở đây chính là việc biết phải nhân với con số nào. Đây chính là cơ sở để chúng ta đi đến phương pháp ẩn số $= t =$ hằng số.

• Như chúng ta đã biết, cái chưa biết chính là ẩn số. Đây cũng vậy, để biết cần nhân với bao nhiêu, ta đưa thêm ẩn t vào. Do đó, hpt của chúng ta đã có đến tận 3 ẩn với chỉ 2 giả thuyết. Như vậy, phải có thêm một cái gì đó ràng buộc. Nó là gì? Quan sát lại 2 ví dụ trên một lần nữa.

• Phương pháp: Hằng số $= t =$ ẩn số:

- Phạm vi ứng dụng: hệ phương trình 2 ẩn x, y có bậc không quá 2.
- Cơ sở phương pháp: giải phương trình bậc 2.

Xét phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$. Có: $\Delta = b^2 - 4ac$. Nếu $\Delta > 0$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt. Đặc biệt: $\Delta = 0$ phương trình có 1 nghiệm duy nhất, tức là khi đó phương trình tương đương với:

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$$

. Đây chính là cơ sở cơ bản của phương pháp.
(Bài viết sẽ không trình bày giải hệ phương trình tổng quát mà sẽ thực hiện giải chi tiết những ví dụ cụ thể nhằm tạo cho bạn những tu duy, suy nghĩ mới và tự hình thành cho mình những phương pháp và kĩ năng. Hơn nữa việc trình bày tổng quát khá phức tạp)
Hãy xem xét lại 2 ví dụ trên:
Thay vì nhân vào những con số 2 như Ví dụ 1, con số 3 như Ví dụ 2 mà có vẻ dường như ta đã biết, ta sẽ nhân vào đó con số t.
Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{5} \\ 4x^2+3x-\frac{57}{25}=-y(3x+1) \end{cases}$$

Nhân t vào phương trình đầu rồi cộng theo vế với phương trình sau ta có:

$$ty^2+y(3x+1)+(t+4)x^2+3x-\frac{5t+57}{25}=0$$

Xem đây là phương trình bậc 2 ẩn y, xét:

$$\Delta_y=(3x+1)^2-4t\left[(t+4)x^2+3x-\frac{5t+57}{25}\right]$$
$$=(9-4t^2-16t)x^2+6x(1-2t)+1+\frac{4t(5t+57)}{25}$$

Để xuất hiện nhân tử như trên thì $\Delta_y=f^2(x)$ và như vậy thì:

$$(9-4t^2-16t)x^2+6x(1-2t)+1+\frac{4t(5t+57)}{25}=f^2(x)$$
$$\Leftrightarrow \Delta'_x=0\Leftrightarrow 9(1-2t)^2-4(9-16t-4t^2)\left[1+\frac{4t(5t+57)}{25}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow (1-2t)\left[1-2t-4(9+2t)\left[1+\frac{4t(5t+57)}{25}\right]\right]=0$$

Dễ thấy $t=\frac{1}{2}$ là giá trị thỏa mãn. • Để có lời giải gọn và đẹp thì khi trình bày bài giải, chúng ta nhân thêm 2 vào phương trình sau thay vì nhân $\frac{1}{2}$ vào phương trình đầu. Từ đó ta có lời giải gọn và đẹp như trên.
Xem lại *ví dụ 2:* Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-y)^2+y=3 \\ x^2+2xy-5y^2-5x+13y=6 \end{cases}$$

Chúng ta cũng thực hiện công việc nhân t như trên: Nhân t vào phương trình đầu rồi cộng theo vế 2 phương trình ta được:

$$(t-5)y^2+y\left[2x(t-1)+t+13\right]+(t+1)x^2-5x-3(t+2)$$
$$\Delta_y=\left[2x(t-1)+t+13\right]^2-4(t-5)\left[(t+1)x^2-5x-3(t+2)\right]$$
$$=8(3+t)x^2-4x(t^2+7t+12)+9t^2+2t+249=f^2(x)$$

Khi xem xét phương trình này thì nhận thấy ngay $t=-3$ sẽ cho ta $f^2(x)=18^2$ vì để ý $t^2+7t+12=(t+3)(t+4)$. Từ đó ta có lời giải.
Một số ví dụ thêm:
Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2=xy+x+y \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$$

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+2y^2=3x-2 \\ 2(x+y-1)=2xy \end{cases}$$

Ví dụ 5: (THTT số 379, tháng 1 năm 2011) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2=(5x+4)(4-x) \\ y^2-5x^2-4xy+16xy-8y+16=0 \end{cases}$ *Ví dụ 6:* (ĐH CĐ khối A, năm 2008) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\frac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\frac{5}{4} \end{cases}$$

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = xy + x + y \end{cases}$$

• Một số lưu ý khi sử dụng phương pháp (Xem ở phần tản mạn)
Cần linh hoạt trong việc chọn lựa nhân t ở phương trình nào để thuận lợi trong việc phân tích.

. . . . . .

• Mở rộng phương pháp:

• Cở sở suy luận: bạn có nghĩ, liệu có bắt buộc bậc của x và y trong hệ phải là bậc 2 cả. Đúng, để luôn giải được thì nhất thiết phải yêu cầu là cả 2 đều bậc 2. Tuy nhiên, cái hay của Toán chính là đa dạng, muôn màu muôn vẻ, bắt buộc chúng ta phải luôn tinh tế, sáng tạo hơn nữa trong phương pháp và suy nghĩ. Biết 1 chưa chắc đã giải được 10. Trước hết, hãy xem cái hệ sau.

Ví dụ 8: (Thi thử ĐH CĐ năm 2011) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$$

Bậc cao nhất của x là 4, nhưng bậc của y lại là 2. Hơn thế nữa, nếu quan sát tinh ý hơn:

$$\begin{cases} x^4 + 2x^2(xy) + (xy)^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$$

(thì nên gom và xem xy là ẩn) Nhân thêm hằng số t vào phương trình sau rồi cộng theo vế với phương trình đầu, ta được:

$$x^2y^2 + 2xy(t + x^2) + x^4 + tx^2 - 2x(1 + 3t) - 9 - 6t = 0$$

$$\Delta'_{xy} = (t + x^2)^2 - x^4 - tx^2 + 2x(1 + 3t) + 9 + 6t = tx^2 + 2x(1 + 3t) + (t + 3)^2 = f^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \Delta'_x = (1 + 3t)^2 - 4t(t + 3)^2 = 0$$

Dễ thấy ngay $t = 1$ là một nghiệm của phương trình nên hệ số cần nhân chính là 1.
Việc trình bày lời giải còn lại xin dành cho bạn đọc.

• Hệ này khá đặc biệt nhưng vì rút gọn ta thu được Δ_{xy} là một tam thức bậc 2. Qua đó cơ sở phương pháp của chúng ta vẫn áp dụng được. Nhưng. Ví dụ sau thì sao?

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 + x^2y^2 = 19x^2 \\ xy^2 + y = -6x^2 \end{cases}$$

• Nhận xét: chú ý bậc cao nhất của y như trên vẫn là bậc 2. Nhưng có vấn đề gì cần bàn ở đây? Nháp: Nhân t vào phương trình sau rồi cộng lại.
Còn tiếp ...