Chứng minh rằng với mọi $a \in \mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+a}{x^2+x+1}$ luôn có ba điểm uốn thẳng hàng.

Ta có $y' = \dfrac{(x^2+x+1)-(x+a)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = -\dfrac{x^2+2ax+a-1}{(x^2+x+1)^2}$.

Suy ra $y'' = \dfrac{2\left(x^3+3ax^2+3(a-1)x-1\right)}{(x^2+x+1)^3}$

Ta sẽ chứng minh rằng ph□ơng trình t□ơng ứng là $x^3+3ax^2+3(a-1)x-1=0$ (*) có đúng ba nghiệm phân biệt.

Đặt $f(x) = x^3+3ax^2+3(a-1)x-1, x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = -1 < 0, f(-1) = 1 > 0, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ và đồng thời hàm số này liên tục trên tập số thực nên ph□ơng trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt thuộc các khoảng $(-\infty;-1),(-1;0),(0;+\infty)$.

Do đó, ph□ơng trình (*) có ba nghiệm phân biệt hay đồ thị đã cho có ba điểm uốn.

Giả sử hoành độ của một trong các điểm uốn của đồ thị hàm số đã cho là x_0 và đây cũng là nghiệm của ph□ơng trình (*) hay $x_0^3+3ax_0^2+3(a-1)x_0-1=0$; khi đó, tung độ t□ơng ứng của điểm này chính là $y_0 = \dfrac{x_0+a}{x_0^2+x_0+1}$. Ta sẽ tìm một quan hệ tuyến tính giữa x_0, y_0.

Từ điều kiện của x_0, ta thấy rằng

$$x_0^3+3ax_0^2+3ax_0+3a-1 = 3x_0+3a \Leftrightarrow (x_0+3a-1)(x_0^2+x_0+1) = 3(x_0+a).$$

Suy ra $y_0 = \dfrac{(x_0+3a-1)(x_0^2+x_0+1)}{3(x_0^2+x_0+1)} = \dfrac{x_0+3a-1}{3}$.

Do đó, các điểm uốn của đồ thị cũng thỏa mãn quan hệ tuyến tính nh□ trên, tức là chúng thẳng hàng. Đ□ờng thẳng đi qua các điểm uốn t□ơng ứng chính là $y = \dfrac{x+3a-1}{3}$

Ta có đpcm.