

CỰC TRỊ HÀM SỐ

Định nghĩa: Hàm số $f(x)$ xác định trên $D \subseteq \mathbb{R}$

Điểm $x_o \in D$ được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a; b) \subset D$ sao cho $x_o \in (a; b)$ và $f(x_o) > f(x), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_o\}$

Điểm $x_1 \in D$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$ nếu tồn tại một khoảng $(a; b) \subset D$ sao cho $x_1 \in (a; b)$ và $f(x_1) < f(x), \forall x \in (a; b) \setminus \{x_o\}$

Cách xác định điểm cực trị của hàm số:

Để xác định được các điểm cực đại, cực tiểu của hàm số các em cần nắm chắc ba định lý sau:

Định lý 1: (Điều kiện cần để hàm số có cực trị)

Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_o và hàm số có đạo hàm tại x_o , thì $f'(x_o) = 0$
(Tuy nhiên hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm, chẳng hạn với hàm $y = |x|$, đạt cực trị tại $x_o = 0$ nhưng không có đạo hàm tại đó)

Định lý 2: (Điều kiện đủ để hàm số có cực trị)

- Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a, x_o)$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (x_o; b)$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_o (Đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi qua x_o)

x	a	x	b
y'	$-$	0	$+$
y		y_{CT}	

Ta nói, đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $M(x_o, y_{CT})$

- Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a, x_o)$ và $f'(x) < 0, \forall x \in (x_o; b)$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_o
(Đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm khi qua x_o)

x	a	x	b
y'	$+$	0	$-$
y		y_{CD}	

Ta nói đồ thị hàm số có điểm cực đại là $M(x_o; y_{CD})$

Chú ý: Không cần xét hàm số $f(x)$ có hay không đạo hàm tại x_o

Ví dụ: Hàm số :

$$y = |x| = \begin{cases} -x & \text{Nếu } x \in (-\infty; 0) \\ x & \text{Nếu } x \in (0; +\infty) \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} -1 < 0 & \text{Nếu } x \in (-\infty; 0) \\ 1 > 0 & \text{Nếu } x \in [0; +\infty) \end{cases}$$

Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x_o = 0$.

Định lý 3:

- Nếu $f'(x_o) = 0$ và $f''(x_o) > 0$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_o

- Nếu $f'(x_o) = 0$ và $f''(x_o) < 0$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_o

Từ đó các em có cách xác định cực trị như sau:

Bước 1: Tính đạo hàm y' , tìm những điểm mà tại đó $y' = 0$ hoặc y' không xác định

Bước 2:

Cách 1: Xét dấu y' dựa vào định lí 2 để kết luận điểm cực đại, cực tiểu (Thường dùng cách này)

Cách 2: Xét dấu $y''(x_0)$ (x_0 là nghiệm của y') dựa vào định lí 3 để kết luận

Chú ý: Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

Dấu của đạo hàm không phụ thuộc vào x , hay độc lập với x nên hàm số luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó. Do đó hàm số luôn không có cực trị.

B – Giải toán

I - Bài toán cực trị với hàm đa thức bậc ba:

Kiến thức bổ sung:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (C) \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c \quad (a \neq 0)$$

Số lượng điểm cực trị:

- Nếu $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt ($\Delta > 0$) thì hàm số có hai cực trị (một cực đại và một cực tiểu)

- Nếu $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm ($\Delta \leq 0$) thì hàm số không có cực trị.

Như vậy khi đề bài hỏi các câu hỏi như: Tìm m để hàm số có cực trị hoặc có hai điểm cực trị hoặc có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu... thì điều kiện tương đương đều là $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Đường thẳng qua hai điểm cực trị

Trong trường hợp hàm số có hai điểm cực trị, ta viết được đường thẳng đi qua hai điểm cực trị như sau:

Bước 1: Thực hiện phép chia đa thức: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cho $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ được thương là $q(x)$ và phần dư là $r(x) = mx + n$, ta được:

$$y = y'.q(x) + r(x)$$

Bước 2: Chứng minh đường thẳng $(d): y = r(x) = mx + n$ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị. Giả sử hai điểm cực trị là $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (Chú ý: x_1, x_2 là nghiệm của y' nên $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$)

Khi đó M, N thuộc (C) , do đó:

$$y_1 = y'(x_1).q(x_1) + r(x_1) = r(x_1) \Rightarrow y_1 = mx_1 + n \Rightarrow M \in (d)$$

$$y_2 = y'(x_2).q(x_2) + r(x_2) = r(x_2) \Rightarrow y_2 = mx_2 + n \Rightarrow N \in (d)$$

Tức là (d) là đường thẳng đi qua hai cực trị.

Chú ý: Trong một số trường hợp đặc biệt $y' = 0$ có "nghiệm đẹp" tức là có thể tìm cụ thể tọa độ các điểm cực trị thì không nên máy móc viết phương trình các điểm cực trị như trên mà nếu cần thì

ta sử dụng cách viết phương trình đường thẳng qua hai điểm $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Ví dụ 1.1: (ĐH An Ninh - 2000)

Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 2$. (C).

Tìm a để điểm cực đại cực tiểu của đồ thị hàm số nằm về hai phía của đường tròn:

$$(\alpha) : x^2 + y^2 - 2ax - 4ay + 5a^2 - 1 = 0$$

Phân tích:

Để giải quyết được một bài toán bất kỳ các em cần hiểu được hết các thông tin trong bài toán. Chẳng hạn với bài toán trên đề toán có nhắc đến cực trị, đường tròn và vị trí tương đối của cực trị và đường tròn (nằm về hai phía) thì các em cần biết cực trị là gì, xác định cực trị như thế nào? Cho phương trình đường tròn thì xác định được những yếu tố gì? Xét vị trí tương đối như thế nào? (có nhiều em không hiểu nằm về hai phía của đường tròn là như thế nào!! Đó là phía trong và phía ngoài nhé)

(Những thao tác trên rất hữu ích khi các em gặp những bài toán có cách hỏi lạ)

- Hàm số (C) không chứa tham số, tức là ta có thể tìm được cụ thể tọa độ điểm cực trị. Như vậy yêu cầu bài toán chỉ còn là bài toán lớp 10: "xét vị trí tương đối của điểm cho trước với đường tròn"

- Đã biết phương trình đường tròn (α) , do đó ta tìm được tâm I và bán kính R của nó (nhắc lại: điểm M nằm trong đường tròn khi $IM < R$, điểm M nằm ngoài khi $IM > R$)

- Giả sử hai điểm cực trị là M_1, M_2 nằm về hai phía của (α) phải chăng ta phải xét hai trường hợp: TH1: M_1 nằm trong ($IM_1 < R \Leftrightarrow IM_1^2 < R^2 \Leftrightarrow IM_1^2 - R^2 < 0$), M_2 nằm ngoài ($IM_2 > R \Leftrightarrow IM_2^2 > R^2 \Leftrightarrow IM_2^2 - R^2 > 0$) TH2: M_1 nằm ngoài ($IM_1 > R \Leftrightarrow IM_1^2 - R^2 > 0$), M_2 nằm trong ($IM_2^2 < R^2 \Leftrightarrow IM_2^2 - R^2 < 0$)?

Chú ý rằng hai trường hợp trên tương đương với điều kiện $IM_1^2 - R^2$ và $IM_2^2 - R^2$ trái dấu tức là Điều kiện thỏa mãn yêu cầu chỉ cần: $(IM_1^2 - R^2)(IM_2^2 - R^2) < 0$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
			2				$+\infty$
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$			-2			

Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $M_1(0; 2)$ và điểm cực tiểu là $M_2(2; -2)$

Đường tròn $(\alpha) : x^2 + y^2 - 2ax - 4ay + 5a^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 1$ có tâm $I(a, 2a)$ và bán kính $R = 1$

$\overrightarrow{IM_1} = (-a; 2 - 2a) \Rightarrow IM_1^2 = a^2 + (2 - 2a)^2 = 5a^2 - 8a + 4$

$\overrightarrow{IM_2} = (2 - a; -2 - 2a) \Rightarrow IM_2^2 = (2 - a)^2 + (-2 - 2a)^2 = 5a^2 + 4a + 8$

Ta có: Một điểm M bất kỳ nằm phía trong đường tròn (α) thì $IM < R \Leftrightarrow IM^2 < R^2 \Leftrightarrow IM^2 - R^2 < 0$

Tương tự: điểm M nằm phía ngoài (α) thì $IM > R \Leftrightarrow IM^2 > R^2 \Leftrightarrow IM^2 - R^2 > 0$

Do đó, để điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số nằm về hai phía của đường tròn thì

$(IM_1^2 - R^2)(IM_2^2 - R^2) < 0$

$\Leftrightarrow (5a^2 - 8a + 4 - 1)(5a^2 + 4a + 8 - 1) < 0 \Leftrightarrow (5a^2 - 8a + 3)(5a^2 + 4a + 7) < 0 (*)$

Ta thấy: $5a^2 + 4a + 7 = \left(a\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{31}{5} > 0$

Nên (*) $\Leftrightarrow 5a^2 - 8a + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} < a < 1$

Vậy với $\frac{3}{5} < a < 1$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét:

- Nếu bài toán này là bài toán phụ của bài khảo sát hàm số thì bước tìm các điểm cực trị là không cần thiết

- Bất phương trình (*) là bất phương trình tích có thể giải dễ dàng bằng cách lập bảng xét dấu ngay cả trong trường hợp không khẳng định được một nhân tử đã dương hay âm như bài toán trên.

(Thực tế cho thấy nhiều em có kiến thức không chắc khi nhìn thấy (*) có vẻ "khủng khiếp" quá mà bỏ cuộc!!!)

- Trong lời giải trên nếu tinh ý phát hiện ra $IM_2^2 = 5a^2 + 4a + 8 > R (= 1)$ thì lời giải sẽ ngắn gọn hơn:

Vì $IM_2^2 = 5a^2 + 4a + 8 = \left(a\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{36}{5} > R$

Nên điểm M_2 luôn nằm ngoài đường tròn. Do đó để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì điểm M_1 phải nằm trong đường tròn, tức là:

$IM < R \Leftrightarrow 5a^2 - 8a + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} < a < 1$.

Ví dụ 1.2: Cho hàm số: $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ (C), m là tham số thực.

Tìm m để hàm số (C) có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$

Phân tích:

Bài toán có hai yêu cầu:

1) Có cực trị tại x_1, x_2

2) Thỏa mãn: $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$

Yêu cầu thứ nhất xuất hiện trong hầu hết các câu hỏi về cực trị, nếu chưa có câu trả lời các em hãy xem lại 1 chút lý thuyết Số lượng điểm cực trị!

Với yêu cầu thứ hai cần hiểu rằng hàm số đạt cực trị tại $x_1; x_2$ thì $x_1; x_2$ còn là nghiệm của $y' = 0$ (là một phương trình bậc hai), hiểu được điều đó thì yêu cầu này chỉ còn là một bài toán lớp 9 'Tìm m để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$ '. Sự xuất hiện tổng và tích hai nghiệm của phương trình bậc hai là gợi ý thích hợp cho định lý Viet

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1)$$

Để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thì $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 + 4(3m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{-2\sqrt{13}}{13}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}; +\infty\right)$$

Theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = 1 - 3m^2 \end{cases}$, Do đó:

$$x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow 1 - 3m^2 + 2m = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = \frac{2}{3} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy với $m = \frac{2}{3}$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chú ý: Sau khi tìm ra m cần đối chiếu với điều kiện ban đầu để loại nghiệm không thỏa mãn. Và chú ý kết luận nghiệm của bài toán.

Ví dụ 1.3: Cho hàm số: $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$ (C_m)

Tìm m để (C_m) có hai điểm cực trị và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị vuông góc với đường thẳng

$$(d) : y = 3x - 7$$

Phân tích:

Có thể thấy bài toán có 2 yêu cầu, nhưng ta có thể tách bài toán thành 3 "phần":

- Có cực trị

- Đường thẳng Δ qua hai cực trị

- $(d) \perp \Delta \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$ (k_1, k_2 là hệ số góc của Δ và (d))

Việc phân tích yêu cầu bài toán thành các ý nhỏ như trên sẽ giúp các em đạt điểm tối đa trong khả năng có thể. Như với bài toán trên, ngay cả khi các em chưa hình dung được cách giải quyết "phần" 3, tức là khi nào đường thẳng qua hai cực trị vuông góc với (d) thì việc giải quyết hai "phần" đầu cũng có thể các em sẽ được đến 0.5/1 điểm!

LG:

TXD: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 + 2mx + 7$$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 21 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -\sqrt{21}) \cup (\sqrt{21}; +\infty)$$

Thực hiện phép chia y cho y' ta có: $y = \frac{1}{9}(3x + m) \cdot y' + \frac{2}{9}(21 - m^2)x + 3 - \frac{7m}{9}$

Gọi $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị của (C_m) , ta có: $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$. Do đó:

$$y_1 = \frac{2}{9}(21 - m^2)x_1 + 3 - \frac{7m}{9} \Rightarrow M_1 \in (C_m)$$

$$y_2 = \frac{2}{9}(21 - m^2)x_2 + 3 - \frac{7m}{9} \Rightarrow M_2 \in (C_m)$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là là: $(\Delta) : y = \frac{2}{9}(21 - m^2)x + 3 - \frac{7m}{9}$

Để $(\Delta) \perp (d)$ thì: $\frac{2}{9}(21 - m^2) \cdot 3 = -1 \Leftrightarrow m = \pm \frac{3\sqrt{10}}{2}$

Vậy với $m = \pm \frac{3\sqrt{10}}{2}$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét: Trên đây là một ví dụ mà việc nhận ra cần phải viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị khá rõ ràng khi đề bài nhắc tới "đường thẳng đi qua hai cực trị vuông góc với..." nhưng trong một số trường hợp, điều đó sẽ được ẩn đi đòi hỏi một chút phân tích của học sinh trong giải toán.

Ví dụ 1.4: Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$ (C_m)

Tìm m để (C_m) có hai điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị là nhỏ nhất.

Phân tích:

Bài toán có 2 yêu cầu rất rõ ràng, và vấn đề nằm ở chỗ khoảng cách giữa hai điểm cực trị.

Với hai điểm cực trị $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ khoảng cách được tính bởi công thức

$$M_1 M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Vậy cần xử lý y_1, y_2 thế nào cho khéo, phải chăng ta sử dụng $M_1, M_2 \in (C_m)$

$$y_1 = \frac{1}{3}x_1^3 - mx_1^2 - x_1 + m + 1 \text{ và}$$

$$y_2 = \frac{1}{3}x_2^3 - mx_2^2 - x_2 + m + 1$$

Bằng cách tính thử sẽ thấy x_1, x_2 không phải là các giá trị "đẹp" do đó các biểu thức y_1, y_2 ở trên rất "cồng kềnh". Vậy liệu còn một con đường nào khác đơn giản hơn, phải chăng có thể thay tọa độ của M_1, M_2 vào một phương trình nào đơn giản hơn? M_1, M_2 còn nằm trên đường nào?

Chỉ cần luôn nhớ rằng M_1, M_2 là các điểm cực trị thì có lẽ đường thẳng (Δ) đi qua hai điểm cực trị sẽ xuất hiện trong định hướng của các em! Và tất nhiên, khi thay tọa độ M_1, M_2 vào phương trình (Δ) thì mọi chuyện sẽ trở lên đơn giản hơn rất nhiều.

LG:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = x^2 - 2mx - 1$$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 + 1 > 0$ (đúng $\forall m \in \mathbb{R}$)

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y = \frac{1}{3}(x - m) \cdot y' - \frac{2}{3}(m^2 + 1)x + \frac{2}{3}m + 1$

Gọi $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của (C_m) , ta có: $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$. Do đó:

$$y_1 = -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x_1 + \frac{2}{3}m + 1 \text{ và}$$

$$y_2 = -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x_2 + \frac{2}{3}m + 1$$

Khi đó:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \frac{4}{9}(m^2 + 1)^2(x_2 - x_1)^2}$$

$$= \sqrt{\left[1 + \frac{4}{9}(m^2 + 1)^2\right] [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]}$$

$$\text{Theo định lí Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow M_1M_2 = \sqrt{\left[1 + \frac{4}{9}(m^2 + 1)^2\right] (4m^2 + 4)}$$

Để M_1M_2 nhỏ nhất thì $f(m) = \left[1 + \frac{4}{9}(m^2 + 1)^2\right] (4m^2 + 4)$ phải đạt giá trị nhỏ nhất

$$f(m) = \left[1 + \frac{4}{9}(m^2 + 1)^2\right] (4m^2 + 4) \geq \left(1 + \frac{4}{9}\right) \cdot 4 = \frac{52}{9}$$

$$\Rightarrow \min f(m) = \frac{52}{9}$$

khi $m = 0$

Vậy với $m = 0$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ví dụ 1.5: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2 - m + 1$

Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 7, với $C(-2; 4)$

Phân tích:

- Vấn đề là sử dụng giả thiết $S_{ABC} = 7$ như thế nào?? Muốn sử dụng được nó ta cần biết có những cách nào để tính diện tích, và sử dụng công thức nào trong trường hợp này?

- Điểm C đã biết, đường thẳng AB viết được (Đường thẳng qua hai điểm cực trị). Do đó khoảng cách từ C đến AB ta tính được theo m . Độ dài đoạn thẳng AB ta cũng tính theo m dựa vào định lí Viet (Xem ví dụ trên). Những điều đó sẽ gợi ý cho ta nghĩ đến công thức tính diện tích liên quan đến điểm C và đường thẳng AB và độ dài đoạn AB:

$$S = \frac{1}{2}h_C \cdot AB = \frac{1}{2}d(C, AB) \cdot AB$$

- Tuy nhiên đối với bài toán đang xét có một điểm đặc biệt đó là $y' = 0$ có nghiệm đẹp tức là có thể tìm cụ thể tọa độ của A, B do đó việc giải quyết bài toán sẽ đơn giản đi rất nhiều. Nhưng việc phân

tích như trên sẽ giúp các em không bị lúng túng khi gặp bài toán có "nghiệm xấu" .

LG:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2), y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó là $A(0; m^2 - m + 1), B(2; m^2 - m - 3)$

$$\Rightarrow AB^2 = 2^2 + (-4)^2 = 20$$

Đường thẳng qua hai điểm A, B là: $\frac{x-0}{2} = \frac{y-m^2+m-1}{-4} \Leftrightarrow 2x + y - m^2 + m - 1 = 0$

Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}d(C, AB) \cdot AB = 7$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{|m^2 - m + 1|}{\sqrt{5}} 2\sqrt{5} = 7 \Leftrightarrow |m^2 - m + 1| = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy với $m \in \{3; -2\}$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ví dụ 1.6: Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 + (m^2 - m + 2)x^2 + (3m^2 + 1)x + m - 5$. Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$

LG:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Điều kiện cần:

Ta có: $y' = x^2 + 2(m^2 - m + 2)x + 3m^2 + 1$.

Suy ra: $y'' = 2x + 2(m^2 - m + 2)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ thì $\begin{cases} y'(-2) = 0 \\ y''(-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 3 = 0 \\ m^2 - m > 0 \end{cases} \Rightarrow m = 3$.

* Điều kiện đủ:

Với $m = 3$ ta có hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 + 8x^2 + 28x - 2$.

Ta có: $y' = x^2 + 16x + 28 \Rightarrow y'' = 2x + 16$.

Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 16x + 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -14 \end{cases}$.

Mặt khác: $y''(-2) = 2(-2) + 16 = 12 > 0$. Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m = 3$.

Nhận xét: Đây là một bài toán khá đơn giản, tuy nhiên lỗi sai hay mắc phải ở dạng toán này là chỉ xét điều kiện cần và kết luận luôn bài toán!

Bài tập tự luyện:

Bài 1.1: Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - (m + 1)x^2 + \frac{3}{4}(m + 1)^3$

Tìm m đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu sao cho hai điểm đó nằm về hai phía của đường tròn (C)

$$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$$

Bài 1.2: Cho hàm số: $y = x^3 - mx^2 + (m^2 - 2m)x + 1$

Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm cùng phía chứa gốc tọa độ đối với đường thẳng $(d): x = -1$

Bài 1.3: Cho hàm số: $y = -x^3 + (2m + 1)x^2 - (m^2 - 3m + 2)x - 4$

Tìm m để hàm số có các điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung

Bài 1.4: Tìm m để hàm số

$$y = x^3 - \frac{3m}{2}x^2 + m$$

có các CĐ và CT nằm về hai phía của đường thẳng $y = x$

Bài 1.5: Cho hàm số: $y = x^3 - 3(m + 1)x + 9x - m$

Tìm m để hàm số đạt cực đại và cực tiểu tại hai điểm phân biệt x_1, x_2 sao cho: $|x_1 - x_2| \leq 2$.

Bài 1.6: Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - (m - 1)x^2 + 3(m - 2)x + \frac{1}{3}$

Tìm m để hàm số đạt cực đại cực tiểu tại x_1, x_2 sao cho $x_1 + 2x_2 = 1$

Bài 1.7: Cho hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)x^2 + \frac{3 \sin 2a}{4}x$$

Tìm a để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2$

Bài 1.8: Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + (m^2 - 3)x + 5m + 1$

Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị sao cho hoành độ của chúng là chiều dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông có độ dài cạnh huyền là $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Bài 1.9: Cho hàm số: $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$

Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

Bài 1.10: Tìm m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m - 1)x^2 + 6m(1 - 2m)x$ có các điểm cực trị nằm trên đường thẳng $y = -4x$

Bài 1.11: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có cực trị, và đường thẳng đi qua các điểm cực trị song song với đường thẳng $y = -4x + 3$.

Bài 1.12: Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$

Tìm m để hàm số có cực đại cực tiểu, và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tạo với đường thẳng $(d): x + 4y - 5 = 0$ một góc $\alpha = 45^\circ$.

Bài 1.13: Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$

Tìm để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị, và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân

Bài 1.14: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có cực đại cực tiểu cách đều đường thẳng $y = x - 1$

Bài 1.15: Tìm m để đồ thị hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B sao cho góc $\widehat{AOB} = 120^\circ$

Bài 1.16: Cho hàm số: $y = mx^3 - 3mx^2 + (2m + 1)x + 3 - m$ (C_m) Tìm tất cả các giá trị của m sao cho C_m có hai điểm cực trị. CMR: đường thẳng đi qua hai điểm cực trị luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 1.17: Cho hàm số: $y = 2x^2 - 3(m + 1)x^2 + 6mx + m^3$ Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC vuông tại C, với $C(4;0)$

Bài 1.18: Cho hàm số: $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 4m - 1$

Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O.

II - Bài toán cực trị với hàm đa thức bậc 4 trùng phương:

Kiến thức bổ sung:

$$y = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b) \quad (a \neq 0)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-b}{2a} \end{cases}$$

Số lượng điểm cực trị:

- Nếu $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt ($\frac{-b}{2a} > 0$) thì hàm số có ba điểm cực trị.
- Nếu $y' = 0$ có một nghiệm $x = 0$ ($\frac{-b}{2a} \leq 0$) thì hàm số chỉ có một điểm cực trị.

Tính chất:

Khi hàm số có 3 điểm cực trị: $A(0; c), B(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; y_1), C(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; y_2)$ thì:

- Ta tính được: $y_1 = y_2$
- B và C đối xứng nhau qua trục Oy , Điểm A nằm trên trục Oy do đó tam giác ABC cân tại A .

Ví dụ 2.1: Cho hàm số: $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$

Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông.

Phân tích:

Trước hết các em vẫn cần hình dung bài toán có hai yêu cầu và thực hiện từng yêu cầu trong khả năng của mình, khó khăn nếu có thì nằm ở yêu cầu thứ hai "là ba đỉnh của tam giác vuông"

Cần chú ý rằng nếu một tam giác cân mà vuông thì nó phải vuông tại đỉnh của tam giác cân đó. Thứ hai cần xử lý thông tin tam giác vuông như thế nào? Có nhiều cách:

Tam giác ABC vuông tại $A \Leftrightarrow AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

LG:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 4x^3 - 4(m+1)xy' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m + 1 \end{cases}$$

Để hàm số có ba điểm cực trị thì $y' = 0$ phải có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là: $A(0; m^2), B(\sqrt{m+1}; -2m-1), C(-\sqrt{m+1}; -2m-1)$

Ta thấy: Điểm B và C đối xứng nhau qua trục Oy và điểm A nằm trên trục Oy do đó tam giác ABC cân tại A

Để tam giác ABC vuông thì nó phải vuông tại $A \Leftrightarrow AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (*)

$$\overrightarrow{AB} = (\sqrt{m+1}; -(m+1)^2); \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{m+1}; -(m+1)^2)$$

$$(*) \Leftrightarrow -(m+1) + (m+1)^4 = 0 \Leftrightarrow (m+1)((m+1)^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (loại)} \\ m = 0 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy với $m = 0$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét: Nếu cảm thấy lập luận chứng minh tam giác ABC cân như trên khiến các em thấy "khó chịu" thì các em hoàn toàn có thể thực hiện theo cách rất tự nhiên đó là lần lượt tính độ dài các cạnh và chỉ ra được $AB = AC$ sau đó khi đã có độ dài các cạnh thì các em có thể xử lý thông tin tam giác ABC vuông tại A bằng cách sử dụng định lý Pitago: $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Ví dụ 2.2: Cho hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$

Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích $S = 4$

Phân tích:

Vấn đề cần xử lý thông tin diện tích tam giác $S = 4$

Ta đã biết nếu hàm số này có ba điểm cực trị A, B, C thì ba điểm cực trị đó tạo thành tam giác cân (giả sử tại A), điều này có làm cho việc tính diện tích trở lên dễ dàng hay không?

Tam giác ABC cân tại A , thế thì nếu M là trung điểm của BC thì $AM \perp BC \perp S_{ABC} = \frac{1}{2}AM.BC$, tọa độ các điểm A, B, C đã biết, tọa độ M ta tìm được (là trung điểm BC) do đó ta tính được diện tích tam giác ABC , từ đó "ép" cho nó bằng 4 thì ta sẽ tìm được m thỏa mãn điều kiện bài toán.

LG:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 4x^3 - 4mxy' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$$

Để hàm số có ba điểm cực trị thì $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$ Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0; 2m + m^4), B(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m), C(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m)$

Ta thấy: Hai điểm B, C đối xứng nhau qua trục Oy , điểm A nằm trên trục Oy , do đó tam giác ABC cân tại A

Gọi M là trung điểm của BC suy ra AM là trung tuyến đồng thời là đường cao trong tam giác ABC

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AM.BC = 4 (*)$$

Ta có: $M(0; m^4 - m^2 + 2m)$

$$\overrightarrow{AM} = (0; -m^2) \Rightarrow AM = m^2 \overrightarrow{BC} = (-2\sqrt{m}; 0) \Rightarrow BC = 2\sqrt{m}$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2}m^2.2\sqrt{m} = 4 \Leftrightarrow m^2\sqrt{m} = 4 \Leftrightarrow m^5 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt[5]{16} \text{ thỏa mãn} \\ m = -\sqrt[5]{16} \text{ loại} \end{cases}$$

Vậy với $m = \sqrt[5]{16}$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ví dụ 2.3: Cho hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$

Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị, sao cho đường tròn đi qua ba điểm cực trị đó có bán kính bằng 1

Phân tích:

Giả sử ba điểm cực trị là A, B, C và tam giác ABC cân tại A . Khi đó tâm I đường tròn (C) qua ba điểm cực trị (chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC) sẽ nằm trên trục Oy (Oy là đường trung trực của BC)

Do đó để đường tròn (C) có bán kính bằng 1 thì điều kiện tương đương sẽ là:

$$IA = IB = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} IA = 1 \\ IB = 1 \end{cases}$$

Giải hệ điều kiện này ta sẽ tìm được m .

LG:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$$

Để hàm số có ba điểm cực trị thì $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0; m-1)$, $B(-\sqrt{m}; -m^2+m-1)$, $C(\sqrt{m}; -m^2+m-1)$

x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$	0	$\sqrt{m}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	$m-1$	$+\infty$	$m-1$	$+\infty$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		$-m^2+m-1$		$-m^2+m-1$	

Ta thấy: B và C đối xứng nhau qua trục Oy , Oy là đường trung trực của BC . Do đó tâm I của đường tròn (C) qua ba điểm cực trị A, B, C sẽ nằm trên Oy và nằm bên dưới điểm A . Giả sử $I(0; k)$, $(k < m-1)$

Để (C) có bán kính bằng 1 thì $IA = IB = IC = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} IA = 1 \\ IB = 1 \end{cases}$

$$\overrightarrow{IB} = (-\sqrt{m}; m^2 + m - 1 - k) \Rightarrow IB^2 = m + (-m^2 + m - 1 - k)^2$$

$$IB = 1 \Rightarrow m + (-m^2 + m - 1 - k)^2 = 1$$

$$\overrightarrow{IA} = (0; m - 1 - k) \Rightarrow IA^2 = (m - 1 - k)^2$$

$$IA^2 = 1 \Rightarrow (m - 1 - k)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k = m - 2 < m - 1 \text{ thỏa mãn} \\ k = m > m - 1 \text{ loại} \end{cases}$$

Thế $k = m - 2$ thế vào (*) ta được:

$$m + (-m^2 + m - 1 - m + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow m - 1 + (m^2 - 1)^2 = 0$$

Giải phương trình kết hợp với điều kiện ta được $m = 1$, $m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài!

Nhận xét: Đây là một bài toán khá khó (so với một bài là câu hỏi phụ trong bài khảo sát hàm số ở đề thi Đại học) Cần khá tinh tế để đưa ra nhận xét $k < m - 1$, nếu không có nhận xét này sẽ làm mất thêm một chút thời gian nữa để hoàn thiện bài toán này! Bài toán này còn có cách giải quyết khác bằng cách sử dụng công thức: $S = \frac{abc}{4R}$. Các em hãy thử tự tìm tòi nhé!

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

2.1) A-2007. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2}$, (1) (m là tham số). a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = -1$. b) Tìm m để hàm số (1) có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị cùng với gốc tọa độ tạo thành 1 tam giác vuông tại O . (ĐA: $m = -4 \pm 2\sqrt{6}$).

2.2) B-2002. Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ (1) (m là tham số). a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$. b) Tìm m để hàm số (1) có 3 điểm cực trị. (ĐA: $m < -3$ hoặc $0 < m < 3$).

2.3) B-2005. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m+1}{x+1}$ (*) (m là tham số). a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (*) khi $m = 1$. b) Chứng minh rằng với m bất kỳ, (C_m) luôn có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$.

2.4) Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ có đồ thị là (C_m) . a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_1) của hàm số khi $m = 1$. b) Tìm m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác vuông cân. (ĐA: $m = 1$).

2.5) Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ (1). a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = -2$. b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác có một góc bằng 120° . (ĐA: $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$).

2.6) Cho hàm số $y = x^4 + mx^3 - 2x^2 - 3mx + 1$ (1). a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_0) của hàm số khi $m = 0$. b) Tìm m để hàm số (1) có hai cực tiểu. (ĐA: $m \neq \pm \frac{4}{3}$).

2.7) Cho hàm số $y = (m+1)x^4 - (m+2)x^2 + 1$. a) Tìm m để y có đúng 3 cực trị. (ĐA: $m < -2$ hoặc $m > -1$). b) Tìm m để y chỉ có 1 cực trị. (ĐA: $-2 \leq m \leq -1$).

2.8) Gọi (G) là đồ thị của hàm số $y = x^4 + mx^2 + 1$. a) Tìm m để (G) có 3 điểm cực trị. (ĐA: $m < 0$). b) Tìm m để 3 điểm cực trị trong câu a) lập thành một tam giác đều. (ĐA: $m = -\sqrt[3]{24}$). c) Viết phương trình parabol đi qua 3 điểm cực trị nói trên. (ĐA: $y = \frac{m}{2}x^2 + 1$).

2.9) A - 2012. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$, (1) với m là tham số thực a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 0$ b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

2.10) B-2011. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$, (1) với m là tham số thực a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$ b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$, trong đó A là điểm cực trị trên Oy , O là gốc tọa độ, B, C là các điểm cực trị còn lại.

2.11) Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 4$. Tìm m để tất cả các điểm cực trị của đồ thị hàm số đều nằm trên các trục tọa độ.

2.12) Cho hàm số $y = x^4 + (3m+1)x^2 - 3$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có một cạnh bằng $\frac{2}{3}$ cạnh khác.

2.13) Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác nhận gốc tọa độ làm trọng tâm.

2.14) Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$. Tìm m để đồ thị hàm số có các điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

2.15): Cho hàm số $y = x^4 - 2(1-m^2)x^2 + m + 1$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích lớn nhất.

2.16) Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có đường tròn ngoại tiếp đi qua điểm $D\left(\frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right)$

2.17) Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}mx^2 + m + 1$ Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác nội tiếp được trong đường tròn có bán kính $R = 1$.

2.18) Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3$. Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp đạt giá trị nhỏ nhất.