

VO QUOC BA CAN

COSMIN POHOATĂ

Old and New Inequalities

Volume 2

Bất đẳng thức

Xưa và Nay.

(Volume 2)

Đôi điều về nhóm dịch:

Nhóm dịch Magic of Math (WoW) là một nhóm dịch vừa mới thành lập cách đây không lâu. Do sự gặp gỡ tình cờ của 2 dịch giả trên Mathlinks.ro... Dù lĩnh vực của hai dịch giả vô cùng khác biệt với nick thứ nhất là bất đẳng thức còn của nick thứ 2 lại là phương trình, bất phương trình và hệ phương trình... nhưng cả hai đều có chung một ước muốn là chia sẻ kiến thức cho các bạn khác có cùng sở thích, đam mê là toán học. Nhưng khả năng của cả 2 đều có hạn nên sau một thời gian chúng tôi quyết định thành lập nhóm dịch sách (từ tiếng Anh sang tiếng Việt). Để có thể mang đến cho tất cả các bạn đam mê toán học trên khắp mọi miền đất nước, những tài liệu viết tay, đánh máy, những quyển sách toán của các nước khác. Ngoài mục đích là đem kiến thức đến cho các bạn, nhóm dịch WoW còn Mong muốn bổ sung thêm cho các bạn những kiến thức, định lý, kỹ thuật cũng như các kết quả mới đây (đã lâu) nhưng các bạn không có điều kiện tiếp xúc do rào cản về ngôn ngữ hoặc là do thiếu kiến thức về thuật ngữ.

Vì là lần đầu tiên tiếp xúc với “dịch thuật” mà cả 2 đều còn trẻ (18 tuổi) nên cả 2 đều không thể tránh khỏi những sai sót trong quá trình dịch cũng như biên tập tài liệu. Rất Mong các bạn bỏ qua và gửi ý kiến đóng góp cho nhóm WoW qua địa chỉ: nhomdichsach@gmail.com ...

Mọi nhận xét, phê bình cũng như đóng góp của các bạn luôn là những lời động viên dành cho nhóm dịch WoW chúng tôi.

Nhóm WoW tuyển thêm dịch giả!

Như các bạn đã thấy, một quyển sách, một bản viết tay hay một tài liệu bất kì đều khá nhiều (trên 100 trang) với khối lượng công việc lớn như vậy thì 2 người trong nhóm WoW không thể nào hoàn thành nhanh được, do đó nhóm WoW Mong muốn các bạn trên khắp 3 miền đất nước cùng tham gia vào nhóm WoW để có thể hoàn thành công việc một cách nhanh chóng cũng như cho ra nhiều tác phẩm trong thời gian ngắn hơn và chất lượng hơn. Cho nên nhóm WoW cần tuyển thêm thành viên với yêu cầu:

+ Một nhóm chuyên về Latex và có khả năng dịch từ 2 trang sách trở lên mỗi ngày. (Biết sử dụng các phần mềm như Miktex 2.9.....) ☺ (Nhóm 1)

+ Một nhóm dịch giả có khả năng dịch từ 2 trang sách trở lên mỗi ngày. ☺ (Nhóm 2)

Giới hạn độ tuổi với các bạn tham gia là từ 15 tuổi trở lên.

Nhóm sẽ hỗ trợ cho các bạn tham gia những khoản sau đây để tiện việc dịch và tăng khả năng dịch:

+ Trọn bộ phần mềm *LACVIET mtd For Students 2011*. Cho các bạn để có thể tiện tra cứu thuật ngữ và học tập.

+ File gốc của tài liệu (File Latex, Word, PDF) mà tác giả đã dùng để tạo nên tài liệu nhằm tiết kiệm thời gian chỉnh sửa và gõ lại của các bạn.

Rất mong các bạn trên khắp 3 miền tham gia nhóm dịch WoW... mọi đơn đăng kí xin gửi về địa chỉ Gmail của nhóm WoW là nhomdichsach@gmail.com theo mẫu:

+ Họ và tên:

+ Ngày tháng năm sinh:

+ Nhóm muốn tham gia:

Trưởng nhóm WoW



Tái bút: Vì Old and new inequality vol 2 là sách có bản quyền nên nhóm dịch chỉ có thể gửi đến các bạn chương 1 của quyển sách này. Nhóm WoW đang xúc tiến để có thể gửi đến các bạn trọn cuốn sách này.

Vài dòng về tác giả.

Võ Quốc Bá Cẩn hiện là sinh viên tại đại học y dược Cần Thơ. Như mọi học sinh trung học khác, Cẩn đã tham gia nhiều kì thi quốc gia và đem về nhiều giải thưởng cũng như thành tích khác nhau. Suy nghĩ một chút rằng Cẩn không học toán học, hoạt động của Cẩn trong lĩnh vực bất đẳng thức là rất rộng lớn dù chỉ mới trong thời gian gần đây. Một số các bất đẳng thức của Cẩn được xuất bản trên nhiều ấn phẩm đặc biệt. Nhưng phần lớn các kết quả của Cẩn trở nên nổi tiếng ở diễn đàn toán học Mathlinks.ro. Một số tác phẩm (bản viết tay) đã được (và chưa) xuất bản ở Việt Nam.

Cosmin Poahata hiện là học sinh phổ thông tại trường THPT “Tudor Vianu” ở Bucharest, Romania. Trong thời gian nghiên cứu và học tập của mình cậu ấy đã tham gia vào nhiều kì thi (Toán học và không phải toán học) Olympic và các kì thi lớn. Gần đây nhất, cậu ấy đã đạt được huy chương vàng tại kì thi toán Olympic Sharygin, diễn ra tại Dubna, Nga từ 29 tháng 7 đến ngày 1 tháng 8 năm 2008. Một vài năm trước, cậu ấy đã có đóng góp to lớn vào lĩnh vực hình học thuầnƠclit, đặc trưng hơn hết là các bài viết tại diễn đàn Geometricorum, Crux và báo AMM (American Mathematical monthly. Trong Clark Kimberling’s Encyclo-pedia of Triangle Center, một điểm xuất hiện dưới cái tên của cậu ấy (X_{3333} - “Điểm Pohoata”). Lĩnh vực chính bên cạnh hình học thuầnƠclit là Lý thuyết đồ thị, Lý thuyết số và dĩ nhiên là bất đẳng thức. bên cạnh toán học anh ấy còn đam mê và giỏi nhiều môn khác như khoa học máy tính, sinh học, âm nhạc, bóng đá và tennis...

Chương 1:

Các bài toán!

- 1.) Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b thì bất đẳng thức sau luôn đúng :

$$\sqrt{2a(a+b)^3} + b\sqrt{2(a^2+b^2)} \leq 3(a^2+b^2)$$

- 2.) Xét các số thực a, b, c thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Chứng minh rằng :

$$2 \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b} \leq 3$$

- 3.) Cho a, b, c là ba số thực dương thuộc đoạn $[0, 1]$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \leq \frac{5}{a+b+c}$$

- 4.) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau luôn đúng :

$$\frac{1}{(x+1)^2 + y^2 + 1} + \frac{1}{(y+1)^2 + z^2 + 1} + \frac{1}{(z+1)^2 + x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$$

- 5.) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=8$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a-2}{a+1} + \frac{b-2}{b+1} + \frac{c-2}{c+1} \leq 0$$

- 6.) Cho a, b, c là độ dài các cạnh của 1 tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) \geq 4(a^6+b^6+c^6).$$

- 7.) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng :

$$a\sqrt{b^2+c^2+bc} + b\sqrt{c^2+a^2+ca} + c\sqrt{a^2+b^2+ab} \geq \sqrt{3}$$

- 8.) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức của:

$$(x^3+1)(y^3+1)$$

Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $x+y=1$.

- 9.) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1$$

- 10.) Nếu x, y, z là các số thực dương, chứng minh rằng bất đẳng thức sau đây luôn đúng:

$$(x+y+z)^2(yz+zx+xy)^2 \leq 3(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)(x^2+yx+y^2)$$

- 11.) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn:

$$a+b+c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Chứng minh rằng :

$$a+b+c \geq \frac{3}{a+b+c} + \frac{2}{abc}.$$

12.) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn:

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1.$$

Chứng minh rằng $a+b+c \geq ab+bc+ca$.

13.) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a, b, c \geq 1$ và $a+b+c = 2abc$ Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{(a+b+c)^2} \geq \sqrt[3]{ab-1} + \sqrt[3]{bc-1} + \sqrt[3]{ca-1}$$

14.) Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Chứng minh rằng :

$$\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{1+a_1+\dots+a_j} < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

15.) Với các số thực dương $\alpha, \beta, x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 1$) thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.

$$\text{Chứng minh rằng : } \frac{x_1^3}{\alpha x_1 + \beta x_2} + \frac{x_2^3}{\alpha x_2 + \beta x_3} + \dots + \frac{x_n^3}{\alpha x_n + \beta x_1} \geq \frac{1}{n(\alpha + \beta)}.$$

16.) Nếu 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} = 2,$$

Chứng minh rằng : $ab+bc+ca \leq \frac{3}{2}$.

17.) Cho các số thực dương a, b, c. chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a+b+c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

18.) nếu x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$, chỉ ra rằng:

$$\frac{27}{4}(x+y)(y+z)(z+x) \geq (\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x})^2 \geq 6\sqrt{3}.$$

19.) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 + \frac{(a-c)^2}{ab+bc+ca}.$$

20.) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{3}{1+2abc}.$$

21.) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2a+b=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{5a^3}{bc} + \frac{4b^3}{ca} + \frac{3c^3}{ab} \geq 4.$$

22.) i) Nếu x, y, z là 3 số thực, và đều khác 1, thỏa mãn $xyz = 1$, chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$$

ii) Chứng minh rằng đẳng thức xảy ra với vô số các bộ ba số hữu tỉ x, y và z .

23.) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b(b+c)^2} + \frac{b}{c(c+a)^2} + \frac{c}{a(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}.$$

24.) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{4}} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3}.$$

25.) Cho a, b, c là độ dài các cạnh của 1 tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3} + 1 \geq 2 \sum \frac{a^2}{a^2 + (b+c)^2}.$$

26.) Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c thì bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 \geq (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2).$$

27.) Cho a, b, c là độ dài các cạnh của 1 tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a+b)(b+c)(c+a) + (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \geq 9abc.$$

28.) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right) \geq \frac{9}{abc+1}.$$

29.) Cho a, b, c là các số thực dương thuộc đoạn $[0,1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a}{1+bc} + \frac{2b}{1+ca} + \frac{2c}{1+ab} + abc \leq 4.$$

30.) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn:

$$\text{Max}\{b+c-a, c+a-b, a+b-c\} \leq 1.$$

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + 2abc$.

31.) Nếu x, y, z là các số thực thỏa mãn $xyz = -1$, chứng minh rằng:

$$x^4 + y^4 + z^4 + 3(x+y+z) \geq \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y} + \frac{x^2+y^2}{z}.$$

32.) Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+a = abc + bcd + cda + dab$.

Chứng minh rằng:

$$a+b+c+d + \frac{2a}{a+1} + \frac{2b}{b+1} + \frac{2c}{c+1} + \frac{2d}{d+1} \geq 8.$$

33.) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 2ca}{c^2 + a^2} + \frac{c^2 + 2ab}{a^2 + b^2} \geq 3.$$

34.) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ca}{b(b+c)} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}.$$

35.) Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca \geq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

36.) Cho x, y, z, t là các số thực dương thỏa mãn

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{t+1} = 1.$$

Chứng minh rằng:

$$\min \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}; \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}; \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{x}; \frac{1}{t} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right\} \leq 1$$

$$\max \leq \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}; \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}; \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{x}; \frac{1}{t} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right\}$$

37.) Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_j^{T_k} \right) \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k^{\frac{T_{n+1}}{3}} \right)^n,$$

Với $T_k = \frac{k(k+1)}{2}$ số cạnh của 1 đa giác.

38.) Cho a, b, c, d là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$3(a^2 - ab + b^2)(c^2 - cd + d^2) \geq (a^2c^2 - abcd + b^2d^2).$$

39.) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}.$$

40.) Cho n là một số nguyên dương cho trước, và cho x và y là những số thực dương thỏa mãn

$x^n + y^n = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}} \right) < \frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

41.) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + 1 = 4abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

42.) Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Đặt $x = \sqrt{a^2 - a + 1}$, $y = \sqrt{b^2 - b + 1}$,
và $z = \sqrt{c^2 - c + 1}$. Chứng minh rằng: $xy + yz + zx \geq 3$ và $x + y + z \leq 2 + \sqrt{7}$.

43.) Cho $n \geq 2$ là 1 số nguyên. Xác định:

(a) Giá trị thực lớn nhất của c_n sao cho

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \geq c_n$$

đúng với mọi số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ với $a_1 a_2 \dots a_n = 1$.

44.) Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2 + bc} + \frac{ca}{b^2 + ca} + \frac{ab}{c^2 + ab} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

45.) Các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ cho trước. Với mỗi $i (1 \leq i \leq n)$ định nghĩa:

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

Và cho: $d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$.

(a) Chứng minh rằng với mọi số thực $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, ta có:

$$\max |x_i - a_i| \mid 1 \leq i \leq n \geq \frac{d}{2}.$$

(b) Chứng minh rằng tồn tại các số $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ sao cho chúng ta có bất đẳng thức ở câu (a).

46.) Cho a, b, c là các số thực dương không âm và không bằng không. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2}{4a^2 + ab + 4b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{4b^2 + bc + 4c^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{4c^2 + ca + 4a^2}} \leq 1$$

47.) Cho các số thực không âm thỏa mãn $4abc = a + b + c + 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{c} \geq 2(ab + bc + ca).$$

48.) Cho a, b, c là các số thực dương không âm. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3}{(c+a)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

49.) Cho a, b, c, x, y, z là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + x^2)(b^2 + y^2)(c^2 + z^2) \geq (axy + bzx + cxy - xyz)^2.$$

50.) Cho x, y, z là các số thực dương không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{y+z}}{x} + \frac{\sqrt{z+x}}{y} + \frac{\sqrt{x+y}}{z} \geq \frac{4(x+y+z)}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}.$$

51.) Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $abc=4$ và $a, b, c > 1$. Chứng minh rằng

$$(a-1)(b-1)(c-1) \left(\frac{a+b+c}{3} - 1 \right) \leq (\sqrt[3]{4} - 1)^4.$$

52.) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{3}{2}.$$

53.) Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c thì bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\frac{1}{a+b+c} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

54.) Cho a, b, c là độ dài các cạnh của 1 tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \leq 3.$$

55.) Cho a, b, c là độ dài các cạnh của 1 tam giác có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{b}{\sqrt{a+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{b+c^2}} + \frac{a}{\sqrt{c+a^2}} < 2.$$

56.) Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta luôn có:

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}} \geq \sqrt{6 \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}}.$$

57.) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{ca+a^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

58.) Cho $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ là các số thực dương thỏa mãn :

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} = 1, \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = m,$$

Với $1 \geq m > 0$. Chứng minh rằng với mọi i thỏa mãn $a_i \leq m$, ta có:

$$n-i \geq n(m-a_i)^2.$$

59.) Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{x+y+z} \left(\frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{z+x} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \right).$$

60.) Cho các số thực a, b, c . chứng minh rằng :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+2bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+2ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+2ab}} \leq \frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

61) Cho a, b, c là các số thực dương phân biệt. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b - 6abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} \geq \frac{16abc}{(a+b+c)^2}.$$

62) Giả sử Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3 + abc}{b+c} + \frac{b^3 + abc}{c+a} + \frac{c^3 + abc}{a+b} \geq \frac{a(b^3 + c^3)}{a^2 + bc} + \frac{b(c^3 + a^3)}{b^2 + ca} + \frac{c(a^3 + b^3)}{c^2 + ab}.$$

63) Cho a, b, c, d là các số thực với tổng bằng 0. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2 + 12 \geq 6(abc + abd + acd + bcd).$$

64) Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{a} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - 2\right)^2 \geq \frac{8(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(1-a)(1-b)(1-c)}.$$

65) Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực nằm trong $[0, 1]$ thỏa mãn

$$x_1 x_2 \dots x_n = (1 - x_1)^2 (1 - x_2)^2 \dots (1 - x_n)^2.$$

Tìm giá trị lớn nhất của $x_1 x_2 \dots x_n$.

66) Giả sử a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

67) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{2b+1} + \frac{b}{2c+1} + \frac{c}{2a+1} \leq \frac{1}{abc}.$$

68) Với bất kì ba số dương a, b, c , chứng minh bất đẳng thức

$$(1+abc) \left(\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \right) \geq 3.$$

69) Giả sử a, b, c, d là các số thực sao cho $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} \leq \frac{16}{3}.$$

70) Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ sao cho $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \sqrt{x_i}} \right) \leq \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}.$$

71) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{ab + bc + ca} + \frac{3abc}{a + b + c} \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

72) Cho a, b, c là các số thực không âm, trong đó có ít nhất hai số khác không. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^2 + bc}{b^2 + c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2 + ca}{c^2 + a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^2 + ab}{a^2 + b^2}} \geq \frac{\sqrt[3]{9abc}}{a + b + c}.$$

74) Cho a, b, c là các số thực không âm, trong đó không có hai số nào trong chúng bằng không. Chứng minh rằng

$$\frac{ab + ac + 4bc}{b^2 + c^2} + \frac{bc + ba + 4ca}{c^2 + a^2} + \frac{ca + cb + 4ab}{a^2 + b^2} \geq 4.$$

75) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a + b^2 + c^3}{ab + c^2} + \frac{b + c^2 + a^3}{bc + a^2} + \frac{c + a^2 + b^3}{ca + b^2} \geq \frac{9}{2}.$$

76) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng

78) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{\sqrt{ab + bc}} + \frac{bc}{\sqrt{bc + ca}} + \frac{ca}{\sqrt{ca + ab}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

79) Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$1 \leq \frac{a}{1 + bc} + \frac{b}{1 + ca} + \frac{c}{1 + ab} \leq \sqrt{2}.$$

80) Giả sử a, b, c là các số thực dương sao cho $a \leq b \leq c$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a + b^2 + c^3 \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^3}.$$

81) Cho $k+1$ các số dương $x_0, \dots, x_k$ và một số nguyên dương n , chứng minh rằng

$$(x_{\sigma_1} + \dots + x_{\sigma_k})^{-n} \leq k^{-n} \sum_{i=0}^k x_i^{-n},$$

Trong đó vế bên trái được lấy ra từ $x_0, \dots, x_k$.

82) Cho a, b, c là các số thực không âm, sao cho có ít nhất hai số khác không và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \leq \frac{\sqrt[4]{27}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}.$$

83) Với các số thực $x_i > 1, 1 \leq i \leq n, n \geq 2$ sao cho

$$\frac{x_i^2}{x_i - 1} \geq S = \sum_{j=1}^n x_j, \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n$$

Tìm và chứng minh $\sup S$. (Cận trên)

84) Giả sử a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d = abc+bcd+cda+dab$.

Chứng minh rằng

$$(\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1})^2 + (\sqrt{c^2+1} + \sqrt{d^2+1})^2 \leq (a+b+c+d)^2.$$

85) Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2\left(\frac{b}{c}-1\right) + b^2\left(\frac{c}{a}-1\right) + c^2\left(\frac{a}{b}-1\right) \geq 0.$$

86) Giả sử x, y, z là các số thực dương sao cho $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

87) Giả sử a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác cho trước. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \geq 2\left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b}\right).$$

88) Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \right) - 4 \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) \geq 1 - \frac{8xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

89) Giả sử a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Chứng minh rằng

$$3 \min a, b, c \leq 1 + abc.$$

90) Cho các số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_{3n}$. Chứng minh rằng

$$2^n \cdot \prod_{k=1}^{3n} \frac{1+x_k^2}{1+x_k} \geq \left(1 + \prod_{k=1}^{3n} x_k^{1/n} \right)^n.$$

91) Cho trước số nguyên $n \geq 2$. Tìm hằng số lớn nhất $C(n)$ để bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq C(n) \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} 2x_i x_j + \sqrt{x_i x_j}.$$

Xảy ra với mọi số thực $x_i \in [0, 1]$ thỏa mãn $(1-x_i)(1-x_j) \geq \frac{1}{4}$ với $1 \leq j \leq i \leq n$.

92) Giả sử a, b, c là các số thực không, trong đó có ít nhất hai số khác không và thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^3 + a} + \sqrt{b^3 + b} + \sqrt{c^3 + c} \geq 2\sqrt{a+b+c}.$$

93) Giả a, b, c, d là các số thực không âm sao cho $a + b + c + d = 3$. Chứng minh rằng

$$ab(a+2b+3c) + bc(b+2c+3a) + cd(c+2d+3a) + da(d+2a+3b) \leq 6\sqrt{3}.$$

94) Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Xác định

$$\max \prod_{i=1}^n (1-x_i), \text{ với } x_i \in \mathbb{R}_+, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1.$$

95) Với các số nguyên $n \geq 2$ và số thực $s > 0$, chứng tỏ rằng

$$\left(\prod_{i=0}^n (s+i) \right) \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{s+j} \right) < (n+1) \prod_{k=1}^n \left(s+k - \frac{1}{2} \right).$$

96) Cho a, b, c là các số thực nằm trong đoạn $\left[0, \frac{3}{5}\right]$ và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$.

Xác định giá trị lớn nhất có thể đạt được của biểu thức sau

$$P(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + \frac{3}{4}abc.$$

97) Giả sử a, b, c, d là các số thực không âm sao cho $a \geq b \geq c \geq d$ và $abcd = 1$.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \geq \frac{3}{abc+1}.$$

98) Cho a, b, c là các số thực không âm, trong đó có ít nhất hai số khác không. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2(b+c)^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2(c+a)^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2(a+b)^2}{a^2+b^2} \geq 2(ab+bc+ca).$$

99) Cho a, b, c là các số thực không âm, trong đó có ít nhất hai số khác không. Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

100) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2-bc}{4a^2+4b^2+c^2} + \frac{b^2-ca}{4b^2+4c^2+a^2} + \frac{c^2-ab}{4c^2+4a^2+b^2} \geq 0.$$

101) Giả sử a, b, c là các số thực không âm, trong đó có ít nhất hai số khác không. Chứng minh rằng

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+b^2} \geq \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab}.$$

102) Cho n là một số nguyên dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\frac{(a-b)^{2n+1} + (b-c)^{2n+1} + (c-a)^{2n+1}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

với các số thực phân biệt a, b, c và thỏa mãn $bc+ca \geq 1+ab+c^2$.

103) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^{b+c}}{(b+c)^2} + \frac{b^{c+a}}{(c+a)^2} + \frac{c^{a+b}}{(a+b)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

104) Tìm số thực c nhỏ nhất sao cho nếu $n \geq 1$ và $a_1, \dots, a_n > 0$ thì

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{\sum_{j=1}^k 1/a_j} \leq c \sum_{k=1}^n a_k.$$

105) Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn, hơn nữa có ít nhất hai số trong đó là khác không. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{4b^2 + c^2} + b\sqrt{4c^2 + a^2} + c\sqrt{4a^2 + b^2} \leq \frac{3}{4}.$$

106) Giả sử a, b là các số thực sao cho $a + b \neq 0$ và giả sử $x + y > 1$ là các hằng số cho trước. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$f(a, b) = \frac{(a^2 + 1)^x (b^2 + 1)^x}{(a + b)^2}.$$

107) Cho trước các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n > 2$) thỏa mãn

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| > 1, |x_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, n.$$

Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương k sao cho $\left| \sum_{i=1}^k x_i - \sum_{i=k+1}^n x_i \right| \leq 1$.

108) Cho x, y, z là các số thực với tổng bằng 0, ba số này đều nằm trong $-1, 1$.

Chứng minh rằng

$$\sqrt{1+x+y^2} + \sqrt{1+y+z^2} + \sqrt{1+z+x^2} \geq 3.$$

109) Giả sử a_i là các số thực dương, với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ thỏa mãn

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n+1-a_1} + \frac{1}{n+1-a_2} \dots + \frac{1}{n+1-a_n} \leq 1.$$

110) Cho a, b, c, d là các số thực thuộc. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{abcd} \geq \frac{(2k-a)^4 + (2k-b)^4 + (2k-c)^4 + (2k-c)^4 + (2k-d)^4}{(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d)}.$$

111) Giả sử a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{c+a}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}.$$

112) Cho a, b, c là các số thực không âm, trong đó có ít nhất hai số khác không. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}.$$

113) Cho a, b, c, d là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \left(\frac{a}{a+b+c} \right)^k \geq \min \left\{ 1, \frac{1}{2^{k-1}}, \frac{4}{3^k} \right\}.$$

114) Giả sử a, b, c là các số thực dương sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng với mọi số k nguyên dương.

Ta có :

$$\frac{1}{1+a+b^k} + \frac{1}{1+b+c^k} + \frac{1}{1+c+a^k} \leq 1.$$

115) Giả sử a, b, c là các số thực không âm, trong đó có ít nhất hai số khác không. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b+c}.$$

116) Cho a, b, c, d là các số thực không âm, trong đó có ít nhất hai số khác không và thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=1$. Chứng tỏ rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} \leq \frac{3}{2}.$$

117) Giả sử a, b, c, d là các số thực không âm, trong đó có ít nhất ba số khác không. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b+c}} + \frac{b}{\sqrt{b+c+d}} + \frac{c}{\sqrt{c+d+a}} + \frac{d}{\sqrt{d+a+b}} \leq \frac{5}{4} \sqrt{a+b+c+d}.$$

118) Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực thỏa mãn $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$. Xác định giá trị lớn nhất của biểu thức sau

$$\min_{i \neq j} |a_i - a_j|.$$

119) Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương và $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=2}^n a_k^{1/k} < s - \sqrt{2s}.$$