Hàng điểm điều hòa - vẻ đẹp quyến rũ trong hình học

Kim Luân

Bài viết này xin giới thiệu đôi chút về *"hàng điểm điều hòa"*- một công cụ tương đối mạnh và hấp dẫn trong giải toán hình học phẳng .Để các bạn dễ theo dõi tôi xin trình bày lại một số lí thuyết cơ bản nhất của công cụ này:

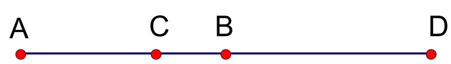
I.Căn cơ nội công :

a. Hàng điểm điều hoà:

Định nghĩa:

Trên một đường thẳng ta lấy bốn điểm A,B,C,D . Khi đó ta gọi A,B,C,D là một hàng điểm điều hòa nếu nó thỏa mãn hệ thức sau: $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ (1)

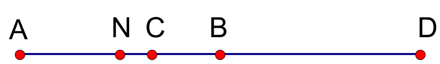
Kí hiệu: $(A,B,C,D) = -1$



Sau đây là một số định định lí quan trọng cần biết trong bài viết này(được suy trực tiếp từ định nghĩa):

***Định lí 1:**(Hệ thức Niutơn)

Cho $(A,B,C,D) = -1$. Gọi N là trung điểm của AB. Khi đó $NA^2 = NB^2 = \overline{NC}.\overline{ND}$ (2)

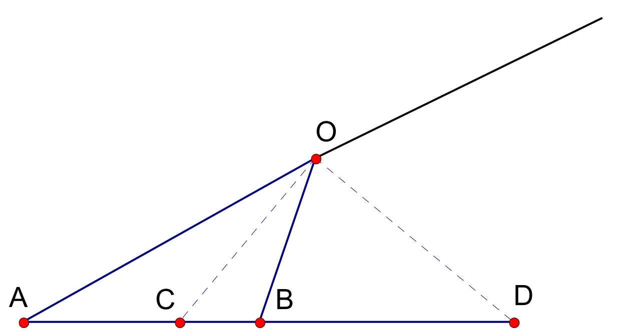


*<u>*Nhận xét:</u> Thực ra (1) và (2) là tương đương nên nếu 4 điểm A,B,C,D thỏa mãn (2) thì ta cũng có điều ngược lại là $(A,B,C,D) = -1$. Định lí này và định nghĩa là hai dấu hiệu phổ biến nhất để chứng minh 4 điểm là một hàng điểm điều hòa.*

Vấn đề để chứng tỏ một hàng điểm là điều hòa xem như đã được giải quyết, vậy khi đã có một hàng điểm điều hòa rồi thì ta thu được gì? Câu hỏi này sẽ được giải đáp qua hai định lí quan trọng sau:

***Định lí 2:**

Cho $(A,B,C,D) = -1$. Lấy O sao cho OC là phân giác trong của $\angle AOB$ thì OD là phân giác ngoài của $\angle AOB$.



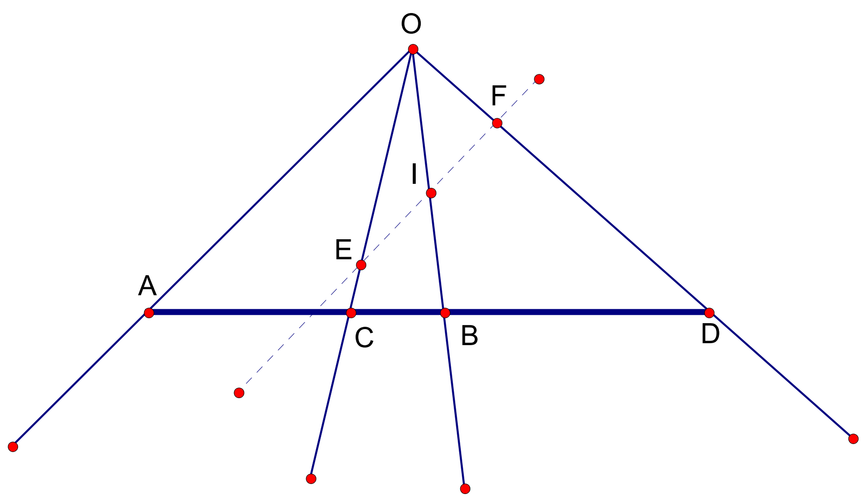
**Nhận xét:*

Từ đó suy ra $\angle COD = 90^0$ *do đó định lí này có ý nghĩa thực sự quan trọng trong những bài chứng minh vuông góc.*

Mặt khác cũng có điều ngược lại tức nếu $\angle COD = 90^0$ *thì OC là phân giác trong và OD là phân giác ngoài của* $\angle AOB$ *điều này có ý nghĩa quan trọng cho những bài chứng minh yếu tố phân giác.*

Định lí 3:

Cho $(A,B,C,D) = -1$ và điểm O nằm ngoài hàng điểm điều hòa trên. Một đường thẳng d cắt ba tia OC,OB, OD lần lượt tại E,I và F. Khi đó I là trung điểm của EF khi và chỉ khi d song song với OA.

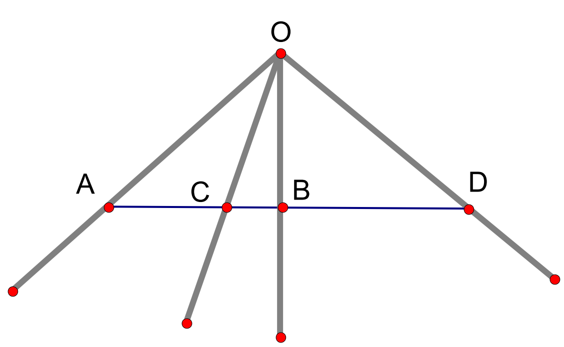


**Nhận xét:*

Định lí này rất có ý nghĩa đối với các bài toán chứng minh trung điểm và song song.

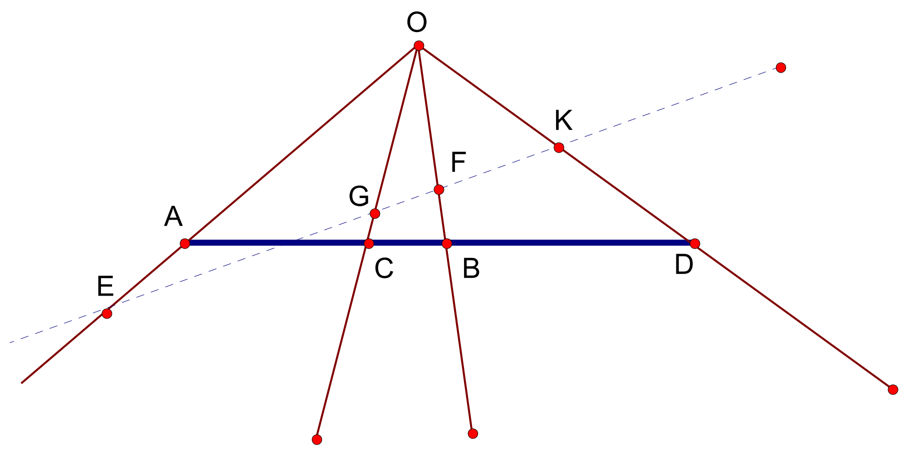
Một câu hỏi nhỏ là phải chăng các hàng điểm điều hòa này là rất hiếm, thật ra không phải như vậy, chỉ cần có một hàng điểm điều hòa thì ta có thể "sinh sôi nảy nở" ra hàng loạt nhưng hàng điểm điều hòa con con, các bạn sẽ hiểu rõ điều trên qua định lí về "chùm điều hòa" sau đây :

b.Chùm điều hòa:



Định nghĩa:
Cho hàng điểm điều hòa $(A,B,C,D)=-1$ và O nằm ngoài hàng điểm điều hòa trên. Khi đó ta gọi 4 tia OA,OB,OC,OD là một chùm điều hòa và kí hiệu $(OA,OB,OC,OD)=-1$.

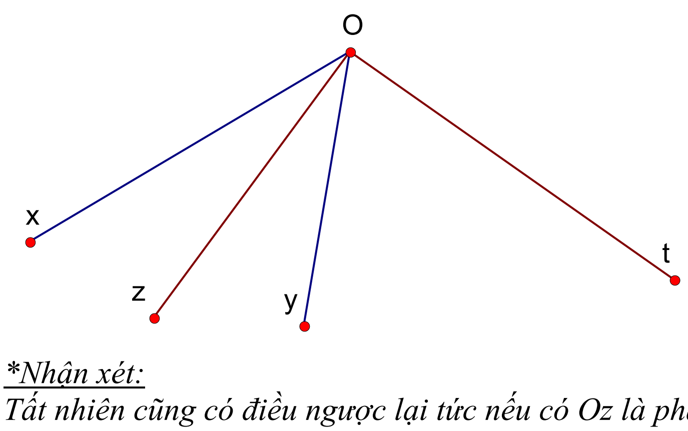
Định lí chùm điều hòa:
Cho $(OA,OB,OC,OD)=-1$.Một đường thẳng d bất kì cắt các cạnh OA,OB,OC,OD lần lượt tại E,F,G,K khi đó ta có $(E,F,G,K)=-1$



<u>*Nhận xét:</u>
Qua định lí trên chúng ta có thể thấy từ một hàng điểm điều hòa ban đầu sẽ "sinh sôi" vô số chùm điều hòa xung quanh(cứ một điểm ngoài hàng điểm điều hòa nói trên sẽ cho ta một chùm điều hòa tương ứng). Và cứ mỗi chùm điều hòa như vậy lại cho ta vô số hàng điểm điều hòa nữa. Mà chỉ cần một trong số chúng kết hợp khéo léo với các định lí hai và ba sẽ cho ra rất nhiều bài hình học hiểm ác với sự biến ảo khôn lường...

Từ định lí này kết hợp với các định lí 2 và 3 cho ta một số hệ quả sau:

Hệ quả 1:
Cho chùm điều hòa $(Ox,Oy,Oz,Ot)=-1$ khi đó nếu góc $zOt=90^0$ thì Oz là phân giác trong của góc xOy và Ot là phân giác ngoài xOy

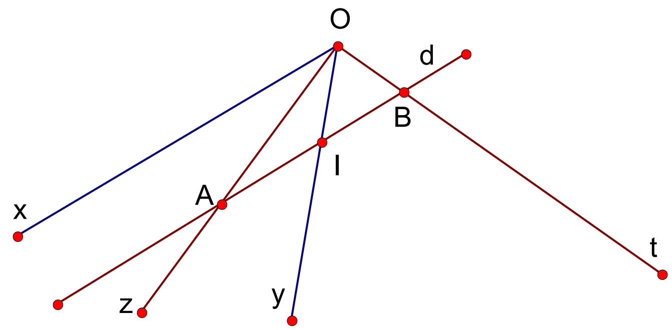


<u>**Nhận xét:*</u>
Tất nhiên cũng có điều ngược lại tức nếu có Oz là phân giác trong hoặc Ot là phân giác ngoài thì góc zOt=90 độ

Mặt khác nếu 4 tia Ox,Oy,Oz,Ot bất kì mà có góc zOt=90 độ và Oz,Ot lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của xOy thì $(Ox, Oy, Oz, Ot) = -1$. Đây là một dấu hiệu quan trọng để chứng minh 4 tia xuất phát từ một đỉnh là một chùm điều hòa.

Hệ quả 2:

Cho chùm điều hòa $(Ox, Oy, Oz, Ot) = -1$ một đường thẳng d bất kì cắt Oz,Ot,Oy lần lượt tại A,B,I khi đó d song song Ox khi và chỉ khi I là trung điểm của AB.



*<u>*Nhận xét:</u>*

Cũng có điều ngược lại tức nếu d song song Ox và I là trung điểm của AB thì $(Ox, Oy, Oz, Ot) = -1$. Đây cũng là một dấu hiệu quan trọng để chứng minh 4 tia xuất phát từ một đỉnh là một chùm điều hòa.

Nhân đây tôi xin trình bày thêm một cái nữa cũng…điều hòa

<u>c.Tứ giác điều hòa:</u>

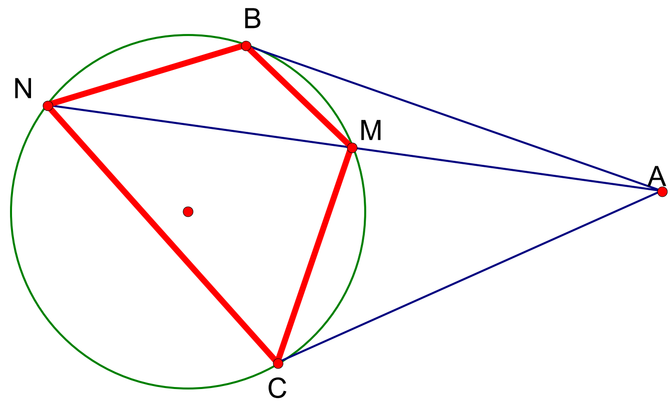
Định nghĩa:

Tứ giác ABCD được gọi là một "tứ giác điều hòa" nếu nó thỏa mãn hệ thức sau:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}$$

Định lí về tứ giác điều hòa:

Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài (O). Từ A ta kẻ hai tiếp tuyến AB,AC và kẻ một cát tuyến AMN bất kì. Chứng minh rằng BMCN là một tứ giác điều hòa(hình vẽ)



(gợi ý: sử dụng tam giác đồng dạng để suy ra điều phải chứng minh từ đ/n)

<u>Nhận xét:</u>
+Cũng có điều ngược lại tức nếu MBNC là tứ giác điều hòa thì tiếp tuyến tại B,tiếp tuyến tại C và MN đồng quy tại một điểm
+Tứ giác điều hòa có một mối quan hệ tuyệt vời với chùm điều hòa mà các bạn sẽ hiểu rõ sau khi đọc hết phần cuối của bài viết này.

Việc chứng minh các định lí trên là rất đơn giản nên xin dành lại cho bạn đọc(nếu có thắc mắc gì sẽ trao đổi thêm).
Sau đây chúng ta sẽ khảo sát một vài bài toán để thấy được phần nào về vẻ đẹp và sức mạnh của công cụ vừa dẫn.

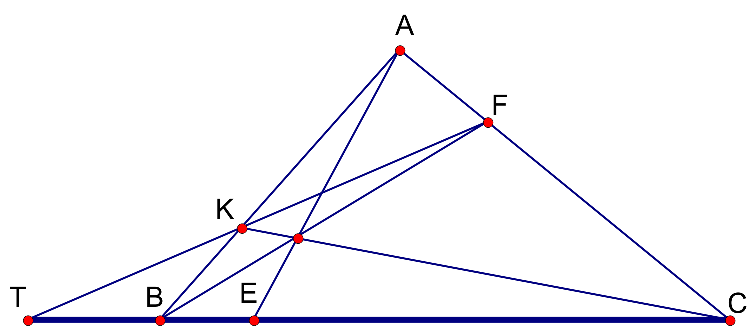
II.Một số bài toán minh họa:

Chúng ta sẽ bắt đầu bằng một bài toán cơ bản nhưng rất quan trọng sau:

Bài toán 1:

Cho tam giác ABC. Lấy E trên BC, F trên AC và K trên AB sao cho AE,BF,CK đồng quy tại một điểm. Khi đó nếu T là giao điểm của FK với BC thì $(T,E,B,C)=-1$

Lời giải:



Trong tam giác ABC:
+Áp dụng định lí Xêva với ba đường đồng quy AE,BF,CK ta có:

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}.\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}}.\frac{\overline{KA}}{\overline{KB}}=-1 \quad (1)$$

+Mặt khác áp định lí Mênêlaúyt với ba điểm thẳng hàng T,K,F lại cho ta:

$$\frac{\overline{TC}}{\overline{TB}}.\frac{\overline{KB}}{\overline{KA}}.\frac{\overline{FA}}{\overline{FC}}=1 \quad (2)$$

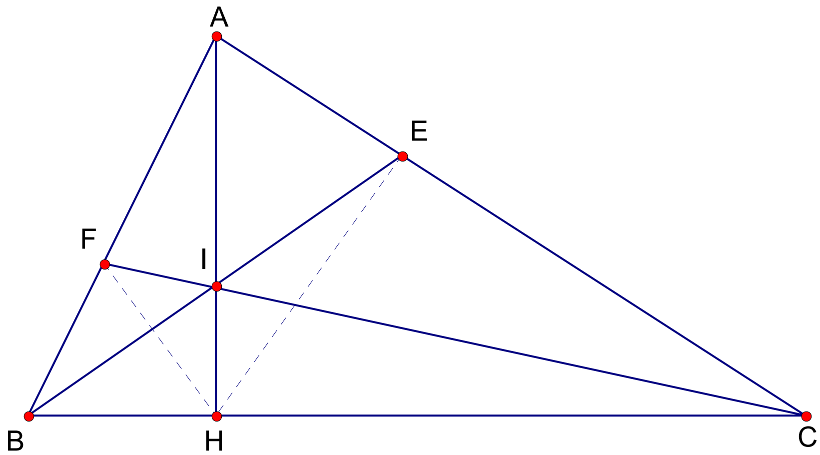
Nhân (1) và (2) vế theo vế suy ra:

$$\frac{\overline{TB}}{\overline{TC}}=-\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}$$

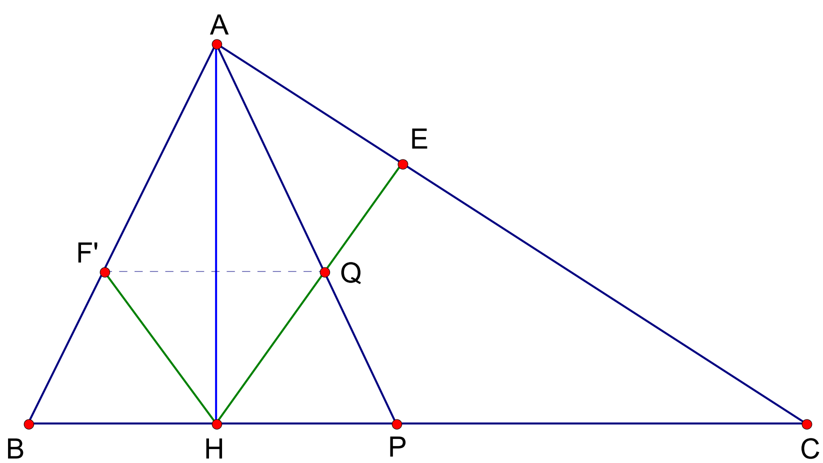
Theo định nghĩa thì $(T,E,B,C)=-1$,đây chính là *đpcm*.

Bài toán 1.1:

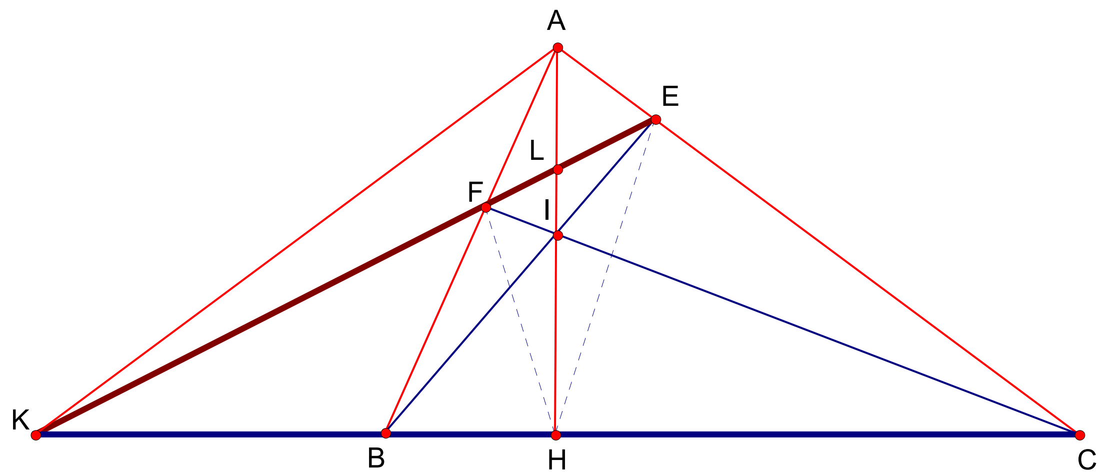
Cho tam giác ABC và H là chân đường cao kẻ từ A. Trên đoạn thẳng AH ta lấy một điểm I bất kì rồi kẻ BI cắt AC tại E và CI cắt AB tại F.Chứng minh rằng AH là phân giác của $\angle EHF$



Lời giải:
Một bài toán đơn giản nhưng…khó đến kinh ngạc, bạn phải làm gì khi đối mặt với một bài như vậy? …???
Khi nhắc đến bài toán này tôi chợt nhớ đến lời giải rất độc đáo của anh Hatucdao, một lời giải thực sự ấn tượng mạnh với tôi, nên xin được trích dẫn ngay sau đây để các bạn được chiêm ngưỡng:
"Kết quả là hiển nhiên khi tam giác ABC cân. Giả sử ABC không cân ta có thể giả sử AC>AB .Dựng tam giác ABP cân tại A và AP cắt HE tại Q. Gọi F' là điểm đối xứng của Q qua AH. Khi đó AH là phân giác của $\angle EHF'$ *và* $\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QB}}=\dfrac{\overline{F'A}}{\overline{F'B}}$
Áp dụng định lí Mênêlaúyt cho tam giác ACP với ba điểm thẳng hàng H,Q,E ta có:
$$\frac{\overline{HP}}{\overline{HC}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}=1\Rightarrow\frac{\overline{HB}}{\overline{HC}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{F'A}}{\overline{F'B}}=-1$$
Theo định lí ceva đảo ta có AH, BE, CF' *đồng quy từ đó suy ra đpcm"*



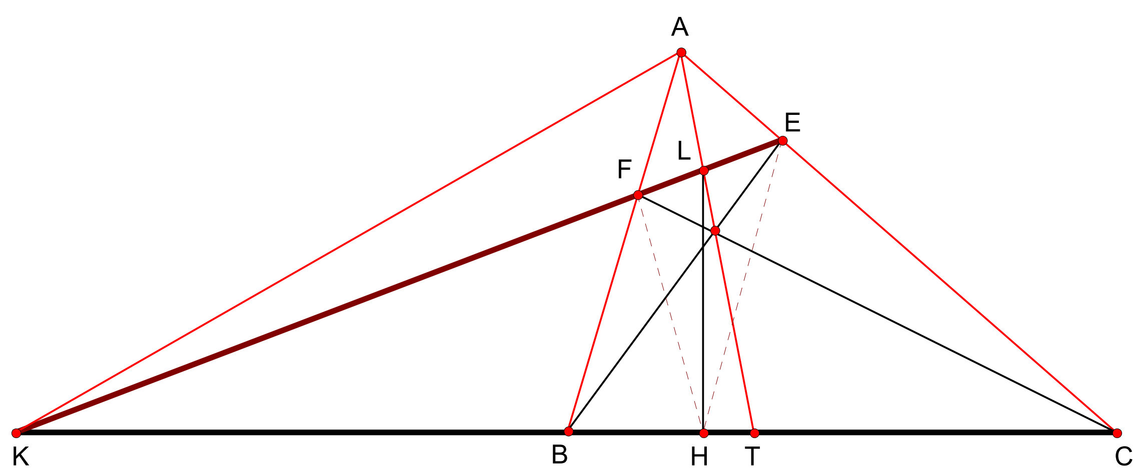
Một viên ngọc không dấu vết nhưng phải công nhận là rất khó nghĩ ra.
Dẫu sao đi nữa thì việc cảm nhận vẻ đẹp tinh túy của lời giải trên cũng giúp chúng ta thấm thía và quý trọng hơn đối với cách làm dưới đây, bởi điều quan trọng hơn một lời giải, là nó cho ta thấy được gốc rễ của vấn đề:



<u>C2:</u> Kẻ EF cắt BC tại K theo bài toán 1 ta có $(K,H,B,C)=-1$ (1)
Gọi L là giao điểm của EF với AH.
Từ (1) suy ra $(AK,AH,AB,AC)=-1$ suy ra $(K,L,F,E)=-1$ (định lí chùm điều hòa)
Vì $LHK=90^0$ nên theo nhận xét trong định lí 2 ta có đpcm.

*<u>*Nhận xét:</u> Quá ngắn gọn phải không, tôi nghĩ rất có thể bài toán trên đã được đặt ra như vậy. Các bạn có thể thấy chỉ vài biến đổi nhỏ và một kĩ xảo để che dấu điểm K đã khiến cho bài toán 1.1 trở nên cực khó. Tất nhiên từ lời giải này chúng ta có thể phát biểu bài toán tổng quát hơn như sau:*

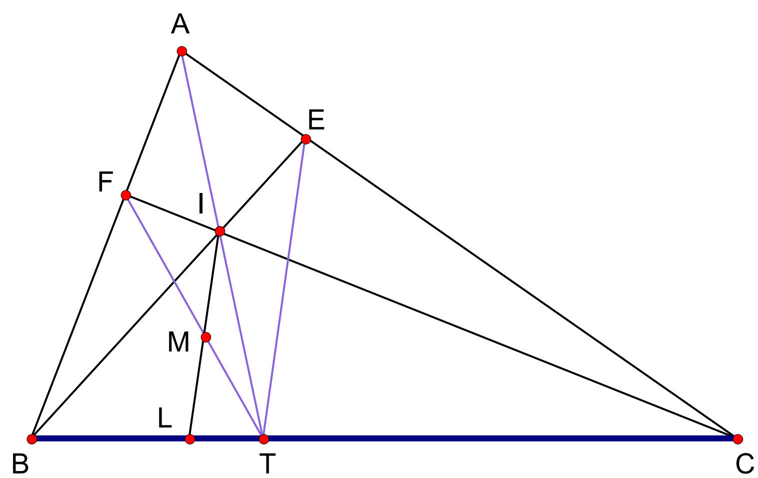
Bài toán 1.2:(đề thi Iran)
Cho tam giác ABC, lấy T,E,F lần lượt thuộc các đoạn BC,CA,AB sao cho 3 đường thẳng AT,BE,CF đồng quy tại một điểm.Gọi L là giao điểm của AT và EF.Gọi H là hình chiếu của L xuống BC. Chứng minh rằng LH là phân giác của $\angle EHF$.



(chứng minh tương tự bài 1.1)

*<u>*Nhận xét:</u>*
Nói chung từ 1 hàng điểm điều hòa ban đầu ta có thể "sinh sôi nảy nở" ra rất nhiều hàng điểm điều hòa khác mà một trong chúng nếu kết hợp với các định lí 2 và 3 sẽ cho ta rất nhiều tính chất thú vị. Thí dụ các bài 1.1 và 1.2 là "sản phẩm" của định lí 2. Nếu bạn thích có thể sử dụng định lí 3 để "xuất khẩu" những sản phẩm mới, chẳng hạn bài toán sau đây:

Bài toán 1.3:
Cho tam giác ABC, lấy T,E,F lần lượt thuộc các đoạn BC,CA,AB sao cho 3 đường thẳng AT,BE,CF đồng quy tại điểm I. Kẻ đường thẳng qua I song song với TE và cắt TF,TB lần lượt tại M và L. Chứng minh rằng M là trung điểm của LI



(chứng minh: sử dụng tính chất chùm điều hòa như bài 1.1 rồi áp dụng định lí 3)

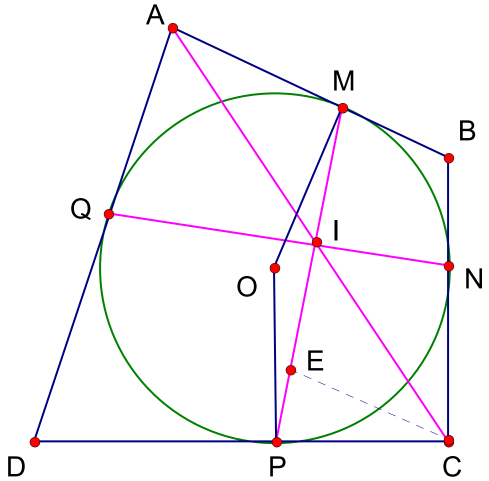
Qua các thí dụ trên các bạn có thể thấy từ một vấn đề người ta có thể phát biểu dưới những cách khác nhau, những cách mà khi đọc đề chúng ta không hề thấy bất kì một liên hệ gì từ chúng, nhưng thực ra tất cả chúng đều xuất phát từ một gốc rễ. Nắm được gốc rễ tức là ta đã nắm được bài toán vậy.
Tất nhiên từ bài toán 1 sẽ sản sinh ra cả một lớp các bài toán rộng lớn, tôi không có thời gian nêu thêm ra đây mà chỉ hi vọng các bạn nếu gặp một trong số đó sẽ nhanh chóng cho nó… "lộ rõ nguyên hình".

Bây giờ tôi xin đi vào một không gian mới hơi khác một chút với các cách khai thác đã nêu ở trên nhằm giúp các bạn có một cái nhìn sâu sắc hơn cho bài toán 1. Nhưng trước hết tôi sẽ trang bị cho các bạn một số tính chất cần thiết, rồi sau đó chúng ta sẽ tìm cách liên hệ với bài toán 1 sau.

Tính chất 1:
Cho tam giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm (O). M,N,P,Q lần lượt là các tiếp điểm của AB,BC,CD,DA với đường tròn; khi đó ta có MP,NQ,AC,BD đồng quy tại một điểm.
Lời giải:
Hạ $CE // AB$
Chú ý $\angle OMP = \angle OPM \Rightarrow \angle BMP = \angle CPM \Rightarrow CE = CP$

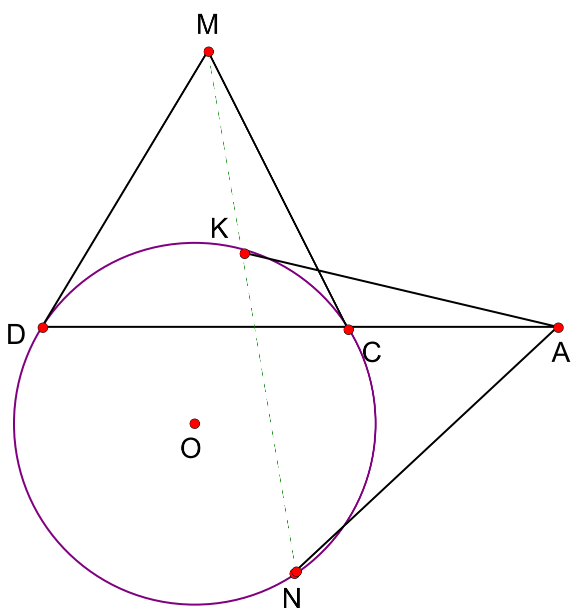
Do đó nếu gọi I là giao điểm của AC với MP thì ta có: $\frac{IA}{IC}=\frac{AM}{EC}=\frac{AM}{PC}$ (1)

Tương tự gọi I' là giao điểm của AC với NQ thì ta cũng có: $\frac{I'A}{I'C}=\frac{AQ}{NC}$ (2)



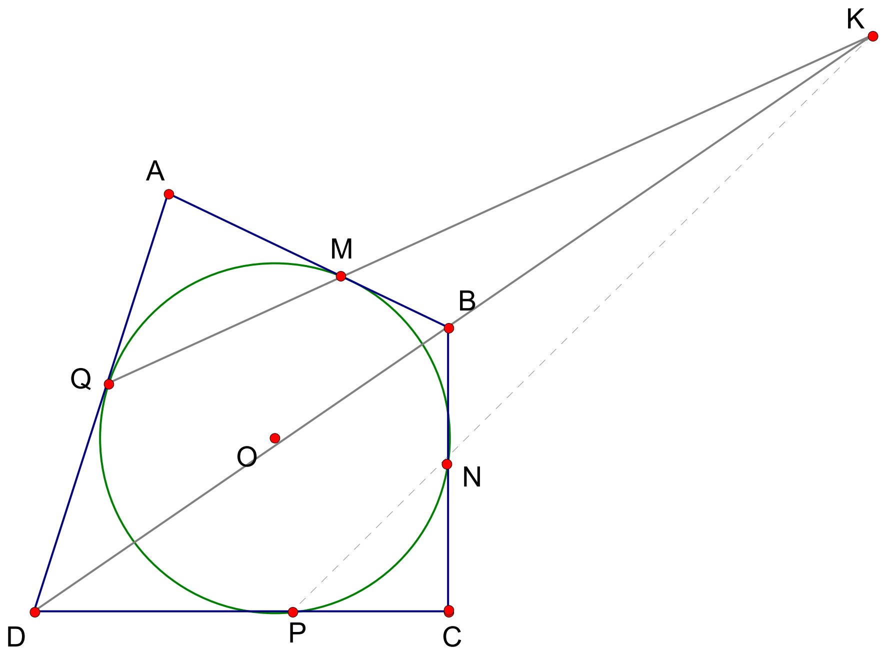
Chú ý AM=AQ và PC=NC nên từ (1) và (2) suy ra $I \equiv I'$
suy ra MP,NQ,AC đồng quy (3)
Lập luận tương tự ta có MP,NQ,BD đồng quy (4)
Kết hợp (3) và (4) ta được đpcm.

Tính Chất 2:
Cho đường tròn (O). Lấy một điểm A ngoài đường tròn (O), từ A ta kẻ hai tiếp tuyến AK,AN và một cát tuyến ACD bất kì đối với đường tròn trên. Hai tiếp tuyến qua C và D cắt nhau tại M. Khi đó ta có K,M,N thẳng hàng.
Lời giải:



Áp dụng "định lí về tứ giác điều hòa" cho điểm A với hai tiếp tuyến AK,AN và cát tuyến ACD suy ra KCND là tứ giác điều hòa.
Lại theo *nhận xét* trong "định lí về tứ giác điều hòa" suy ra NK,MD,MC đồng quy tại một điểm suy ra *đpcm*

Tính chất 3:
Cho tam giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm (O). M,N,P,Q lần lượt là các tiếp điểm của AB,BC,CD,DA với đường tròn. Chứng minh rằng MQ,NP và DB đồng quy tại một điểm.



Lời giải:
Gọi K là giao điểm của QM với DB
Áp dụng định lí Mênêlaúyt cho tam giác ABD với ba điểm thẳng hàng Q,M,K ta có:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.\frac{\overline{KB}}{\overline{KD}}.\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}}=1 \quad (1)$$

Chú ý $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{NC}}{\overline{NB}}$ và $\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}}=\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}$

Do đó từ (1) suy ra

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NB}}.\frac{\overline{KB}}{\overline{KD}}.\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}=1$$

Theo định lí Mênêlaúyt đảo suy ra K,N,P thẳng hàng suy ra *đpcm*