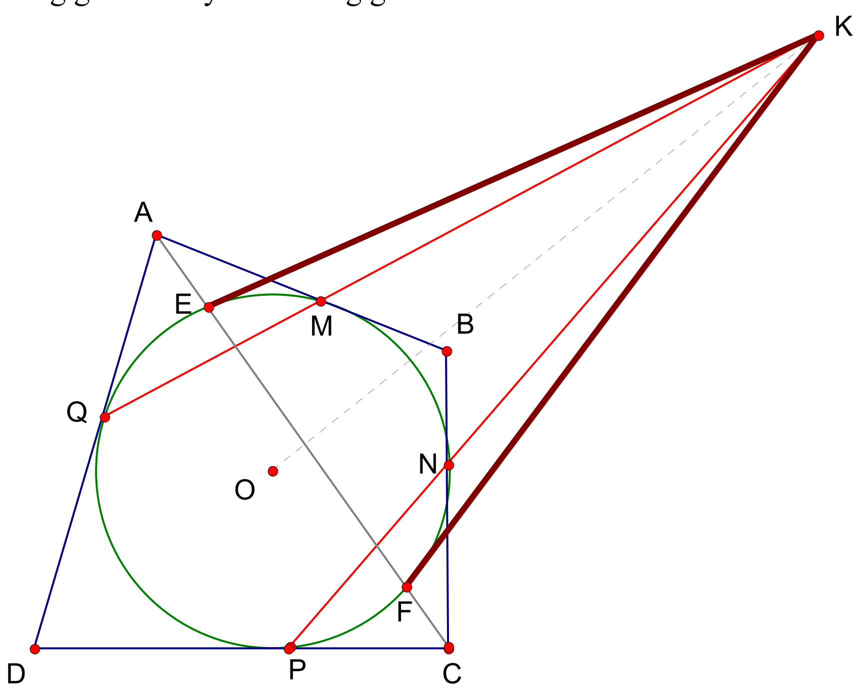
Tính chất 4:
Cho tam giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm (O). M,N,P,Q lần lượt là các tiếp điểm của AB,BC,CD,DA với đường tròn. Gọi K là giao điểm của MQ với NP. Gọi E và F là hai tiếp tuyến của K với (O).Chứng minh rằng:
a)A,E,F,C thẳng hàng
b)OK vuông góc AC.

Lời giải:
Gọi E’ và F’ là hai giao điểm của AC với (O).
Hai tiếp tuyến qua E’ và F’ cắt nhau tại K’
Áp dụng tính chất 2 với hai tiếp tuyên CN,NP và cát tuyến CF’E’ suy ra K’,N,P thẳng hàng. Tương tự K’,M,Q thẳng hàng hay K’ là giao điểm của MQ với NP hay $K' \equiv K$.
Suy ra $E' \equiv E, F' \equiv F$
Vậy A,E,F,C thẳng hàng. Mặt khác vì KE,KF là hai tiếp tuyến của K với O nên KO vuông góc EF hay KO vuông góc AC.



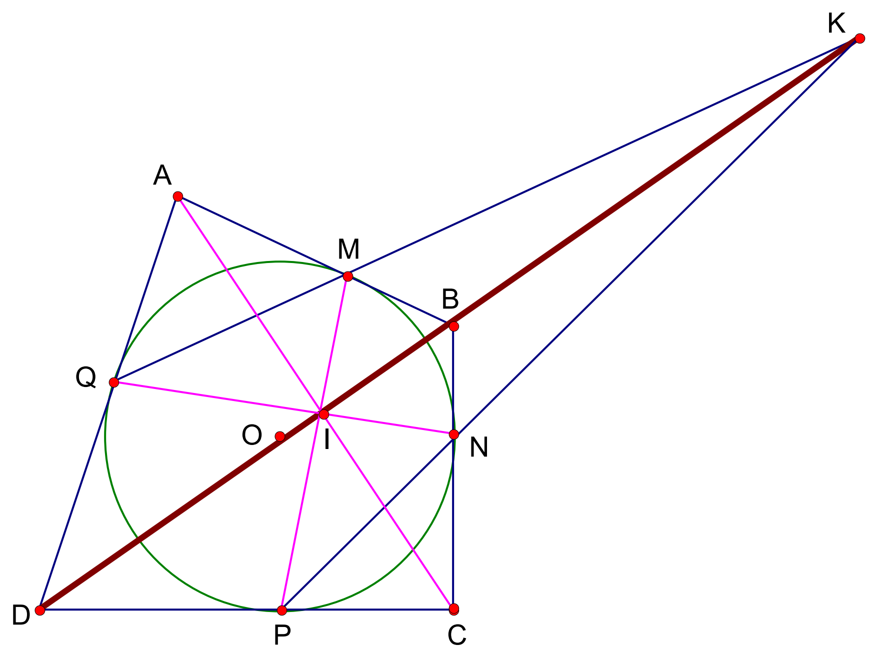
Và cuối cùng là tính chất quan trọng nhất có ý nghĩa là cầu nối giữa các tính chất nêu trên với bài toán 1 của chúng ta.

Tính chất 5:
Cho tam giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm (O). M,N,P,Q lần lượt là các tiếp điểm của AB,BC,CD,DA với đường tròn. Gọi K là giao điểm của MQ với NP và I là giao điểm của MP với QN. Chứng minh rằng $(D,B,I,K) = -1$.

Lời giải:
*Áp dụng định lí Mênêlaúyt cho tam giác ABD với 3 điểm thẳng hàng K,M,Q ta có:
$\frac{KB}{KD}.\frac{QD}{QA}.\frac{MA}{MB} = 1$ hay $\frac{KB}{KD} = \frac{MB}{QD}$ (vì QA=MA) (1)

*Mặt khác theo lời giải trong tính chất 1 thì ta đã biết: $\frac{MB}{QD}=\frac{IB}{ID}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{KB}{KD}=\frac{IB}{ID}$



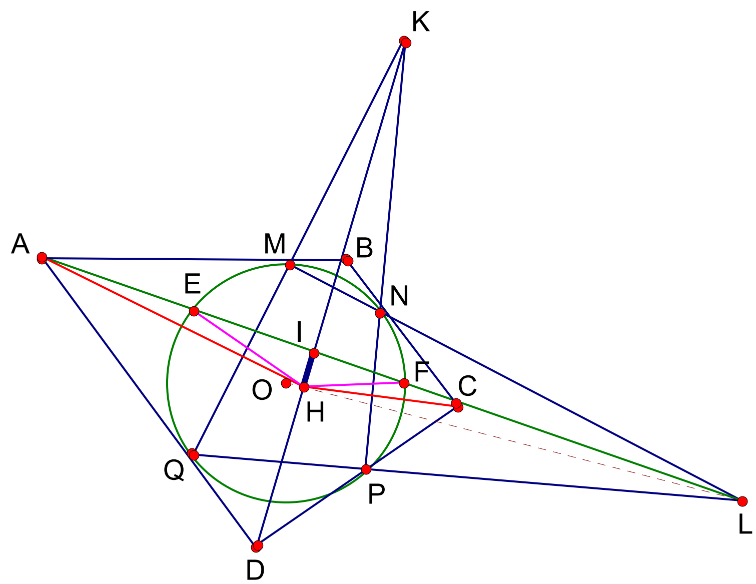
Vì I nằm trong đoạn BD và K nằm ngoài đoạn BD nên: $\frac{\overline{KB}}{\overline{KD}}=-\frac{\overline{IB}}{\overline{ID}}$

Vậy $(D,B,I,K)=-1$ $(đpcm)$

<u>*Nhận xét:</u> *Việc xuất hiện hàng điểm điều hòa (tính chất 5) ở đây đóng một vai trò vô cùng quan trọng, để dễ hiểu các bạn hãy tưởng tượng bốn tính chất 1,2,3,4 như một kho thuốc súng có sức tàn phá khủng khiếp nhưng đang bị đè nén trong bao, và tính chất 5 chính là mồi kích hoạt kho thuốc súng ấy để tạo nên một sự bùng nổ vô cùng ghê gớm, đến mức, hàng loạt các tính chất mới được sinh ra dồn dập đến chóng mặt…*

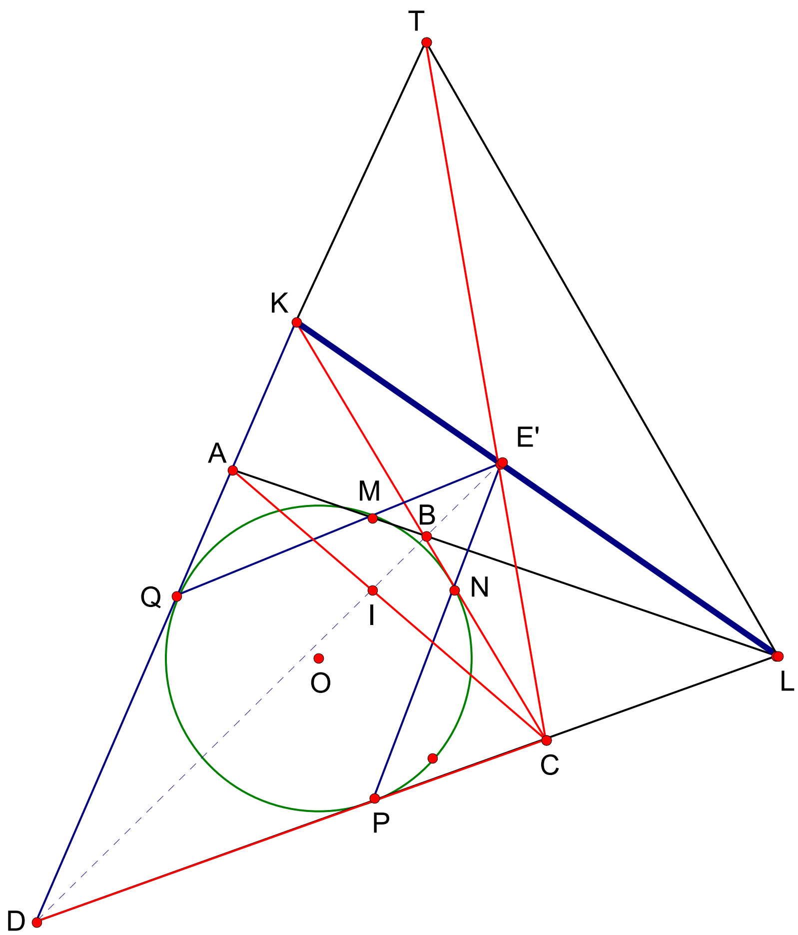
Do khuôn khổ bài viết có hạn nên tôi chỉ xin trình bày một số kết quả tương đối quen thuộc(được rút ra từ 5 tính chất trên) với hi vọng sẽ đưa đến cho các bạn một cái nhìn mới mẽ về những vấn đề không mới mẽ chút nào.
Xin bắt đầu chiến dịch bằng một bài trên “tạp chí Toán học và tuổi trẻ”:

Bài toán 1.4:
Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O) . Gọi E,F lần lượt là giao điểm AC với (O). Hạ $OH\perp DB$. Chứng minh rằng $\angle AHE=\angle CHF$ (*)



Lời giải:
Gọi M,N,P,Q lần lượt là tiếp điểm của AB,BC,CD,DA với (O). Đặt $L = MN \cap QP$, $K = QM \cap PN$ và $I = DK \cap AL$. Vì hai tứ giác KEOH và KFOH nội tiếp suy ra 5 điểm K,E,O,H,F cùng thuộc một đường tròn suy ra $\angle EHK = \angle FHK$ do vậy để chứng minh (*) ta cần chứng minh HI là phân giác $\angle AHC$.
Thật vậy theo tính chất 4 suy ra OL vuông góc BD hay HI vuông góc HL do đó theo kết quả tính chất 5 thì ta đã có:
$(A, C, I, L) = -1$ do vậy áp dụng định lí 2 suy ra HI là phân giác $\angle AHC$ (*đpcm*)

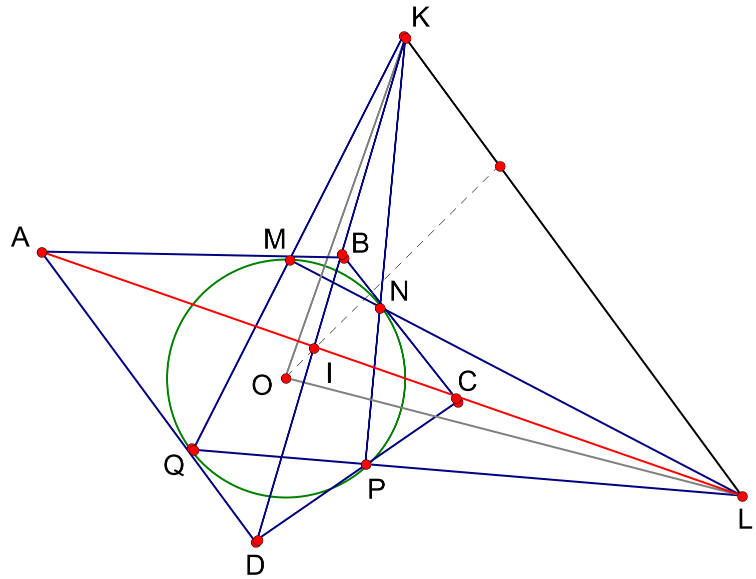
Bài toán 1.5:
Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O) và M,N,P,Q lần lượt là các tiếp điểm của AB,BC,CD,DA. Đặt $K = AD \cap BC$, $L = AB \cap DC$, $E = QM \cap PN$, $F = QP \cap MN$.
Chứng minh rằng 4 điểm K,L,E,F cùng nằm trên một đường thẳng.
Lời giải:
Gọi I là giao điểm giữa BD với AC, E' là giao điểm DB với KL, T là giao điểm CE' với DK, theo bài toán 1 thì $(T, A, K, D) = -1$(tam giác DKL với ba đường đồng quy LA,KC,DE') suy ra $(CT, CA, CK, CD) = -1$ theo định lí chùm điều hòa suy ra $(E', I, B, D) = -1$ tuy nhiên theo tính chất 5 thì đã có $(E, I, B, D) = -1$
Do vậy $E' \equiv E$ suy ra E,K,L thẳng hàng (1).
Lập luận tương tự cũng có F,K,L thẳng hàng (2).
Kết hợp (1) và (2) suy ra *đpcm*



<u>*Nhận xét:</u>
Quá bất ngờ phải không? Những bài toán tưởng chừng hoàn toàn xa lạ nhưng tìm ẩn bên trong lại là những mối quan hệ vô cùng khăn khít. Tất cả chúng tạo nên cả một hệ thống với sự biến ảo khôn lường.

Vấn đề đến đây lại mở ra rất nhiều vấn đề hấp dẫn mới, chúng ta khai thác chút xíu xem thử có thu được điều gì thú vị không nhá.

Bài toán 1.6:
Cho tứ giác MNPQ nội tiếp đường tròn (O) có $QM \cap PN = K$, $MN \cap QP = L$, $MP \cap QN = I$ .Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KOL
Lời giải:
Kẻ 4 tiếp tuyến qua M,N,P,Q chúng cắt nhau tại 4 điểm là A,B,C,D (hình vẽ)
Theo tính chất 1 thì I cũng là giao điểm của AC với BD
Theo tính chất 4 thì $BD \perp OL$
Theo tính chất 3 thì D,B,K thẳng hàng
Suy ra $KI \perp OL$
Tương tự $LI \perp OK$
Vậy ta có *đpcm*



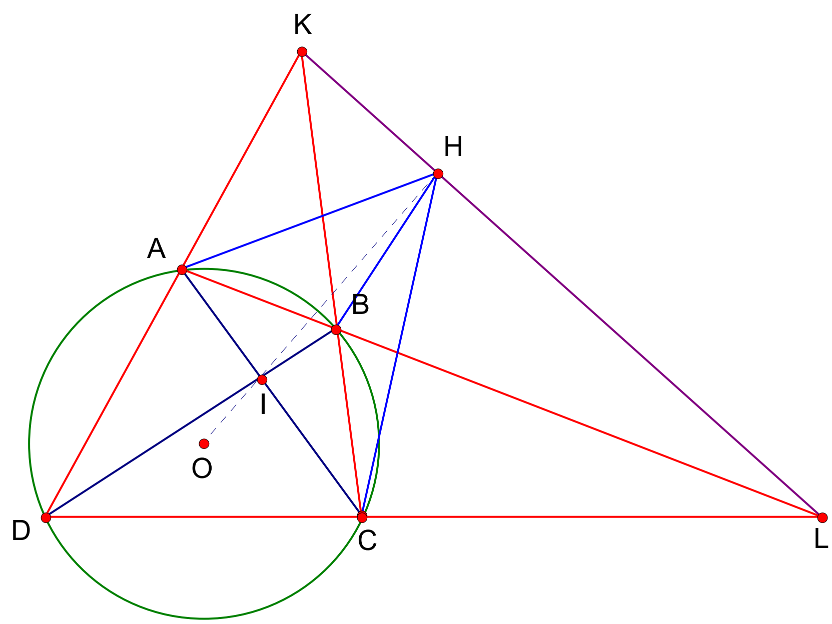
Nhận xét:

Kết quả của bài 1.6 giúp ta có mối liên hệ tuyệt vời với bài 1.2 để được bài toán sau:

Bài toán 1.7:

Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Đặt $K = DA \cap CB$, $L = AB \cap DC$, $I = AC \cap BD$. OI cắt KL tại H .Chứng minh rằng OH là phân giác của $\angle AHC$

Lời giải:



Theo bài 1.6 thì I là trực tâm của tam giác KOL suy ra $OI \perp KL$ hay $IH \perp KL$

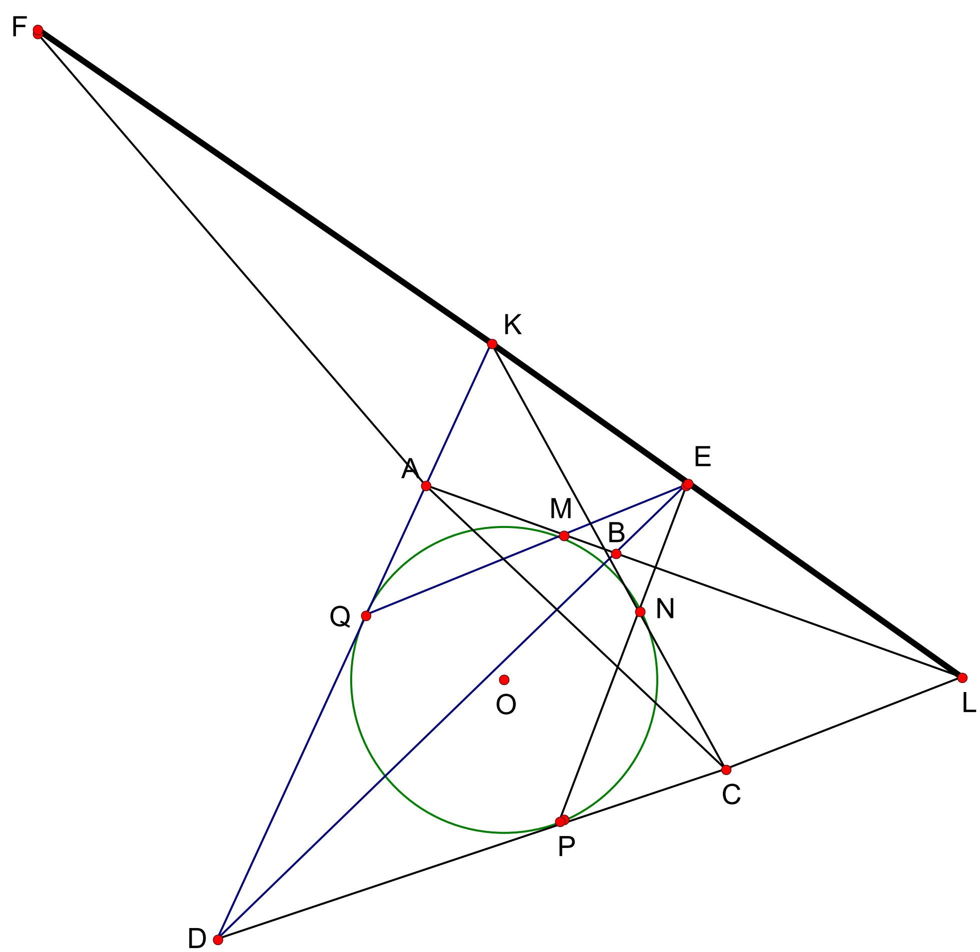
Đến đây bài toán này đã trở thành bài toán 1.2 và vấn đề được giải quyết.

Còn rất nhiều hướng khai thác xung quanh vấn đề này nhưng việc trình bày quá tốn thời gian nên để các bạn tự tìm tòi thêm vậy. Cuối cùng xin nêu lên một vấn đề có tính gợi mở để các bạn xem chơi:

Bài toán 1.8:

Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Đặt $K = DA \cap CB$, $L = AB \cap DC$,
Gọi M,N,P,Q lần lượt là tiếp điểm của AB,BC,CD,DA với (O). Đặt $F = PQ \cap MN$,
$E = QM \cap PN$. Chứng minh rằng $(F,E,K,L) = -1$

Lời giải:



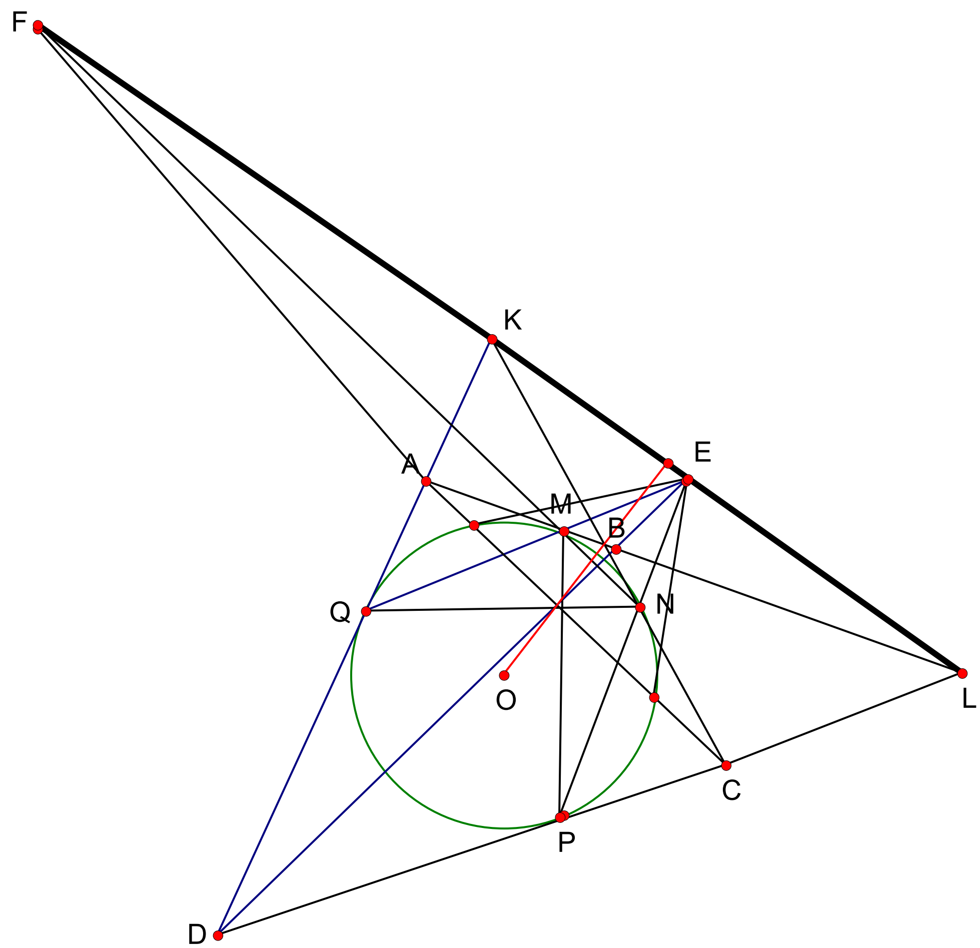
+Theo bài toán 1.5 thì F,K,E,L thẳng hàng

+Theo tính chất 3 thì CA,MN,PQ đồng quy suy ra $F \in AC$

Do vậy theo bài toán 1(cho tam giác KDL với ba đường đồng quy DE,AL,KC) ta có $(F,E,K,L) = -1$

*Hẳn qua các thí dụ trên các bạn đã thấy thích thú hơn khi nhìn một bài toán hình học dưới con mắt của "hàng điểm điều hòa". Nhờ nó mà ta có thể thông suốt được nhiều vấn đề để cuối cùng ngộ ra…tất cả đều quá rõ ràng và hiển nhiên.

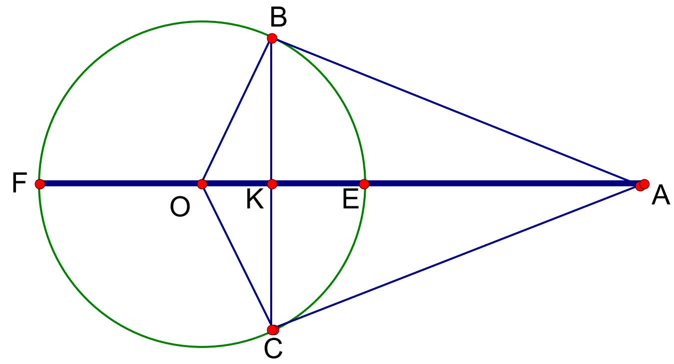
Tất nhiên còn rất nhiều bài toán được sản sinh từ các điều đã nêu ở trên, nhưng chỉ cần một "chùm điều hòa" soi vào là "lộ rõ nguyên hình" nên chúng ta cũng không cần nêu thêm ra đây cho tốn giấy mực làm gì.
Xin mời các bạn nhìn lại hình vẽ dưới đây để tưởng nhớ lại toàn bộ các điều đã học được ở trên, trước khi bước vào một lớp các bài toán khác:



Tiếp theo chương trình chúng ta sẽ khảo sát một dạng toán khác:

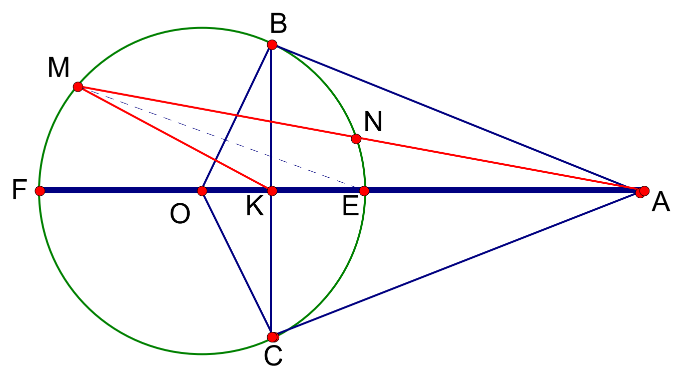
Bài toán 2:
Cho A nằm ngoài đường tròn (O), từ A kẻ hai tiếp tuyến AB,AC trong đó B,C là hai tiếp điểm . AO cắt cắt đường tròn tại hai điểm E,F và cắt đường thẳng BC tại K. Chứng minh rằng $(A,K,E,F)=-1$

Lời giải:
Ta có $OB^2 = OK.OA$ (hệ thức lượng tam giác vuông) (1)
Mặt khác: $OB^2 = OE^2 = OF^2$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $OE^2 = OF^2 = OK.OA$
Theo nhận xét của định lí 1 suy ra *đpcm*



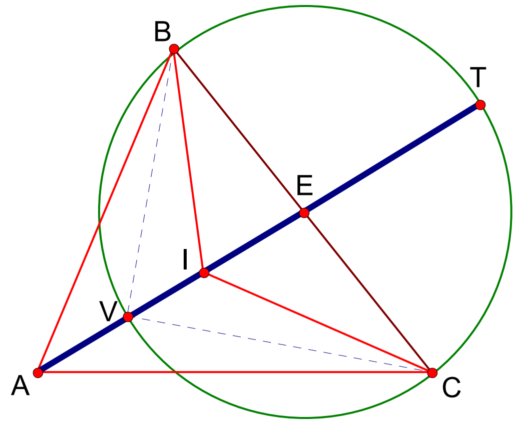
*Một hệ quả thấy ngay từ bài toán này là:

Bài toán 2.1:
Cho A nằm ngoài đường tròn (O), từ A kẻ hai tiếp tuyến AB,AC và cát tuyến AMN bất kì trong đó N nằm giữa A và M. AO cắt đoạn BC và cung nhỏ BC lần lượt tại K và E. Chứng minh rằng ME là phân giác của $\angle KMA$



Lời giải :
Gọi F là giao điểm thứ hai của AE với (O) theo bài toán 2 ta có $(A,K,E,F) = -1$
Vì $\angle FME = 90^0$ nên theo nhận xét của định lí 2 ta có *đpcm.*

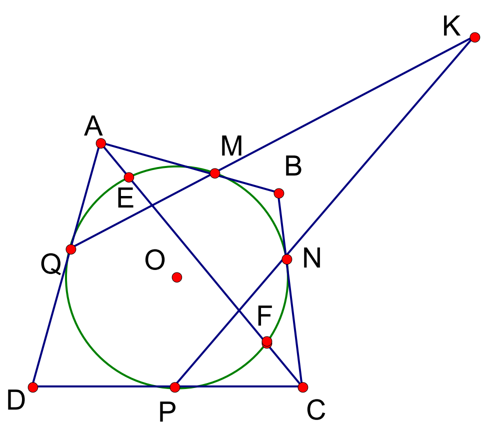
*Tinh tế hơn một chút ta thu được bài toán rất khó sau:
Bài toán 2.2: *(kimluan)*
Cho tam giác ABC bất kì. Lấy một điểm I trong ta giác sao cho $\angle IAB = \angle IBC$ và $\angle IAC = \angle ICB$. Lấy V là một điểm trên AI sao cho $\angle BVC = 90^0$. Chứng minh rằng BV là phân giác của $\angle ABI$ và CV là phân giác của $\angle ACI$.
Lời giải:
Gọi E là giao điểm của AI với BC.
Vì tam giác IBE đồng dạng tam giác EAB(g.g)
Suy ra $EB^2 = EI.EA$ (1)
Tương tự: $EC^2 = EI.EA$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra E là trung điểm của BC
Vẽ đường tròn đường kính BC đường tròn này đi qua V và nhận E làm tâm do đó
$EV^2 = ET^2 = EB^2$ (3)



Từ (1) và (3) suy ra $EV^2 = ET^2 = EI.EA$
Theo nhận xét trong định lí 1 ta có $(A, E, I, T) = -1$
Mà $\angle VBT = 90^0$
Nên theo định lí 2 suy ra BV là phân giác của $\angle ABI$
Lập luận tương tự suy ra CV là phân giác của $\angle ACI$.
Vậy bài toán được giải quyết trọn vẹn.

Nhận xét:
+Điểm I *được xác định như trên có rất nhiều tính chất kì lạ nhưng nếu sa vào vấn đề này thì e rằng không đi đến mục tiêu của bài viết nên ta tạm gác lại vấn đề này ở đây và hẹn sẽ bàn lại vào một dịp khác,một chương đề khác.*

Bài toán 2.3:
Cho (O) và một điểm K bất kì nằm ngoài (O). Từ K ta kẻ hai tiếp tuyến OE,OF và hai cát tuyến KMQ và KNP bất kì .Chứng minh rằng EF,MN,PQ đồng quy tại một điểm.
Lời giải:

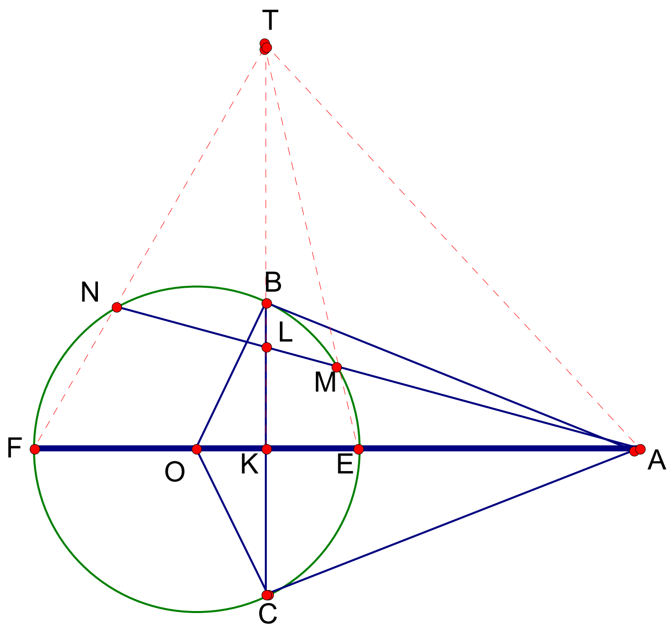


Ta lần lượt kẻ tiếp tuyến qua M,N,P,Q .Các tiếp tuyến này cắt nhau tại 4 điểm A,B,C,D (hình vẽ). Theo tính chất 4 thì A,E,F,C thẳng hàng và theo tính chất 3 thì AC,MN,PQ đồng quy tại một điểm từ đó suy ra EF,MN,PQ đồng quy tại một điểm *(đpcm)*

*Từ bài toán này ta suy được bài toán tổng quát của bài toán 2 như sau:

Bài toán 2.4:

Cho A nằm ngoài đường tròn (O), từ A kẻ hai tiếp tuyến AB,AC và cát tuyến AMN bất kì trong đó N nằm giữa A và M. Gọi L là giao đểm của MN với BC. Chứng minh rằng $(A,L,M,N) = -1$



Lời giải:

Gọi E,F là giao điểm của AO với (O) trong đó E nằm giữa F và A. Gọi K là giao điểm của EF với BC khi đó theo bài toán 2 thì $(A,K,E,F) = -1$ (1)

Mặt khác theo bài toán 2.3 thì NF,BK,ME đồng quy và gọi điểm đồng quy là T (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(TA,TK,TE,TF) = -1$

Theo định lí chùm điều hòa suy ra $(A,L,M,N) = -1$ (đpcm)

*<u>*Nhận xét:</u>*

Từ bài toán trên ta suy được bài toán khá hay sau đây:

"Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) có cắt nhau tại hai điểm E và F. Lấy một điểm A bất kì trên tia EF kéo dài. Kẻ hai tiếp tuyến AM,AN với (O_1) và hai tiếp tuyến AP,AQ với (O_2). Chứng minh rằng ba đường thẳng MN,PQ,EF đồng quy tại một điểm."