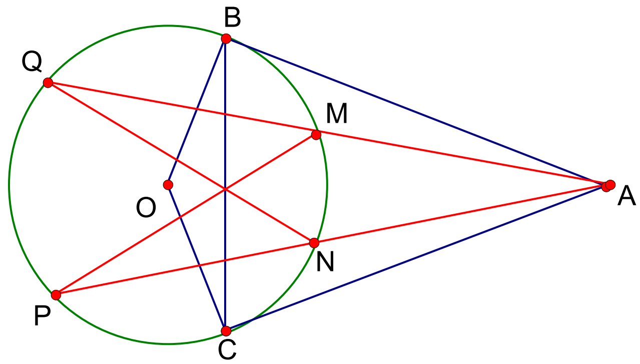
(chứng minh: Gọi I là giao điểm của EF với MN, trong tam giác O_1 ta có (A,I,F,E)=−1 tương tự gọi I' là giao điểm của EF với PQ cũng có (A,I',F,E)=−1 suy ra I trùng I' suy ra đpcm)

*Chú ý sử dụng tính chất 1 và tính chất 4 cho ta bài toán sau đây:

Bài toán 2.5:

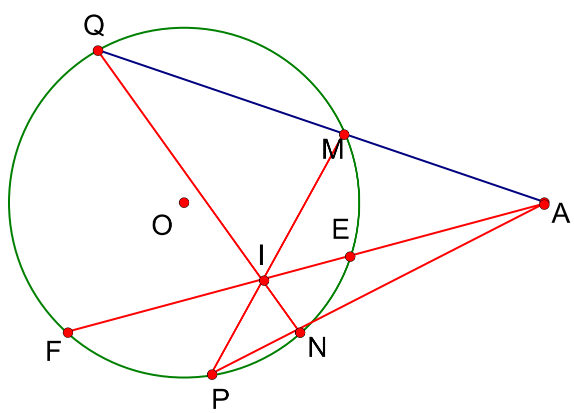
Cho (O) và một điểm A bất kì nằm ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AB,AC và hai cát tuyến AMQ và ANP.Chứng minh rằng BC, QN và PM đồng quy tại một điểm.



Từ bài toán này ta có một cách phát biểu khác cho bài toán 2.4:

Bài toán 2.6:

Cho (O) và một điểm A bất kì nằm ngoài (O). Kẻ hai cát tuyến AMQ và ANP. Gọi I là giao điểm của PM với QM và E,F là giao điểm của AI với (O)
(E nằm giữa A và F). Chứng minh rằng (A,I,E,F) = −1



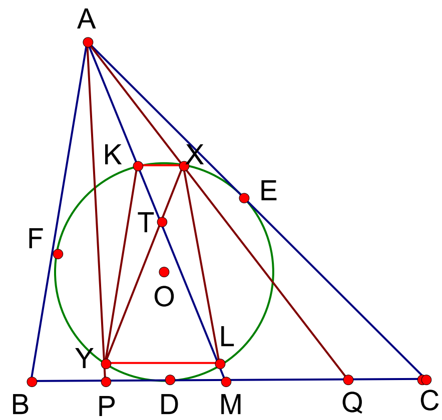
Đây là một mảnh đất khá tươi tốt nên tôi để dành cho các bạn tự cày xới, chúc các bạn sẽ tìm được những viên ngọc "lấp lánh" trong mảnh đất này.

Xét theo một khía cạnh khác!!!

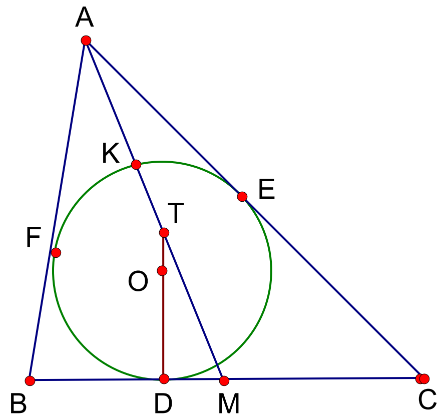
Các vấn đề ở trên chúng ta chỉ thực hiện theo tư tưởng phát triển và tìm kiếm nên có vẻ hơi tài tử. Nếu như ta gặp một bài toán nào đó hoàn toàn xa lạ thì ta phải tiếp cận như thế nào ? Và "hàng điểm điều hòa" liệu trong những trường hợp này có còn là một công cụ hiệu lực ? Đây là một câu hỏi lớn thể hiện một công cụ là mạnh hay yếu!

Để thể hiện "sức mạnh" của công cụ vừa dẫn sau đây tôi sẽ trình bày ba thí dụ khá điển hình cùng cách tấn công vô cùng dũng mãnh do bạn Hophu cung cấp.

Thí dụ 1: *(đề Iran)*
Cho đường tròn nội tiếp (O) của tam giác ABC.Gọi M là trung điểm BC, AM cắt (O) tại hai điểm K và L(K nằm giữa A và L).Qua K kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại điểm thứ hai là X, Qua L kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại điểm thứ hai là Y, AX và AY cắt BC lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng M là trung điểm của PQ.



Lời giải: (Hophu)
**Tư tưởng: Ta thấy các yếu tố trong bài có vẻ quá lượm thượm, nên nếu hấp tấp lao vào "búa" ngay thì lập tức sẽ gặp nhiều khó khăn cũng rất lượm thượm. Do đó trước hết cần xem thử đâu là những yếu tố chính đâu là yếu tố chỉ để làm rối, gạn hết những thằng "giấy dá" làm rối đi , đưa về một bài toán đơn giản hơn rồi mới động thủ.*
Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của BC,CA,AB với (O)
Ta có: $\frac{LY}{MP}=\frac{AL}{AM}$ và $\frac{MQ}{KX}=\frac{AM}{AK}$ Suy ra $\frac{LY}{MP}.\frac{MQ}{KX}=\frac{AL}{AK}$
Do đó để chứng minh M là trung điểm PQ ta cần chứng minh $\frac{LY}{KX}=\frac{AL}{AK}$ (1)
Gọi T là giao điểm của KL với YX ta có $\frac{LY}{KX}=\frac{TL}{TK}$ (2)
Từ (2) suy ra để chứng minh (1) ta cần chứng minh $\frac{TL}{TK}=\frac{AL}{AK}$
Hay cần chứng minh $(A,T,K,L)=-1$
Chú ý KXLY là hình thang cân nên dễ thấy T nằm trên OD đến đây vấn đề lộ ra rất rõ:
**Bình luận: các điểm P,Q,X,Y chỉ là các điểm để làm rối, thực chất cái lõi của bài toán là bài toán sau:*
" Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC. Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của BC,CA,AB với (O). Gọi M là trung điểm BC, AM cắt (O) tại K và L (K nằm giữa A và L). OD cắt AM tại T. Chứng minh rằng $(A,T,K,L)=-1$ " (*)



Vấn đề đến đây lại mở ra một tương lai mới vì theo bài toán 2.4 nếu ta gọi T' là giao điểm giữa EF với AM thì (A,T',K,M) $= -1$

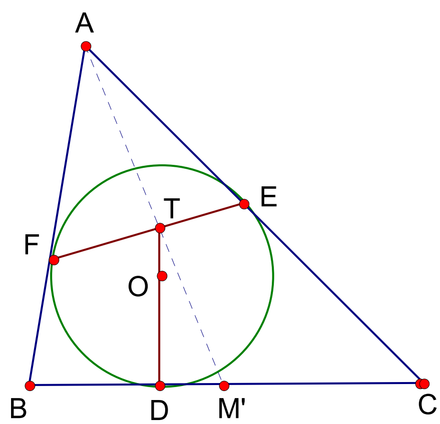
Vậy để chứng minh bài toán (*) ta chỉ cần chứng minh $T \equiv T'$ hay cần chứng minh T nằm trên EF hay cần chứng minh 3 đường thẳng AM,EF,OD đồng quy (3)

Gọi L là giao điểm của OD với EF và M' là giao điểm của AL với BC.

Để chứng minh (3) ta cần chứng minh $L \equiv T$ hay cần chứng minh $M' \equiv M$

Vậy ta quy về chứng minh bài toán sau:

" Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC. Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của BC,CA,AB với (O). OD cắt EF tại L.AL cắt BC tại M'. Chứng minh rằng M' là trung điểm của BC" (**)



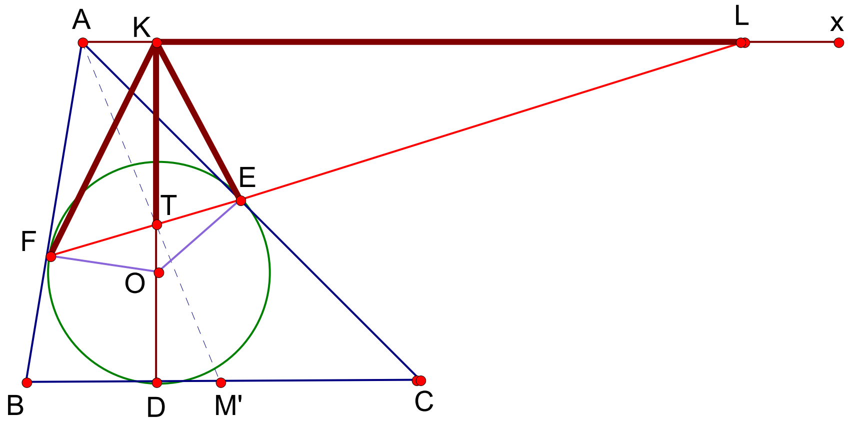
**Bình luận:* *Bước quy từ bài toán (*) thành bài toán (**) gọi là bước "đảo giả thiết" nghĩa là thay vì ta phải chứng minh một yếu tố nào đó mà ta cảm thấy khó chịu như chứng minh thẳng hàng chẳng hạn thì ta có thể cho nó thẳng hàng luôn, bù lại ta phải hi sinh một giả thiết đã có từ trước và nhiệm vụ phải chứng minh giả thiết mới hi sinh có thể được suy ra từ những điều đã có (các bạn có thể so sánh bài toán (*) với bài toán(**) để thấy rõ điều này) Việc đảo giả thiết này tuy đơn giản nhưng đôi khi lại đem đến những hiệu quả bất ngờ vì có những bài mà bài toán gốc rất khó chứng minh trong khi chỉ cần đảo lại một phát thì vấn đề lại rõ như ban ngày!!!*

Bây giờ ta sẽ chứng minh bài toán (**)

Kẻ tia Ax song song với BC (về phía C), FE cắt Ax tại L

Theo hệ quả 2 (phần lí thuyết chùm điều hòa) suy ra để chứng minh M' là trung điểm BC ta cần chứng minh (AB,AC,AM',AL) $= -1$ hay cần chứng minh (AF,AE,AT,AL) $= -1$

Hay cần chứng minh (F,E,T,L) $= -1$ (4)



Kẻ DT vuông góc AL và cắt AL tại K dễ chứng tỏ 5 điểm A,K,E,O,F cùng nằm trên một đường tròn mà OF=OE nên suy ra $\angle OKF = \angle OKE$ (5)

Theo cách vẽ điểm K thì ta có $\angle TKL = 90^0$ (6)

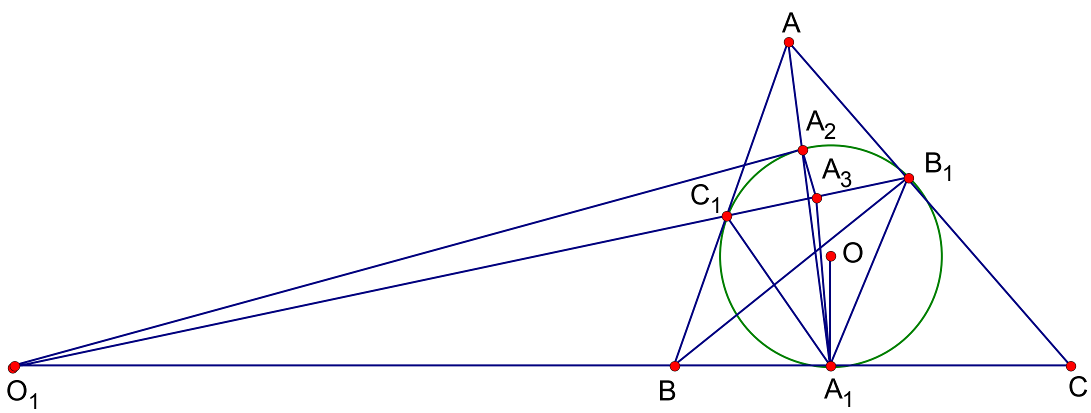
Kết hợp (5),(6) và theo hệ quả 1 (phần lí thuyết chùm điều hòa) suy ra $(KF, KE, KT, KL) = -1$

Suy ra (4) đúng suy ra *đpcm*

Thí dụ 2:

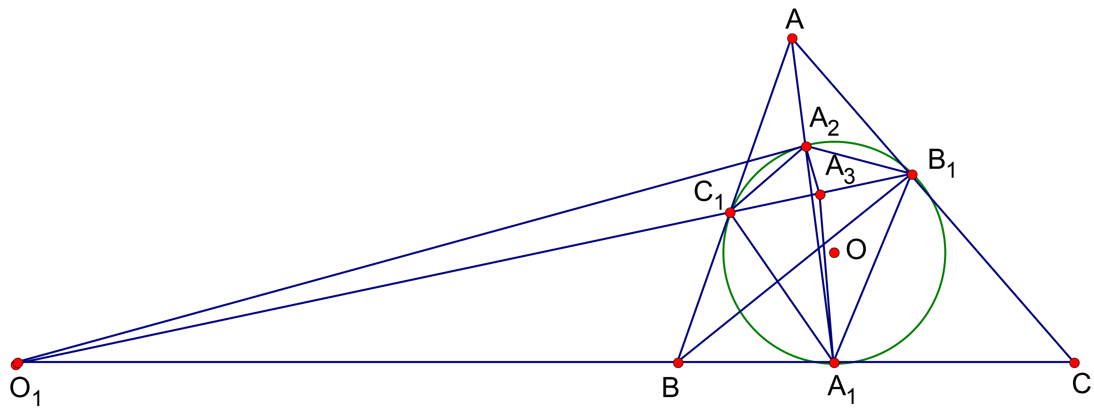
Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tiếp điểm của BC,CA,AB với (O), A_2 là giao điểm thứ hai của AA_1 với (O) và B_2 là giao điểm thứ hai của BB_1 với (O). Phân giác của $\angle B_1A_1C_1$ cắt B_1C_1 tại A_3, phân giác của $\angle A_1B_1C_1$ cắt C_1A_1 tại B_3. Chứng minh rằng $P\_\{O/(A_1A_2A_3)\} = P\_\{O/(B_1B_2B_3)\}$

Lời gải: (Hophu)



Kẻ B_1C_1 cắt BC tại O_1. Vẽ hình chính xác ta thấy có vẻ như O_1 là tâm của $A_1A_2A_3$. Ta chưa biết điều này đúng hay sai nhưng cứ cho là nó đúng xem sao. Khi đó OA_1 là tiếp tuyến của $(A_1A_2A_3)$ (vì $OA_1 \perp O_1A_1$) nên $P\_\{O/(A_1A_2A_3)\} = OA_1^2$ .Lập luận tương tự ta có $P\_\{O/(B_1B_2B_3)\} = OB_1^2$ chú ý $OA_1 = OB_1$ nên ta có đpcm.

Vậy dự đoán phía trên của ta là đúng và bây giờ ta chỉ cần chứng minh O_1 là tâm của $A_1A_2A_3$ nữa là xong. Vậy ta quy về chứng minh bài toán đơn giản hơn như sau:
"Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tiếp điểm của BC,CA,AB với (O), A_2 là giao điểm thứ hai của AA_1 với (O). Phân giác của $\angle B_1A_1C_1$ cắt B_1C_1 tại A_3 gọi O_1 là giao điểm của B_1C_1 với BC. Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$".



Theo "định lí về tứ giác điều hòa" ta có $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{A_2B_1}{A_2C_1}$ (1)

Mà A_1A_3 là phân giác của $\angle B_1A_1C_1$ suy ra $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{A_3B_1}{A_3C_1}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{A_3B_1}{A_3C_1}$ suy ra A_2A_3 là phân giác của $\angle B_1A_2C_1$

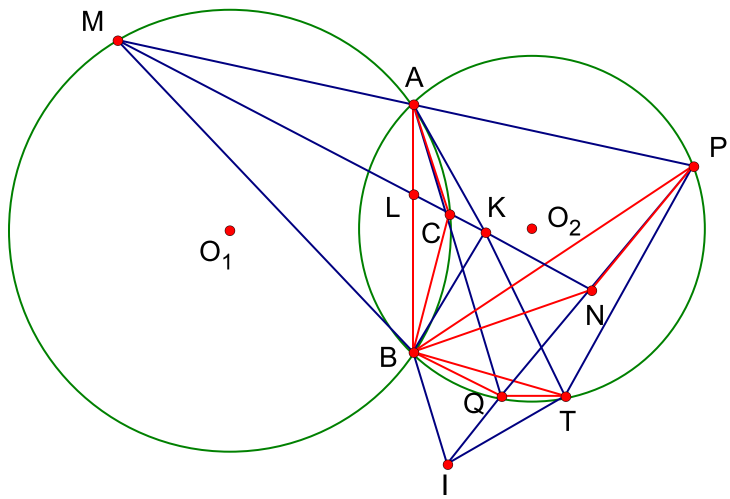
Tất nhiên để chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ ta chỉ cần chứng minh $OA_2 = OA_3$ tức cần chứng minh $\angle O_1A_2A_3 = \angle O_1A_3A_2$

Thật vậy: $\angle O_1A_2A_3 = \angle O_1A_2C_1 + \angle C_1A_2A_3 = \angle A_2B_1C_1 + \angle B_1A_2A_3 = \angle A_2A_3C_1$ *(đpcm)*

Thí dụ 3: *(chọn đội tuyển Việt Nam)*
Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm A và B. Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O_1) cắt nhau tại K. Lấy M bất kì trên (O_1). MK cắt (O_1) tại điểm thứ hai là C. Gọi P và Q lần lượt là MA,MB với (O_2)
a)Chứng minh rằng MC chia đôi đoạn thẳng PQ
b)Chứng minh rằng PQ luôn đi qua một điểm cố định.
Lời giải: (Hophu)
a) Gọi N là giao điểm của MK với PQ ta cần chứng minh NP=NQ (1)
Gọi C và L lần lượt là giao điểm của MK với (O_1) và MK với đoạn thẳng AB.
Ta có ACBM là tứ giác điều hòa (định lí tứ giác điều hòa) do đó: $\frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MB}$ (2)
Mặt khác $\angle BPQ = \angle BAQ = \angle BAC = \angle BMC$ suy ra MPNB là tứ giác nội tiếp

suy ra tam giác ACB và tam giác PNB đồng dạng (g.g) suy ra $\frac{NP}{NB}=\frac{CA}{CB}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\frac{NP}{NB}=\frac{MA}{MB}$



Do vậy để chứng minh (1) ta cần chứng minh $\frac{NQ}{NB}=\frac{MA}{MB}$

Điều này đúng vì hai tam giác MAB và tam giác NQB đồng dạng (g.g)

Vậy câu a) được giải quyết.

b) Gọi T là giao điểm của AK với (O_2),hai tiếp tuyến tại T và B của (O_2) cắt nhau tại I rõ ràng I là điểm cố định. Sau nhiều lần vẽ hình chính xác ta thấy PQ luôn đi qua điểm I nên dự đoán I chính là điểm cố định mà PQ luôn đi qua và ta sẽ chứng minh điều này. Để chứng minh PQ luôn đi qua I ta chỉ cần chứng minh PBQT là tứ giác điều hòa là xong (theo nhận xét trong định lí về tứ giác điều hòa) (*)

*Để chứng minh (*) bạn Hophu cho biết ban đầu đã suy nghĩ như sau:

Theo bài toán 2.4 ta có (K,L,C,M)$=-1$ suy ra $(AK,AL,AC,AM)=-1$ hay $(AK,AL,AC,AP)=-1$ hay $(AB,AT,AQ,AP)=-1$

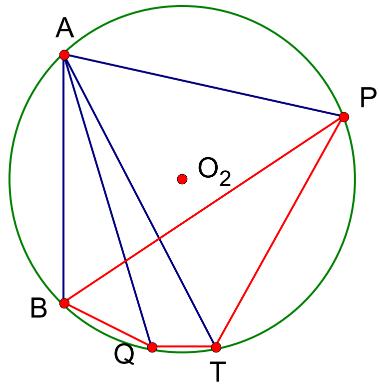
Ta thấy các điểm B,Q,T,P gần như chỉ có ý nghĩa để $(AB,AT,AQ,AP)=-1$ và nhiệm vụ của ta là cần chứng minh BQTB là tứ giác điều hòa. Vậy phải chăng có bài toán sau:

Bài toán lạ:

"Cho đường tròn (O_2) và một điểm A nằm trên đường tròn. Chùm điều hòa (Ax,Ay,Az,At)$=-1$ cắt (O_2) tại 4 điểm lần lượt là B,T,Q,P. Cmr: $(B,T,Q,P)=-1$ *"*

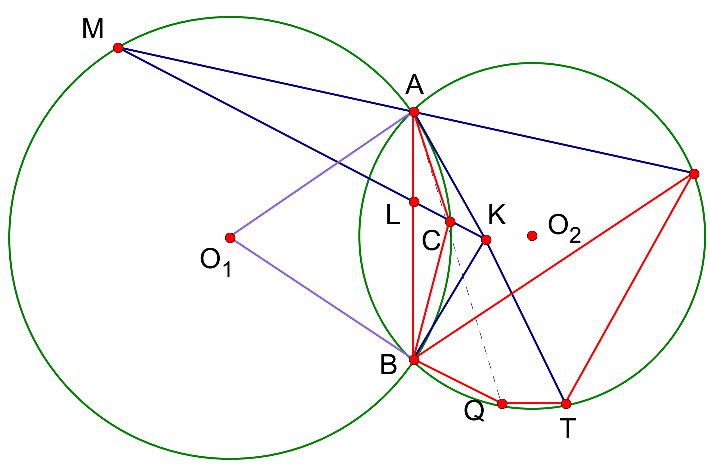
Một bài toán cực hay (là cầu nối tuyệt vời giữa chùm điều hòa và tứ giác điều hòa) và nếu nó đúng thì xem như thí dụ 3 được giải quyết.

Theo kiến thức của chúng tôi thì đây là một bài toán lạ (nhưng lạ thật (đối với các bạn) hay không thì chưa biết) do đó trong thâm tâm chúng tôi vẫn nảy mối nghi ngờ là bài toán này đúng hay là sai ?



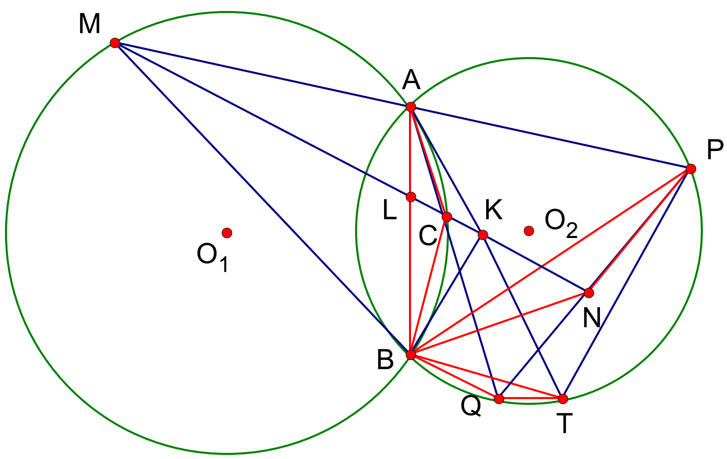
(hình vẽ bài toán lạ)

Tuy nhiên việc chứng minh trực tiếp cho “bài toán lạ” là tương đối rợn (sợ còn khó hơn cả thí dụ 3) do chỉ để kiểm tra “bài toán lạ “ này là đúng hay sai thì tạm thời ta chấp nhận ví dụ 3 đã được giải quyết bằng một cách nào đó (vì đây là đề của một bài toán đã có lời giải nên không thể sai được!) . Việc cho ví dụ 3 đúng là một công cụ đắc lực để chứng tỏ bài toán lạ là đúng hay là sai.
Giả sử ví dụ 3 đã được chứng minh, ta sẽ chứng minh bài toán lạ là đúng (sử dụng “hình vẽ bài toán lạ” ở trên).
Gọi K là giao điểm của đường trung trực AB với AT
Đường thẳng vuông góc với AK(tại A) và đường thẳng vuông góc với BK(tại B) cắt nhau tại O_1. Vẽ đường tròn tâm O_1 đường kính O_1A ta kí hiệu đường tròn này là (O_1)
Dễ thấy (O_1) đi qua B và KA,KB là hai tiếp tuyến của K tới (O_1). Giả sử AP cắt (O_1) tai M.
MK cắt AB tại L và cắt (O_1) tại C (khác M)
Như vậy ta được hình vẽ sau khi mới được phát họa lại từ “bài toán lạ” là:



Vì $(K,L,C,M) = -1$ suy ra $(AK,AL,AC,AM) = -1$ hay $(AK,AL,AC,AP) = -1$
Hay $(AB,AT,AC,AP) = -1$ mà theo giả thiết ta có $(AB,AT,AQ,AP) = -1$
Suy ra A,C,Q thẳng hàng.
Đến đây ta được các yếu tố y chang ví dụ 3 do đó nếu thí dụ 3 đúng thì BQTP là tứ giác điều hòa và bài toán được chứng minh.

*<u>*Nhận xét:</u> Qua cách xây dựng trên các bạn có thể dễ dàng nhận ra kết quả ở thí dụ 3(câu b) với bài toán lạ là tương đương với nhau. Do đó nếu ta chứng minh được thẳng cho" bài toán lạ" thì câu b) thí dụ 3 xem như được giải quyết ngược lại nếu bằng một cách nào đó ta chứng minh được thí dụ 3 là đúng thì bài toán lạ cũng đúng luôn. Rất may mắn ta có một cách rất đơn giản để giải quyết thí dụ 3 (câu b) như sau:*



Để chứng minh BQTP là tứ giác điều hòa tức là ta cần chứng minh
$$\frac{QB}{QT}=\frac{PB}{PT} \quad (4)$$
Từ các kết quả đã có ở câu a) các ban có thể dễ dàng chứng minh:

Tam giác BPT đồng dạng tam giác BMA (g.g) suy ra $\frac{PB}{PT}=\frac{MB}{MA}$ (5)

Tam giác BQT đồng dạng tam giác BCA (g.g) suy ra $\frac{QB}{QT}=\frac{CB}{CA}$ (6)

Mặt khác vì CAMB là tứ giác điều hòa nên $\frac{CB}{CA}=\frac{MB}{MA}$ (7)

Từ (5),(6) và (7) suy ra (4) đúng.
Vậy câu b được chứng minh dẫn đến bài toán lạ cũng được giải quyết.

*<u>*Nhận xét:</u>*

Thực ra mà nói thí dụ 3 có được chứng minh hay không thì cũng không có gì quá quan trọng vì nó chỉ thể hiện một tính chất hình học tầm thường. Tuy nhiên kết quả từ việc giải nó đã cho ta một viên ngọc vô giá là" bài toán lạ". Nếu bạn nào tìm được một cách chứng minh nào khác cho "bài toán lạ" thì xin post lời giải đầy đủ trong forum để mọi người cùng tham khảo.

**Chú thích: bây giờ gọi đây là "bài toán lạ" cũng không còn đúng nữa bởi vấn đề này hiện nay đối với ta cũng đâu còn gì là lạ!!!*

Chương đề này xin khép lại ở đây.

……

Các bạn thân mến hẳn qua các thí dụ trên các bạn đã phần nào thấy được vẻ đẹp của sự *điều hòa* trong hình học. Trong cuộc sống cũng vậy mỗi chúng ta cũng cần tạo cho mình một sự *điều hòa* cần thiết bởi nó giúp ta khỏe mạnh hơn và yêu đời hơn…

Chúc tất cả mọi người đều được một cuộc sống *điều hòa* như vậy.