

CHUYÊN ĐỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I/ MỞ ĐẦU, GIỚI THIỆU.

Chuyên đề là kết quả thu được qua một thời gian học tập + nghiên cứu của bản thân về hệ phương trình. Tuy nhiên có thể nói rằng, đó là sự kết tinh qua nhiều thế hệ, là sự giúp đỡ, là sự học hỏi từ những người bạn của mình cùng như rất nhiều yếu tố khác.

Để đạt hiệu quả cao khi tham khảo chuyên đề này, xin được trích dẫn mấy lời của nhà giáo G.Polya: " [...] Một số bài toán có nêu lời giải đầy đủ (tuy vắn tắt), đối với một số bài khác, chỉ vạch ra mấy bước giải đầu tiên, và đôi khi chỉ đưa ra kết quả cuối cùng.

Một số bài toán có kèm thêm chỉ dẫn để giúp người đọc giải được dễ dàng hơn. Chỉ dẫn cũng có thể nằm trong những bài toán khác ở gần bài toán đang xét. Nên đặc biệt lưu ý đến những nhận xét mở đầu trước từng bài tập hay cả một nhóm bài tập gặp thấy trong chương.

Nếu chịu khó, gắng sức giải một bài toán nào đó thì dù không giải nổi đi chăng nữa, bạn đọc cũng thu hoạch được nhiều điều bổ ích. Chẳng hạn, bạn đọc có thể giờ ra xem (ở cuốn sách) phần đầu mỗi lời giải, đem đối chiếu với những suy nghĩ của bản thân mình, rồi gấp sách lại và thử gắng tự lực tìm ra phần còn lại của lời giải.

Có lẽ thời gian tốt nhất để suy nghĩ, nghiền ngẫm về phương pháp giải bài toán là lúc bạn vừa tự lực giải xong bài toán hay vừa đọc xong lời giải bài toán trong sách, hay đọc xong phần trình bày phương pháp giải trong sách. Khi vừa hoàn thành xong nhiệm vụ, và các ấn tượng hãy còn "nóng hổi", *nhìn lại* những nỗ lực vừa qua của mình, bạn đọc có thể phân tích sâu sắc tính chất của những khó khăn đã vượt qua. Bạn đọc có thể tự đặt cho mình nhiều câu hỏi bổ ích: "Khâu nào trong quá trình giải là quan trọng nhất? Khó khăn chủ yếu là ở chỗ nào? Ta có thể làm gì cho tốt hơn? Chi tiết ấy mình cũng đã liếc qua mà không chú ý đến - muốn "nhìn thấy" chi tiết này thì đầu óc phải có tư chất ra sao? Liệu ở đây có một cách gì đó đáng lưu ý để sau này gặp một tình huống tương tự, ta có thể áp dụng được không? " Tất cả những câu hỏi đó đều hay cả, và cũng còn nhiều câu hỏi bổ ích khác nữa, nhưng câu hỏi hay nhất chính là câu hỏi tự nhiên nảy ra trong óc, không cần ai gợi ý cả!"

(trích "Mấy lời khuyên và chỉ dẫn" -G.Polya trong "Sáng tạo toán học")

Do thời gian cũng như 1 số vấn đề khác như kiến thức, trình bày,... mà chuyên đề này còn khá nhiều khiếm khuyết. Rất mong được các bạn quan tâm + chia sẻ để hoàn thiện chuyên đề hơn. Hi vọng nó sẽ là tài liệu bổ ích giúp chúng ta vượt qua 1 chặng nhỏ trong chặng đường chinh phục toán học !

Phạm Hùng Vương, 11C1, THPT Phan Đăng Lưu

II/ MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CŨ.

➤ Hệ phương trình đối xứng kiểu I.

Nhân dạng: hệ đối xứng kiểu I: gồm 2 phương trình ẩn x, y mà vai trò x, y trong mỗi phương trình là như nhau. vd: $\begin{cases} a(x+y)+bxy=c \\ x^2+y^2=d \end{cases}$. và phương pháp giải là đặt ẩn phụ: $S = x + y$, $P = xy$. Giải tìm S, P sau đó

sử dụng định lý Vi-et, để thấy x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - S.X + P = 0$

Cùng xem xét 1 vài ví dụ (cách giải và một số hướng giải quyết mới)

vd 1: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 6 \\ x + y - xy = 5 \end{cases}$ (đề thi HSG lớp 9 Tỉnh Bến Tre năm 2009-2010)

Bài giải: Đặt $S = x + y$, $P = xy$, ta thu được hệ mới tương đương:

$$\begin{cases} S^2 - 2P - 2S = 6 \\ S - P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 4S + 4 = 0 \\ P = S - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = -3 \end{cases}$$

Như vậy, theo định lý Vi-et, x, y là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 2X - 3 = 0 \Leftrightarrow (X - 3)(X + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3, y = -1 \\ x = -1, y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ có 2 nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn là: $(-1; 3)$ và $(3; -1)$.

Những bài như thế này và bài giải như vậy đã trở nên khá quen thuộc, không còn mới lạ. Tuy nhiên, cũng có 1 số hệ, dù biết là đối xứng kiểu I, nhưng phải làm gì để sử dụng được ? Hãy xem ví dụ:

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases} \quad (ĐH-CD Khối A năm 2006)$$

Thử đặt như cũ: $S = x + y$, $P = xy$, hệ khi đó trở thành:

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ x + y + 2 + \sqrt{xy + x + y + 1} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S - \sqrt{P} = 3 \\ S + 2\sqrt{P + S + 1} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \sqrt{P} + 3 \\ 2\sqrt{P + \sqrt{P} + 4} = 11 - \sqrt{P} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \sqrt{P} + 3 \\ 3P - 26\sqrt{P} - 105 = 0 \\ 0 \leq P \leq 121 \end{cases}$$

Đến đây, giải tìm P , sau đó quay lại giải tìm ra nghiệm x, y . (chú ý điều kiện)

Hơn nữa, luôn nhớ: $S^2 \geq 4P$ để loại bớt nghiệm.

Ý tưởng 2, đặt ẩn $a = \sqrt{x+1}, b = \sqrt{y+1}$ nhằm làm đơn giản 1 phương trình của hệ. (kĩ thuật đặt ẩn làm gọn này rất có ý nghĩa, đặc biệt trong BDT có giả thiết rườm rà, với pt hay hệ cũng vậy) Khi đó:

$$hpt \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ a^2 + b^2 - 2 - \sqrt{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 4 \\ S^2 - 2P - 2 - \sqrt{P^2 - S^2 + 2P + 1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 4 \\ \sqrt{P^2 + 2P - 15} = 11 - 2P \end{cases}$$

Trong đó : $S = a + b$, $P = ab$. Đến đây, ta cũng có thể giải tương tự.

Một số ví dụ:

vd 4: $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 4 \\ \sqrt{x+6} + \sqrt{y+4} = 6 \end{cases}$ (thi thử ĐH-CD, THPT chuyên Nguyễn Huệ 2011)

vd 5:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \\ \frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4 \end{cases} \quad (\text{ đề thi HSG lớp 9 tỉnh Nghệ An năm 2009-2010 })$$

vd 6:
$$\begin{cases} (x+y)(1+xy) = 4xy \\ (x^2+y^2)(1+x^2y^2) = 4x^2y^2 \end{cases}$$

♥ Thực ra, dạng hệ đối xứng kiểu I có hướng giải khá đơn giản, rõ ràng với việc đặt ẩn và sử dụng định lý Vi-et. Chính vì vậy mà hệ đối xứng kiểu I thường gắn với việc giải + biện, một sở trường của phương pháp này !

vd 7: Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} xy + x + y = a + 1 \\ x^2y + xy^2 = a \end{cases} \quad (\text{ Đề thi HSG lớp 9 tỉnh Hà Nội năm 2009-2010 })$$

Bài giải: Đặt : $S = x + y$, $P = xy$, ta có hệ mới:

$$\begin{cases} S + P = a + 1 \\ SP = a \end{cases} \quad \text{Theo Vi-et, S và P là nghiệm của phương trình:}$$

$X^2 - (a+1)X + a = 0 \quad (1)$. Hơn nữa, cũng theo Vi-et x, y lại là nghiệm của pt: $X^2 - SX + P = 0 \quad (2)$.

Do đó, để hệ có 1 nghiệm duy nhất thì (2) có nghiệm duy nhất, tức $\Delta_{(2)} = 0 \Leftrightarrow S^2 = 4P \Leftrightarrow x = y$

Hoặc có thể dùng nhận xét: do vai trò x, y trong mỗi pt của hệ là như nhau nên nếu hệ có nghiệm $(m; n)$

thì nó cũng có nghiệm $(n; m)$. Như vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì cần có $x = y$. Thế vào được:

$$\begin{cases} x^2 + 2x = a + 1 \\ 2x^3 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - (a+1) = 0 \\ x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}} \end{cases} \quad (*)$$

để hệ có nghiệm duy nhất thì (*) có duy nhất 1 nghiệm $x = \frac{-2}{2.1} = -1 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{a}{2}} = -1 \Leftrightarrow a = -2$.

Thử lại thấy thỏa mãn. Kết luận giá trị cần tìm là $a = -2$.

vd 8: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = m \\ x + y - \sqrt{xy} = m \end{cases} \quad (\text{ đề thi HSG lớp 9 Tỉnh Hưng Yên năm 2009-2010 })$$

vd 9: Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = a \\ x + y = 2a + 1 \end{cases} \quad (\text{ thi thử ĐH-CD THPT Lương Ngọc Quyến, Thái Nguyên 2011 })$$

♥ Nếu đơn thuần chỉ là hệ đối xứng kiểu I thì chắc chắn nó sẽ nhanh chóng được chúng ta giải quyết. Chính vì vậy, mà sau đây sẽ các ví dụ cần dùng các kỹ thuật nhỏ chuyển về hệ đối xứng kiểu I. (phần kỹ năng sẽ trình bày rõ hơn ở mục sau).

vd 10:
$$\begin{cases} (x-1)^2 + 6(x-1)y + 4y^2 = 20 \\ x^2 + (2y+1)^2 = 2 \end{cases}$$

Quan sát thì thấy ngay không thể là hệ đối xứng kiểu I. Nhưng! Hãy xem hướng giải sau:

Bài giải: Đặt $a = x-1, b = 2y$ thì hệ trở thành: $\begin{cases} a^2 + 3ab + b^2 = 20 \\ (a+1)^2 + (b+1)^2 = 2 \end{cases}$. Đúng là hệ đối xứng kiểu I!

Bây giờ, thì có thể đi tiếp theo phương pháp được rồi.

♥ @@@: có thể nói rằng, vấn đề đặt gọn luôn ẩn hiện 1 điều gì đó rất thú vị nếu ta tinh ý trong các biểu thức nhìn có vẻ có vấn đề. Như ví dụ trên chẳng hạn, phải biết nghĩ ngò $(x-1)$, khi nó được đặt trong ngoặc.

Hãy tiếp tục với hệ sau: vd 11: $\begin{cases} x^2 + 6xy + 4y^2 = 19 + 2x + 6y & (1) \\ x^2 + 4y^2 = 1 - 4y & (2) \end{cases}$

Có thể thấy, cả 2 vd 10 và vd 11 đều chỉ là 1. Nhưng nếu nghiệm theo cách đặt ẩn gọn thì đặt cái nào. Nếu đặt $a = x-1, b = 2y$ như trên thì tại sao lại biết mà đặt như vậy! Đây chính là vấn đề cần bàn! nếu đi theo phân tích pt (1) thì sẽ có khá nhiều phương án: chẳng hạn nghĩ đến hằng đẳng thức:

$(1) \Leftrightarrow (x+3y)^2 - 5y^2 = 19 + 2(x+3y)$, ..v.v. có khá nhiều đẳng thức có thể nghĩ tới để đặt!

Nhưng với pt(2) thì lại khác: nó chỉ có 1 đẳng thức cần chú ý: $(2) \Leftrightarrow x^2 + (2y+1)^2 = 2$. như vậy, ý tưởng đặt làm gọn 2 mở ra: $a = 2y+1$, hơn nữa có thể thấy ở pt (1) hệ số của y luôn chẵn, khi thế có thể thế $2y = a-1$ (đây không phải là 1 trùng hợp ngẫu nhiên ! hãy nghĩ vậy).

Việc làm còn lại thì khá rõ rồi, ta cũng thu được một hệ đối xứng kiểu I và tiếp tục giải !

Hãy thử với các ví dụ:

vd 12. $\begin{cases} x^4 - 4x^2 + (y-3)^2 = 0 \\ x^2y + x^2 + 2y - 22 = 0 \end{cases}$

vd 13. $\begin{cases} (x-y)^2 = 1 - x^2y^2 \\ x(xy+y+1) = y(xy+1)+1 \end{cases}$

♥ Thậm chí còn có những bài có những cách đặt đưa về hệ đối xứng rất thú vị, khó mà thấy được nếu không qua chút biến đổi. Vì vậy, hãy cố gắng quan sát và đặt gọn phù hợp !

vd 14: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 + 4x - 4y \\ 3x + xy - y = 15 \end{cases}$

vd 15: $\begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases}$ (THPT số 379 năm 2009)

vd 16: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ 2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + y = 7 & (2) \end{cases}$ (xem giải ở mục II. pp 02)

Hơn nữa, dạng hệ đối xứng kiểu I này rất hay vận dụng một hằng đẳng thức (đang có xu hướng lớn trong các đề thi thử): $\frac{1}{x^2} + y^2 = \left(\frac{1}{x} + y \right)^2 - 2\frac{y}{x}$. Tiếp tục với các ví dụ sau, bạn sẽ thấy rõ !

Vd 17: $\begin{cases} \frac{y}{x^2} + \frac{y^2}{x} = 6 \\ \frac{1}{x^2} + y^2 = 5 \end{cases}$

Vd 18 $\begin{cases} xy + y^2 + x - 7y = 0 \\ xy + x^2 - 12y = 0 \end{cases}$

$$\text{Vd 19 : } \begin{cases} (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^2 = 9 \\ (x^3 + y^3) \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^3 \end{cases}$$

$$\text{vd 20 : } \begin{cases} xy(2x + y - 6) + 2x + y = 0 \\ (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^2 = 8 \end{cases}$$

Và cả một dạng (ở phần cuối chuyên đề !)

➤ Hệ phương trình đối xứng kiểu II.

♥♥ **Nhận dạng:** Cũng như loại I, loại II cũng “đối xứng” nhưng là đối xứng giữa 2 phương trình chứ không không phải là đối xứng trong từng phương trình như kiểu I.

Một cách nhận dạng khác nữa là cho $x = y$ thì 2 phương trình của hệ như nhau. Hay nói cách khác $x = y$ chính là nghiệm của hệ. Đây chính là đặc điểm khai thác của hệ này !

Phương pháp: “Thông thường”, ta trừ theo vế ta thu được nghiệm $x = y$, và 1 số nghiệm khác. Sau đó thay lại tìm ra nghiệm $(x; y)$.

Cùng xem xét 1 số ví dụ đơn giản :

$$\text{vd 1: } \begin{cases} x^2 + y = 5x + 3 \\ y^2 + x = 5y + 3 \end{cases}$$

Bài giải: Trừ theo của hệ thu được: $x^2 - y^2 = 6(x - y) \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 6) = 0$. Do đó

$$\text{hpt} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x + y = 6 \\ x^2 + x - 5(6 - x) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = 3 \\ x = 3, y = 3 \\ x = -9, y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = 3 \\ x = -9, y = 15 \end{cases}$$

$$\text{vd 2: } \begin{cases} x^3 = 2y + 1 \\ y^3 = 2x + 1 \end{cases}$$

Bài giải: trừ theo vế của hệ ta thu được: $x^3 - y^3 = 2(y - x) \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x = y$

vì $x^2 + xy + y^2 + 2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 2 > 0$. Như vậy thế $x = y$ vào hệ, ta chỉ cần giải phương trình:

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

► **Note:** khi trừ theo vế, ta thu được: $x^3 + 2x = y^3 + 2y$. Nếu không dùng phân tích trên, ta có thể tính đạo hàm: $f(t) = t^3 + 2t$ có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0$ nên suy ra: $x = y$.

♥♥ **Nhận xét:** Đơn giản chỉ là trừ theo vế, nhưng với những bài khác nhau lại cần thêm những kĩ thuật khai thác khác nhau để làm xuất hiện $(x-y)$. Hãy xem:

vd 3:
$$\begin{cases} \sqrt{x+10} + \sqrt{y-1} = 11 \\ \sqrt{y+10} + \sqrt{x-1} = 11 \end{cases} \quad (\text{thử sức trước kì thi, THPT số 407, 2011})$$

Bài giải: Điều kiện để các phân thức có nghĩa: $x, y \geq 1$. Chú ý $x = y = 1$ không là nghiệm của hệ nên: trừ theo vế 2 phương trình của hệ và nhân liên hợp ta có:

$$\sqrt{x+10} - \sqrt{y+10} + \sqrt{y-1} - \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow (x-y) \left(\frac{1}{\sqrt{x+10} + \sqrt{y+10}} - \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}} \right) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(Vì do $\sqrt{x+10} + \sqrt{y+10} > \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$ nên biểu thức còn lại vô nghiệm.)

Thế $x = y$ vào ta dễ dàng giải phương trình của hệ!

♥♥ @@@: Mở rộng cách nhìn về hệ đối xứng kiểu II.

Trước hết, hãy xem xét cách giải hệ phương trình sau:

vd 6:
$$\begin{cases} x^3 + y^2 = 1 \\ y^3 + x^2 = 1 \end{cases}$$

Giải: • Trừ theo vế 2 phương trình của hệ ta thu được:

$$x^3 - y^3 + y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 - (x+y)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 = x + y \end{cases} (*)$$

TH $x = y$ thì thế và giải pt: $x^3 + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = y = \frac{1}{3} \left[\sqrt[3]{\frac{25}{2} - \frac{3\sqrt{69}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{25}{2} + \frac{3\sqrt{69}}{2}} - 1 \right]$

• Cộng theo vế 2 phương trình và kết hợp với (*) ta có hệ đối xứng kiểu I:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = x + y \\ x^3 + y^3 + x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - xy = (x+y) \\ (x+y)^3 - 3xy(x+y) + (x+y)^2 - 2xy = 2 \end{cases}$$

Đặt $S = x + y$, $P = xy$, hệ trở thành:

$$\begin{cases} S^2 - P = S \\ S^3 - 3SP + S^2 - 2P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 + S^2 - 2 - (3S+2)(S^2 - S) = 0 \\ P = S^2 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (S-1)(S^2+1) = 0 \\ P = S^2 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Vi-et}} \begin{cases} x = 1, y = 0 \\ x = 0, y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm như trên.

♥♥♥ Qua bài giải trên, hẳn chúng ta nhận rõ vai trò của việc kết hợp “cộng” và “trừ” để đưa đến hpt đối xứng kiểu I (đây là một hướng nhìn mới). Việc làm này hoàn toàn có cơ sở. Hãy xem lại câu nói: “Cũng như loại I, loại II cũng “đối xứng” nhưng là đối xứng giữa 2 phương trình chứ không phải là đối xứng trong từng phương trình như kiểu I”. Như vậy, khi cộng theo vế sẽ luôn cho một trong 2 pt đối xứng kiểu I. Và việc lấy đi 1 nghiệm $(x-y)$ sau khi trừ cũng để lại cho ta 1 phương trình đối xứng nữa.

Ví dụ tương tự: vd 4:
$$\begin{cases} x^3 + y = 2 \\ y^3 + x = 2 \end{cases}$$

♥ Và đôi lúc việc cộng trừ cũng không đem lại cho ta kết quả khả quan :

$$\text{vd 5: } \begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x \end{cases} \quad (\text{THTT số 379 năm 2009})$$

Quả đúng, khi cộng hay trừ thì chúng ta không thể làm được gì với cái căn bậc 3 khủng khiếp kia !

Tuy nhiên, một số điểm ta lại thấy rất rõ + đáng phải nghĩ là trong cái căn bậc 3 kia, có 1 đẳng thức:

$(x-1)^2 + 8 = x^2 - 2x + 9$. Nhắm nghiệm $x = y = 1$ và $\sqrt[3]{8} = 2$ (căn đẹp!). Phải liên kết và sử dụng chúng ntn?

Bài giải: Cộng theo về 2 hệ của phương trình: $\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = x^2 + y^2$. Sử dụng đánh giá:

$$\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9} = \sqrt[3]{(x-1)^2 + 8} \geq 2 \Rightarrow \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} \leq \frac{2xy}{2} = xy. \text{ Tương tự: ta có:}$$

$$\frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} \leq xy \Rightarrow \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} \leq 2xy = x^2 + y^2 - (x-y)^2 \leq x^2 + y^2$$

Vậy hệ có nghiệm khi $x = y = 1$. Thử lại thấy thỏa mãn $\rightarrow$ kết luận nghiệm!

♥♥ @@@ 2 kiểu hệ đối xứng I và II là những dạng rất cơ bản. Tuy nhiên, qua “chế biến” của người ra đề thì không thể nói trước điều gì. Vì vậy, cần có cái nhìn tổng quan, nhìn nhiều khía cạnh, không nên chỉ biết nhìn hình thức rồi rập khuôn lời giải của dạng. Một số ví dụ thêm:

$$\text{vd 6: } \begin{cases} 2x^2 + x - \frac{1}{y} = 2 \\ y - y^2x - 2y^2 = -2 \end{cases} \quad (\text{Thi thử ĐH-CD THPT Lê Văn Hưu, Thanh Hóa năm 2011})$$

$$\text{vd 7: } \begin{cases} x^3(2+3y) = 1 \\ (y^3-2)x = 3 \end{cases}$$

$$\text{vd 8: } \begin{cases} x^3(2+3y) = 8 \\ x(y^3-2) = 6 \end{cases} \quad (\text{Tuyển sinh vào lớp 10 THPT Chuyên Phan Bội Châu 2009-2010})$$

$$\text{vd 9: } \begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases} \quad (\text{thi ĐH -CD- Khối B 2003})$$

$$\text{vd 10: } \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 22} - \sqrt{y} = y^2 + 2y + 1 \\ \sqrt{y^2 + 2y + 22} - \sqrt{x} = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \quad (\text{Olympic 30-4-2010})$$

$$\text{vd 11: } \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases} \quad (\text{thi thử ĐH năm 2011, THTT số 379, 2009})$$

$$\text{vd 12: } \begin{cases} x^4 - y^2 = -3(x+y) \\ xy^3 - xy = 3(x+y) \end{cases}$$

III/ MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP MỚI.

➤ Phương pháp 01: Hằng số = t = ẩn số

Xem xét cách giải một số ví dụ sau:

ví dụ 1:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \\ 4x^2 + 3x - \frac{57}{25} = -y(3x+1) \end{cases} \quad (\text{hệ phương trình TST Nghệ An 2009-2010})$$

Bài giải: Nhân phương trình sau của hệ với 2 rồi cộng theo vế với phương trình đầu ta được:

$$9x^2 + y^2 + 6xy + 6x + 2y = \frac{119}{25} \Leftrightarrow (3x + y + 1)^2 = \frac{144}{25} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + 1 = \frac{12}{5} \\ 3x + y + 1 = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

Đến đây thì thế vào phương trình ban đầu ta giải phương trình bậc 2 nữa là ok!

ví dụ 2:
$$\begin{cases} (x-y)^2 + y = 3 \\ x^2 + 2xy - 5y^2 - 5x + 13y = 6 \end{cases}$$

Bài giải: Nhân 3 vào phương trình đầu rồi trừ theo vế với phương trình sau ta được:

$$2x^2 + 8y^2 - 8xy + 5x - 10y = 3 \Leftrightarrow 2(x-2y)^2 + 5(x-2y) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y+3)(2x-4y-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = -3 \\ 2x-4y = 1 \end{cases}$$

Đến đây, thế từng trường hợp rồi thay vào phương trình ban đầu là ok!

♥ **Nhận xét:** Hai bài giải trên thật hay, đơn giản với công việc nhân thêm rồi cộng lại, sau đó phân tích thành nhân tử.

Nhưng! Điều chúng ta băn khoăn + thắc mắc ở đây chính là việc biết phải nhân với con số nào. Đây chính là cơ sở để chúng ta đi đến phương pháp ẩn số = t = hằng số.

♥ Như chúng ta đã biết, cái chưa biết chính là ẩn số. Đây cũng vậy, để biết cần nhân với bao nhiêu, ta đưa thêm ẩn t vào. Do đó, hpt của chúng ta đã có đến tận 3 ẩn với chỉ 2 giả thiết. Như vậy, phải có thêm 1 cái gì đó ràng buộc. Nó là gì? Quan sát lại 2 ví dụ trên một lần nữa. :-?

➤ Phương pháp : Hằng số = t = ẩn số

- Phạm vi ứng dụng: hệ phương trình 2 ẩn x, y có bậc không quá 2.
- Cơ sở phương pháp: giải phương trình bậc 2.

Xét phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$. Có: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu: $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Đặc biệt: $\Delta = 0$ phương trình có 1 nghiệm duy nhất, tức khi đó phương trình tương đương với:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0. \text{ Đây chính là cơ sở cơ bản của pp.}$$

(► **Note:** bài viết sẽ không trình bày giải hệ phương trình tổng quát mà sẽ thực hiện giải chi tiết những ví dụ cụ thể nhằm tạo cho bạn những tư duy, suy nghĩ mới và tự hình thành cho mình phương pháp và kỹ năng. Hơn nữa việc trình bày tổng quát khá phức tạp)

- Hãy xem xét lại 2 ví dụ trên:

Thay vì nhân vào những con số 2 như vd 1, con số 3 như vd 2 mà có vẻ dường như ta đã biết, ta sẽ nhân vào đó con số t .

Ví dụ 1:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \\ 4x^2 + 3x - \frac{57}{25} = -y(3x+1) \end{cases}$$

Nhân t vào phương trình đầu rồi cộng theo vế với phương trình sau ta có:

$$ty^2 + y(3x+1) + (t+4)x^2 + 3x - \frac{5t+57}{25} = 0$$

Xem đây là phương trình bậc 2 ẩn là y , xét:

$$\Delta_y = (3x+1)^2 - 4t \left[(t+4)x^2 + 3x - \frac{5t+57}{25} \right] = (9-4t^2-16t)x^2 + 6x(1-2t) + 1 + \frac{4t(5t+57)}{25}$$

Để xuất hiện nhân tử như trên thì $\Delta_y = f^2(x)$ và như vậy thì :

$$(9-4t^2-16t)x^2 + 6x(1-2t) + 1 + \frac{4t(5t+57)}{25} = f^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \Delta'_x = 0 \Leftrightarrow 9(1-2t)^2 - 4(9-16t-4t^2) \left[1 + \frac{4t(5t+57)}{25} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2t) \left[1-2t-4(9+2t) \left[1 + \frac{4t(5t+57)}{25} \right] \right] = 0$$

Dễ thấy $t = \frac{1}{2}$ là giá trị thỏa mãn.

♥♥ Để có lời giải gọn + đẹp thì khi trình bày bài giải, chúng ta nhân thêm 2 vào phương trình sau thay vì nhân $\frac{1}{2}$ vào phương trình đầu. Từ đó ta có lời giải gọn + đẹp như trên.

Xem lại ví dụ 2:
$$\begin{cases} (x-y)^2 + y = 3 \\ x^2 + 2xy - 5y^2 - 5x + 13y = 6 \end{cases}$$

Chúng ta cũng thực hiện công việc nhân t như trên::

Nhân t vào phương trình đầu rồi cộng theo vế 2 phương trình ta được:

$$(t-5)y^2 + y[2x(t-1) + t + 13] + (t+1)x^2 - 5x - 3(t+2)$$

$$\Delta_y = [2x(t-1) + t + 13]^2 - 4(t-5)[(t+1)x^2 - 5x - 3(t+2)]$$

$$= 8(3+t)x^2 - 4x(t^2 + 7t + 12) + 9t^2 + 2t + 249 = f^2(x)$$

Khi xem xét phương trình này thì nhận thấy ngay $t = -3$ sẽ cho ta $f^2(x) = 18^2$ vì để ý

$$t^2 + 7t + 12 = (t+3)(t+4)$$

Từ đó ta có lời giải !

Một số ví dụ thêm:

vd 3:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + x + y \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{vd 4: } \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3x - 2 \\ 2(x + y - 1) = 2xy \end{cases}$$

$$\text{vd 5: } \begin{cases} y^2 = (5x + 4)(4 - x) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0 \end{cases}$$

(THTT số 379, tháng 1 năm 2011)

$$\text{vd 6: } \begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

(ĐH-CD khối A, năm 2008)

$$\text{vd 7: } \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = xy + x + y \end{cases}$$

- Một số lưu ý khi sử dụng phương pháp:

Xem sau ở phần tản mạn.

Cần linh hoạt trong việc chọn lựa nhân t ở phương trình nào để thuận lợi trong phân tích.

.....

► Mở rộng phương pháp:

♥♥♥ Cơ sở suy luận : bạn có nghĩ, liệu có bất buộc bậc của x và y trong hệ phải là bậc 2 cả. :-? Đúng, để luôn giải được thì nhất thiết phải yêu cầu là cả 2 đều bậc 2. Tuy nhiên, cái hay của Toán chính là đa dạng, muôn màu muôn vẻ, bất buộc chúng ta phải luôn tỉnh tể, sáng tạo hơn nữa trong pp và suy nghĩ. Biết 1 chưa chắc đã giải được 10. Trước hết, hãy xem cái hệ sau.

$$\text{vd 8: } \begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$$

(thi thử ĐH-CD 2011)

Bậc cao nhất của x là 4, nhưng bậc của y lại là 2. Hơn thế nữa, nếu quan sát tinh ý hơn:

$$\begin{cases} x^4 + 2x^2 \cdot (xy) + (xy)^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases} \quad (\text{thì nên gom + xem } xy \text{ là ẩn})$$

Nhân thêm hằng số t vào phương trình sau rồi cộng theo vế với phương trình đầu, ta được:

$$x^2y^2 + 2xy(t + x^2) + x^4 + tx^2 - 2x(1 + 3t) - 9 - 6t = 0$$

$$\Delta'_{xy} = (t + x^2)^2 - x^4 - tx^2 + 2x(1 + 3t) + 9 + 6t = tx^2 + 2x(1 + 3t) + (t + 3)^2 = f^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \Delta'_x = (1 + 3t)^2 - 4t(t + 3)^2 = 0$$

Dễ thấy ngay $t = 1$ là một nghiệm của phương trình nên hệ số cần nhân chính là 1.

Việc trình bày lời giải còn lại xin dành cho bạn đọc!

♥ @@@: hệ này khá đặc biệt vì khi rút gọn ta thu được Δ_{xy} là một tam thức bậc 2. Qua đó cơ sở pp của chúng ta vẫn áp dụng được. Nhưng! Ví dụ sau thì sao ?

$$\text{Vd 9 } \begin{cases} 1 + x^2y^2 = 19x^2 \\ xy^2 + y = -6x^2 \end{cases}$$

♥ **Nhận xét** : chú ý bậc cao nhất của y như trên vẫn là bậc 2. Nhưng có vấn đề gì cần bàn ở đây ?

Nháp : Nhân t vào phương trình sau rồi cộng lại :

$$y^2 \cdot (x^2 + tx) + ty + (1 - 19x^2 + 6tx^2) = 0$$

$$\text{Xét : } \Delta_y = t^2 - 4(x^2 + tx)(1 - 19x^2 + 6tx^2) = 4 \cdot (19 - 6t)x^4 + 4t(19 - 6t)x^3 - 4x^2 - 4tx + t^2$$

Với Δ có bậc của x là 2, dùng cơ sở pp phân tích trên, ta có thể quy về giải pt ẩn t . Tuy nhiên, đây là bậc 4 đối với x . Liệu có gì khác và đặc biệt có phải luôn giải được ? Để trả lời những thắc mắc này, ta tiếp tục suy luận để giải phương trình trên.

Để thuận lợi trong việc nhân t , như pp trên đã nói, $\Delta_y = f^2(x)$ vậy nên trong TH này, ý tưởng rất tự nhiên là cần tìm t để $\Delta_y = 4(19 - 6t)x^4 + 4t(19 - 6t)x^3 - 4x^2 - 4tx + t^2$ là một bình phương của tam thức bậc hai.

Khai thác : xét bình phương của một tam thức bậc 2.

$$(ax^2 + bx + c)^2 = a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2$$

hãy chú ý đẳng thức trên để hiểu được những suy luận sau đây :

Đồng nhất hai biểu thức sau :

$$\Delta_y = 4(19 - 6t)x^4 + 4t(19 - 6t)x^3 - 4x^2 - 4tx + t^2 = (2\sqrt{19 - 6t}x^2 + t\sqrt{19 - 6t}x \pm t)^2$$

$$\text{Đồng nhất giá trị bậc nhất } x : 4t = \pm 2t^2 \cdot \sqrt{19 - 6t} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

Thử lại thấy thỏa mãn khi đồng nhất với hệ số của x^2 .

Vậy công việc còn lại thì dành cho bạn đọc xử lí như trên. (nhân 2 vào phương trình đầu rồi cộng theo vế).

♥♥♥ Bây giờ, hãy đọc những suy luận trên 1 lần nữa rồi quay lại với câu hỏi đã nêu. :

Nhược điểm của pp này rất rõ ràng : không luôn giải được. Nó phụ thuộc vào việc đồng nhất 2 hệ số của x và x^2 . Có thể sẽ cho 2 giá trị t khác nhau. Một kinh nghiệm có thể nhìn thấy là khi tìm được t là nghiệm đẹp từ đồng nhất x thì yên tâm là nó sẽ đúng !.

Thứ 2, có những TH tìm được : Δ mà thiếu x^3 , hay x^4 , thì vấn đề có được là không thể.

.....

♥▶♥ Kết thúc phương pháp là một số hpt cùng dạng. Xin nói trước, chưa chắc nó đã giải được bằng phương pháp này. Nhưng ! vẫn đưa ra nhằm để các bạn nháp giải, sau đó ngẫm xem những bài cùng dạng này, bài nào giải được, không giải được, ... Từ đó hình thành tư duy quan sát, đánh giá. Hơn nữa, pp này đòi hỏi kĩ thuật phân tích, khả năng khai phá tam thức rồi lại hợp nhất, .. khá rắc rối và phức tạp. Vì vậy, nếu bạn là người không cẩn thận, nóng tình, thì hãy bỏ qua phương pháp này, bởi nó chắc chắn không hợp với bạn và sẽ không đem cho bạn kết quả như mong muốn.

$$\text{vd 10: } \begin{cases} xy + 2y^2 + y = -2 \\ 2x^2y^2 + 8xy^3 + 8y^4 = y^2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{vd 11: } \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3y - 1 \\ x^3 + x^2y = x^2 - x + 1 \end{cases}$$

$$\text{vd 12: } \begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

(ĐH-CD Khối A-2008)

$$\text{vd 13: } \begin{cases} 4x^2 + 5x + 9y - 8 = 0 \\ (2x^2 + 1)^2 - 3x^2 = 27y^2 + 18xy - 11 \end{cases}$$

$$\text{vd 14: } \begin{cases} xy - 1 = 3y - x \\ (xy + 1)(x + 2) = y^2(5 - x^2) \end{cases}$$

$$\text{vd 15 : } \begin{cases} x^2 + 2xy - 2x - y = 0 \\ x^4 - 4(x + y - 1)x^2 + y^2 + 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\text{vd 16 : } \begin{cases} x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0 \\ yx^2 + x^2 + 2y - 22 = 0 \end{cases}$$

$$\text{vd 17 : } \begin{cases} x^2y^2 - 2x + y - 1 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases}$$

➤ Phương pháp 02 : Hệ phương trình đẳng cấp và mở rộng :

♥ Đây là một ví dụ được dẫn y sì trong cuốn NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN 9, tập 2 của Vũ Hữu

Bình khá đơn giản :
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ 2x^2 - 3xy + 4y^2 = 3 \end{cases}$$

Bài giải : Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình :

Xét $x \neq 0$, đặt $y = tx$. Ta có hệ :

$$\begin{cases} x^2(t^2 - t + 1) = 1 \\ x^2(4t^2 - 3t + 2) = 3 \end{cases} \Rightarrow 3t^2 - 3t + 3 = 4t^2 - 3t + 2 \Rightarrow t = \pm 1$$

* $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow (x; y) \in \{(1; 1); (-1; -1)\}$

* $t = -1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow (x; y) \in \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right); \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$

- Cơ sở phương pháp hệ đẳng cấp :

Trước hết, ta tạm gọi và xét phương trình 2 ẩn dạng thuần nhất:

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot x^k \cdot y^{n-k} = 0 \quad \text{trong đó } \alpha_k \text{ là hệ số, } x, y \text{ là 2 ẩn.}$$

ví dụ như các phương trình :

vd 1: $x^5 + 2x^4y + 3x^2y^3 = 0$

vd 2: $2xy + x^2 + 5y^2 = 0$

vd 3: $x^{2010}y + y^{2011} = 0$

Phương pháp giải : Xét $y \neq 0$ rồi đặt $t = \frac{x}{y}$ ta thu được phương trình ẩn t : $\sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot t^k = 0$

Từ đó ta giải được phương trình dạng này.

- Phạm vi phương pháp :

Chúng ta có thể dễ dàng nhận ra các hpt thuộc dạng này thông qua một số ví dụ sau :

vd 1.1 :
$$\begin{cases} 2(x + y) = 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases} \quad (\text{đề thi HSG lớp 9 Tỉnh An Giang năm 2009-2010})$$

♥ **Nhận xét:** Phương trình đầu chính là phương trình thuần nhất 2 ẩn x, y . Khai thác phương trình này nhằm tạo đk ràng buộc giữa chúng. Để ý vai trò bình đẳng của x, y trong pt nên dễ thấy nhân tử $(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})$. Thật vậy; Đặt $a = \sqrt[3]{x}, b = \sqrt[3]{y}$ ta có:

$$pt \Leftrightarrow 2(a^3 + b^3) = 3(a^2b + ab^2) \Leftrightarrow (a+b)(2a^2 - 5ab + 2b^2) = 0 \Leftrightarrow (a+b)(2a-b)(a-2b) = 0$$

Đến đây thì công việc giải hệ còn lại không còn gì khó khăn.

► Như vậy, dạng thứ nhất: phương trình thuần nhất được thấy rõ ở 1 trong các phương trình của hệ.

ví dụ 1.2 :
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3(x+y)} \\ 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 15y^4 \end{cases} \quad (THTT \text{ số } 394 \text{ tháng } 4-2010).$$

Lời giải : Nhận xét : Phương trình thuần nhất nằm ở pt đầu. cần khai thác phương trình này.

$$pt \Leftrightarrow x + y + 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = 3(x+y) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 8x = y \\ x = 8y \end{cases}$$

Như vậy cái khó của hệ này chỉ đơn thuần là giải phương trình.

Để ý tiếp ở phương trình sau: có dấu hiệu của một hằng đẳng thức bậc 4:

$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$, suy ra, phương trình sau tương đương với:

$$(x+1)^4 = x^4 + 15y^4 \quad (*).$$

TH1: $x = -y$, thay vào (*) ta được: $(x+1)^4 = 16x^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 2x \\ x+1 = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{3}, y = \frac{1}{3} \\ x = 1, y = -1 \end{cases}$

Làm tương tự với các TH còn lại ta thu được 8 nghiệm của hệ.

vd 1.3:
$$\begin{cases} x - 2y - \sqrt{xy} = 0 \\ \sqrt{x-1} - \sqrt{2y-1} = 1 \end{cases} \quad (thi thử ĐH)$$

vd 1.4:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2\sqrt{y} \\ \sqrt{x} + \sqrt{5y} = 3 \end{cases} \quad (thi thử ĐH, THPT Lê Văn Hưu, Thanh Hóa 2011)$$

vd 1.5:
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} = x+y \\ x\sqrt{2xy+5x+3} = 4xy-5x-3 \end{cases} \quad (THTT \text{ số } 407 \text{ tháng } 5 \text{ năm } 2011)$$

► Dạng 2: Kết hợp 2 phương trình nhằm tạo ra phương trình thuần nhất.

ví dụ 2.1 :
$$\begin{cases} x^3 + 8y^3 - 4xy^2 = 1 \\ 2x^4 + 8y^4 - 2x - y = 0 \end{cases}$$

♥ **Nhận xét** : mỗi phương trình của hệ đều gồm 2 nhóm bậc :

phương trình thứ nhất : bậc 3 và bậc 0

phương trình thứ hai : bậc 4 và bậc nhất.

Như vậy nếu ghép nhân bậc 4 với bậc 0, bậc 3 với bậc nhất, ta thu được phương trình thuần nhất ẩn x, y bậc 4.

Bài giải : hệ phương trình tương đương với :
$$\begin{cases} x^3 + 8y^3 - 4xy^2 = 1 & (1) \\ 2x + y = 2x^4 + 8y^4 & (2) \end{cases}$$

Nhân theo về hai phương trình của hệ ta thu được :

$$(x^3 + 8y^3 - 4xy^2)(2x + y) = 2x^4 + 8y^4 \Leftrightarrow x^3y - 8x^2y^2 + 12xy^3 = 0$$

Đặt $y = tx$ thì phương trình trên trở thành :

$$x^4(t^3 - 8t^2 + 12t) = 0 \Leftrightarrow x^4 \cdot t(t-2)(t-6) = 0$$

• Nếu $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

• Nếu $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

• Nếu $t = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 8y^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

• Nếu $t = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 6y \\ 200y^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{\sqrt[3]{200}} \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{200}} \end{cases}$

Vậy hệ có 4 nghiệm phân biệt như trên .

ví dụ 2.2 :
$$\begin{cases} 14x^2 - 21y^2 + 22x - 39y = 0 \\ 35x^2 + 28y^2 + 111x - 10y = 0 \end{cases}$$

♥ @ Nhìn vào khá gờm với các hệ số khổng lồ, nhưng nếu nhìn nhận theo hướng phương trình thuần nhất thì ta lại thấy nó thật đơn giản.

Bài giải : Hệ phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} 14x^2 - 21y^2 = 39y - 22x & (1) \\ 111x - 10y = -35x^2 - 28y^2 & (2) \end{cases}$$

Nhân theo vế 2 phương trình (1) và (2) ta thu được phương trình thuần nhất bậc 3 ẩn x,y:

$$(14x^2 - 21y^2)(10y - 111x) = (35x^2 + 28y^2)(39y - 22x)$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 3y^2)(10y - 111x) = (5x^2 + 4y^2)(39y - 22x)$$

Nếu $y = 0 \Rightarrow x = 0$ thỏa mãn là nghiệm của hệ.

Nếu $y \neq 0$ thì đặt $t = \frac{x}{y}$ ta đưa về giải phương trình :

$$(2t^2 - 3)(10 - 111t) = (4 + 5t^2)(39 - 22t) \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

Vậy $y = 3x$, thế vào (1) ta giải được tiếp bài toán.

♥♥ Như vậy, ứng dụng của dạng này là hệ 2 ẩn x,y trong đó các phương trình gồm 2 nhóm bậc. Cần nhân chia, bình phương hợp lí nhằm tạo phương trình thuần nhất. !

Sau đây là một số ví dụ thêm :

vd 2.3 :
$$\begin{cases} (x^2 - y^2) \cdot 2y = 3x \\ (x^2 + y^2) \cdot x = 10y \end{cases}$$

vd 2.4:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases}$$

(thi thử đại học 2011)

$$\text{vd 2.5 : } \begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ y^2 + 1 = 5(x^2 + 1) \end{cases}$$

$$\text{vd 2.6 : } \begin{cases} 3x^2 + 8y^2 + 12xy = 23 \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

(Thi chuyên DHQG HN năm 2010)

$$\text{vd 2.7 } \begin{cases} mx + (2m-1)y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \end{cases} \text{ . tìm m để hệ phương trình có nghiệm}$$

(thi thử ĐH – 2011)

$$\text{vd 2.8 } \begin{cases} (x-y)(x^2 - y^2) = 3 \\ (x+y)(x^2 + y^2) = 15 \end{cases}$$

♥♥ Qua 2 ví dụ trên, ta thấy khá dễ dàng nhận dạng và giải quyết các bài toán thuần nhất này. Tuy nhiên, cũng nhắc trước với các bạn rằng, không phải cứ phải là hệ gồm 2 nhóm bậc là rập khuôn theo phương pháp này. Thật vậy, thử với phương trình :

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 = x + 4y \end{cases} \text{ theo phương pháp, ta tạo phương trình thuần nhất là :}$$

$(x^3 - y^3) \cdot (x + 4y)^2 = 9(x^2 + 2y^2)^2$. Nhưng! đây là phương trình bậc 6 và bạn định làm gì vs pt bậc quá cao ?. Như thế, cần phải xem xét sẽ phải giải pt nào trước khi áp dụng phương pháp này. Mỗi bài đều ẩn chứa 1 lời giải đẹp, ẩn 1 phương pháp mới dưới mỗi con mắt khác nhau của chúng ta. Vì vậy, hãy thử dùng chính con mắt của bạn và thử khám phá nó xem ! Ít nhất, nếu không thành thì bạn cũng sẽ khác sâu được bài toán đó (xem lời giải bài toán này sau). Và nhớ "cái khó ló cái khôn" , biết đâu bạn sẽ tìm được cho mình một phương pháp mới nào đó.

► Quay lại với cái mới của phương pháp 02 : mở rộng.

Trước hết, ta xem xét hệ phương trình mở màn sau :

$$\text{ví dụ 01: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ 2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + y = 7 & (2) \end{cases}$$

Cách 1: Theo phương pháp 1: Nháp: nhân t vào (1), tìm ra: $t = \frac{5}{2}$ thỏa mãn. từ đó đi đến bài giải:

Nhân (1) với 5, nhân (2) với 2 rồi cộng theo vế ta được:

$$9x^2 + 6x(y+1) + y^2 + 2y = 24 \Leftrightarrow (3x + y + 1)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + 1 = 5 \\ 3x + y + 1 = -5 \end{cases}$$

Đến đây thì thế và giải là ok!

$$\text{Cách 2: } \text{hpt} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2y)(2x-y) + (2x-y) + (x+2y) = 7 \\ (2x-y)^2 + (x+2y)^2 = 10 \end{cases}$$

Đặt $a = x+2y, b = 2x-y$, thì hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} ab + a + b = 7 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = -6 \\ ab = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 4 \\ ab = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 1 \\ 2x-y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 3 \\ 2x-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{-1}{5} \end{cases} \rightarrow \text{xong!}$$

Và sau đây là cách 3: một lời giải khá mới, cũng chính là lời giải mở rộng của phương pháp:

Bài giải: Đổi biến: $a = x-1$, $b = y-1$, thì hệ phương trình đã cho trở thành :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + 2a + 2b = 0 \\ 2a^2 - 2b^2 + 10a + 3ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = -2(a+b) \\ 10a = -2a^2 + 2b^2 - 3ab \end{cases}$$

Nhân theo vế 2 phương trình trên của hệ, ta thu được phương trình thuần nhất bậc 3 ẩn a,b::

$$10a.(a^2 + b^2) = 2(a+b)(2a^2 - 2b^2 + 3ab)$$

Xét $a = 0 \Rightarrow x = 1, y = 1$, thỏa mãn là nghiệm của hệ.

Xét $a \neq 0$, đặt $t = \frac{a}{b}$ thì phương trình trở thành:

$$10t(t^2 + 1) = 2(t+1)(2t^2 - 2 + 3t) \Leftrightarrow 3t^3 - 5t^2 + 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow (3t+1)(t^2 - 2t + 2)$$

Do đó ta có: $3a+b=0 \Leftrightarrow 3(x-1)+(y-1)=0 \Leftrightarrow y=4-3x$

thế vào hệ ban đầu ta thu được nghiệm của hệ.!

♥♥ Như vậy, ý tưởng xuất phát của hệ chính là sử dụng kiến thức tạo phương trình thuần nhất. Nhưng nó không thấy ngay được mà phải qua biến đổi, đặt, ...

@@@ Nhận xét tí: 1 bài toán với 3 lời giải: lời giải 1: ngắn gọn + đẹp hơn cả (nhưng bạn có biết vất vả như thế nào để nháp ra t:P), cách 2 thì rất đặc biệt với biến đổi + đặt (có vẻ không tự nhiên lắm), với cách 3 (khỏi bàn vì đi sau đây sẽ là pp, mà như ta đã biết, đã là pp thì không thể không tự nhiên :D).

Qua ví dụ ta cho ra mở rộng phương pháp: đổi ẩn đưa về phương trình thuần nhất bậc 3:

➤ Phạm vi ứng dụng:

- hệ có nghiệm đẹp (hữu tỉ)
- hệ gồm 2 phương trình đa thức bậc 2
- Phương pháp và cơ sở:

Nhằm nghiệm, giả sử có 1 nghiệm $x = \alpha, y = \beta$, khi đó đổi ẩn bằng cách đặt: $m = x - \alpha, n = y - \beta$, ta sẽ thu được hệ như mong muốn !

Cơ sở: Xét pt: $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey = f$ có nghiệm $x = \alpha, y = \beta$, thì : $a\alpha^2 + b\beta^2 + c\alpha\beta + d\alpha + e\beta = f$.

Do đó, khi đặt và thế ta thu được phương trình:

$$a(m+\alpha)^2 + b(n+\beta)^2 + c(m+\alpha)(n+\beta) + d(m+\alpha) + e(n+\beta) = f$$

$$\Leftrightarrow am^2 + bn^2 + cmn = -m.(2a.\alpha + c\beta + d) - n(2b\beta + c\alpha + e)$$

Như vậy, ta đã loại được 1 nhóm (bậc không), dẫn đến mỗi phương trình chỉ còn 2 nhóm và việc ứng dụng phương pháp trở nên đơn giản. Hãy thực hành với 1 số vd sau, bạn sẽ thấy thật thú vị:.

ví dụ 4:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 7x - 5y + 9 = 0 \end{cases}$$

ví dụ 5:
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3x - 2 \\ 3(x + y - 1) = 2xy \end{cases}$$

ví dụ 6:
$$\begin{cases} (x-1)^2 + 6(x-1)y + 4y^2 = 20 \\ x^2 + (2y+1)^2 = 2 \end{cases}$$

ví dụ 7:
$$\begin{cases} 2x^2 + x + y^2 = 7 \\ xy - x + y = 3 \end{cases}$$

IV/ MỘT SỐ KĨ NĂNG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH.

Ngẫm về một số định nghĩa sau:

- **kĩ năng**: là khả năng vận dụng những kiến thức đã thu nhận được trong một lĩnh vực nào đó áp dụng vào thực tế + những lĩnh vực khác
- **Kinh nghiệm**: (kinh: từng trải; nghiệm: chứng thực) Sự hiểu biết do đã từng trải công việc, đã thấy được kết quả khiến cho có thể phát huy được mặt tốt và khắc phục được mặt chưa tốt: Có kinh nghiệm mà không có lí luận, cũng như một mắt sáng, một mắt mờ (HCM); Có thực hành mới có kinh nghiệm (TrVGiàu).

Hãy phát huy những kĩ năng + kinh nghiệm của mình một cách hiệu quả !

Bây giờ, quay lại với chuyên đề, phần IV.

➤ **Kĩ năng 01: Kĩ năng vận dụng hằng đẳng thức bậc cao.**

Chúng ta cũng xem xét các ví dụ sau :

ví dụ 1 :
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 91 \\ 4x^2 + 3y^2 = 16x + 9y \end{cases}$$

♥ @@@ Nhìn : có bậc 3, bậc 2, bậc 1, bậc 0. :- ?

suy nghĩ + liên tưởng : một cái gì đó bậc 3,.....

vận dụng hằng đẳng thức : $(x-4)^3 = x^3 - 3(4x^2 - 16x) - 64; (y-3)^3 = y^3 - 3(3y^2 - 9y) - 27$

Thử : Nhân -3 vào pt sau rồi cộng theo vế với pt đầu, ta được :

$$(x-4)^3 + (y-3)^3 = 0, \quad 64 + 27 = 91, \text{ như vậy là chúng ta đã đi đúng hướng .}$$

♥♥ @@@@ : Nếu là lần đầu gặp gỡ những dạng thế này thì quả thật rất khó để tiếp cận + đi theo hướng suy nghĩ trên, nhưng khi đã đọc qua 1 vài ví dụ thì những liên tưởng này trở nên rất tự nhiên + quen thuộc đối với bạn.

ví dụ 2 :
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 = x + 4y \end{cases} \quad (\text{Tập đoàn Tân thủ khoa 2009-2010, Vinh city})$$

HD : suy luận tương tự trên, dạng này cũng gợi đến cho ta một hằng đẳng thức bậc 3 với những điểm đáng lưu ý : $x^3 - x$ trong $(x-1)^3 = x^3 - 1 - 3(x^2 - x)$ và $y^3 - 4y$ trong $(y-2)^3 = y^3 - 8 - 3(2y^2 - 4y)$.

Như vậy, nhân 3 vào phương trình sau ta có ngay :

$$(x-1)^3 = (y-2)^3 \Leftrightarrow x-1 = y-2$$

Thế và giải phương trình sau là ok!.

vd 3 :
$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) \end{cases}$$

♥♥ **Nhận xét** : một hệ khá khủng khiếp, không chỉ về bậc mà còn về cả con số.

Tuy nhiên, nếu chúng ta quan sát thì những suy nghĩ về hằng đẳng thức khá phù hợp + tự nhiên.

Thử xem xét phương trình thứ 2 trước xem ! Liệu nó có dính dáng gì với đẳng thức bậc 3.

$$x^3 - 3x^2 + 4x = (x-1)^3 + (x+1) = (x-1)^3 + (x-1) + 2$$

$$2y^3 - 12y^2 + 32y = 2(y-2)^3 + 8y + 16 = 2(y-2)^3 + 8(y-2) + 32.$$

$$\text{Như vậy là có : } (x-1)^3 + (x-1) = 2(y-2)^3 + 8(y-2) + 30$$

:((, khai thác phương trình này dường như không cho một nhân tử hay một kết quả thế nào (xem các kĩ năng sau). Tuy nhiên, có 1 con số rất đáng chú ý, chính là 30. ($240 = 30 \times 8$)

Hơn nữa, theo 1 thói quen rất tự nhiên của bản thân trong những TH này chính là đặt ẩn phụ vì nó khá đẹp, và liệu cách đặt ẩn có đem lại lợi ích gì hay không thì phải thử.

Đặt cho gọn : $a = x-1, b = y-2$, hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} (a+1)^4 - (b+2)^4 = 240. \\ a^3 + a - 2b^3 - 8b = 30 \end{cases}$$

Nhân 8 vào vế rồi trừ vế nhằm khử con số 30 và 240. Kết quả thu được là :

$$(a+1)^4 - 8(a^3 + a) = (b+2)^4 - 16(b^3 + 4b) \quad (*)$$

Không biết thấy được cái gì và làm được gì với cái này, nhưng thiết nghĩ đã làm thì làm đến cùng, phải khai phá cái mũ 4 kia ra!

$$(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1 = a^4 + 6a^2 + 1 + 4(a^3 + a)$$

$$(b+2)^4 = b^4 + 8b^3 + 24b^2 + 32b + 16 = b^4 + 24b^2 + 16 + 8(b^3 + 4b)$$

Quan sát kĩ, dường như lời giải đã dần lộ ra :

$$(*) \Leftrightarrow a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1 = b^4 - 8b^3 + 24b^2 - 32b + 16$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^4 = (b-2)^4 \Leftrightarrow a = b-1$$

Đến đây thì phương trình trở nên bình thường với việc thế và giải !

♥♥ Trên đó là trình bày những quan sát và suy nghĩ của bản thân. Tuy nhiên, một khi chúng ta đã đi đến đích như vậy thì như những vd ở pp 1. Chúng ta cũng cần trình bày một cách đẹp + khoa học hơn. (và giấu được phương pháp nếu muốn ☺).

Theo trên, cuối cùng sẽ có :

$$(a-1)^4 = (b-2)^4 \Rightarrow (x-2)^4 = (y-4)^4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - y^4 - 240 = 8(x^3 - 3x^2 + 4x - 2y^3 + 12y^2 - 32y)$$

Như vậy, nhân 8 vào phương trình sau rồi cộng theo vế ta sẽ thu được lời giải gọn theo biến đổi trên !.

♥♥♥Giải xong bài này, mỗi người sẽ có 1 suy nghĩ khác nhau. Liệu bạn có thấy nó quá khó, dễ, hay, dở,... Tuy nhiên, xin giới thiệu với các bạn : đây chính là bài pt được đánh giá là hay + khó trong đề thi chọn HSG Quốc Gia năm 2009.

➤ **Kĩ năng 2: Kĩ năng phân tích + đánh giá từ 2 phương trình của hệ.**

$$\text{vd 1 : } \begin{cases} x^6 - y^3 + x^2 - 9y^2 - 30 = 28y \\ \sqrt{2x+3} + x = y \end{cases} \quad (\text{thi thử ĐH-CD trường Đại Học Vinh năm 2011})$$

♥ **Nhận xét** : cần khai thác phương trình đầu :

Chú ý 1 hằng đẳng thức khá lố : $(y-3)^3 = y^3 - 9y^2 + 27y - 27$. Như vậy khai thác bằng cách đặt ẩn gọn :

$$z = y-3, \text{ ta có : } pt \Leftrightarrow x^6 + x^2 = (y-3)^3 + (y-3) \quad (*).$$

Nhận xét : hàm $f(a) = a^3 + a$ có : $f'(a) = 3a^2 + 1 > 0$ nên hàm đồng biến.

$$\text{Do đó từ } (*) \Rightarrow x^2 = y-3$$

Như vậy, công việc còn lại là thế và giải phương trình : $\sqrt{2x+3} = x^2 + 3 - x$

Giải phương trình dạng này xem pp sau !

$$\text{vd 2 : } \begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 \\ 2\sqrt{2-x} - \sqrt{(2y-1)^3} = 1 \end{cases}$$

♥ **Quan sát** : cả 2 phương trình dường như đều có vẻ phức tạp với các căn thức. Tuy nhiên, ở phương trình đầu, ta thấy nó đồng bộ hơn. Từ đó, một ý tưởng rõ ràng lại hiện ra :.....

$$\text{Quan sát tiếp : } (3-x) = (2-x) + 1. \text{ và } (2y) = (2y-1) + 1$$

Như vậy, sau khi đặt điều kiện, ta đặt gọn : $a = \sqrt{2-x}, b = \sqrt{2y-1} \geq 0$. khi đó phương trình đầu trở

$$\text{thành : } (a^2 + 1)a = (b^2 + 1)b \Leftrightarrow a^3 + a = b^3 + b$$

đây cũng là một hàm đồng biến, suy ra $a = b$. Thế vào phương trình sau ta có :

$$2a - a^3 = 1 \Leftrightarrow (a-1)(a^2 + a - 1) = 0$$

Đến đây thì oki ! rồi.

$$\text{vd 3 : : } \begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases} \quad (1)$$

(thi ĐH Khối A năm 2010)

Khai thác : $2(y-3)+1=2y-5$. đặt $b=5-2y, a=2x$, ta có :

$$(1) \Leftrightarrow 2x.(4x^2 + 1) = (6-2x)\sqrt{5-2y}$$

$$\Rightarrow a(a^2 + 1) = b(b^2 + 1) \Leftrightarrow a^3 + a = b^3 + b$$

Đây cũng lại là hàm đồng biến nên theo đó ta có :

$$a = b \Rightarrow 2x = \sqrt{5-2y}. \text{ Đến đây thế và công việc còn lại là giải phương trình !}$$

Cùng thử sức với một số ví dụ tương tự:

$$\text{vd 4 : } \begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 \end{cases}$$

$$\text{vd 5 : } \begin{cases} \sqrt{y^2 - 8y + 9} - \sqrt[3]{xy + 12 - 6x} \leq 1 \\ \sqrt{2(x-y)^2 + 10x - 6y + 12} - \sqrt{y} = \sqrt{x+2} \end{cases}$$

$$\text{vd 6 : } \begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 \end{cases}$$

$$\text{vd 7 : } \begin{cases} 2+6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x+3y-2 \end{cases}$$

(thi thử ĐH-CD Đại Học Sư Phạm Hà Nội năm 2010)

$$\text{vd 8 : } \begin{cases} x^2 + y^3 = 2 \\ x^2 - x + y^2 + xy = 0 \end{cases}$$

$$\text{vd 9 : } \begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 2011})(y + \sqrt{y^2 + 2011}) = 2011 \\ 2xy + 7 + \sqrt{4x+2y+5} = 3x+3y \end{cases}$$

$$\text{vd 10 : } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{y-5} \\ x + y + x^2 + y^2 = 44 \end{cases}$$

$$\text{vd 11 : } \begin{cases} x - \frac{4}{x} = 2y - \frac{2}{y} \\ 2x = y^3 + 1 \end{cases}$$

➤ **Kĩ năng 03: kĩ năng phân tích thể xuất hiện nhân tử :**

♥♥ Đây là một phương pháp rất thú vị, không có một ràng buộc hướng suy luận hay cũng nhắc nào cả. Có thể nói như tên gọi, "thể xuất hiện nhân tử", pp khá thực dụng khi yêu cầu phải cho ta cái lợi trước mắt khi thể. Hãy xem các ví dụ sau:

ví dụ 1 :
$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$$

Ngoài lời giải bằng phương pháp đưa về phương trình thuần nhất, ta có lời giải khác nhờ quan sát :

pt (1) $\Leftrightarrow x(x^2 - 8) = y(y^2 + 2)$

pt (2) $\Leftrightarrow x^2 = 3(y^2 + 2)$

Như vậy việc thể $y^2 + 2$ cho ta nghiệm trước mắt là $x = 0$. Và phương trình còn lại ntn ? chúng ta còn phải xem "may mắn" .

Bài giải :

$$\text{hpt} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 8) = y(y^2 + 2) \\ x^2 = 3(y^2 + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x(x^2 - 8) = x^2 y \\ x^2 = 3(y^2 + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = ??? \end{cases} \rightarrow \text{vô nghiệm} \\ \begin{cases} xy = 3(x^2 - 8) \\ x^2 = 3(y^2 + 2) \end{cases} \end{cases}$$

Giải hệ còn lại không khó khăn, nhân phương trình sau với 4 rồi cộng theo vế với pt đầu ta đưa về giải phương trình thuần nhất bậc 2 ẩn x, y.

♥♥ @@@ có thể nói phương pháp thể này khá thú vị, rất cần con mắt quan sát đánh giá + phân tích vì đây không phải là phương pháp mẫu mực, mà có thể nói là khá đặc biệt. Thật vậy, với ví dụ sau :

giải hpt :
$$\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ y^2 + 1 = 5(x^2 + 1) \end{cases}$$

Nó có vẻ ngoài rất giống với ví dụ trên, thực ra là cùng dạng nếu ta giải quyết nó theo phương pháp 02 (phần III) nêu trên. Nhưng ví dụ 1 trên đặc biệt khi đi theo cách giải thể này, và chúng ta đã tìm ra được điểm đặc biệt riêng của nó và giải theo 1 hướng khác .

ví dụ 2 :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x + y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases} \quad (\text{thi thử ĐH nhiều trường năm 2011})$$

♥ **Nhận xét :** quan sát 2 phương trình thấy một điểm đáng lưu ý :
$$\begin{cases} 4y - xy - y^2 = x^2 + 1 \\ y(x + y)^2 - 7y = 2(x^2 + 1) \end{cases}$$

Hơn nữa, nếu thể $x^2 + 1$ thì phương trình thu được chứa nhân tử y :

$$2y(4 - x - y) = y[(x + y)^2 - 7]$$

Chia 2 vế cho y, ta lại thu được phương trình bậc 2 ẩn $(x + y)$..

Đó là suy nghĩ khá tự nhiên. Qua những suy nghĩ trên ta đi đến trình bày lời giải nhằm thu điểm + hay + gọn hơn như sau :

Bài giải: Dễ thấy $y \neq 0$, ta có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x + y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} + x + y = 4 \\ (x + y)^2 - 2\frac{x^2 + 1}{y} = 7 \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{x^2+1}{y}$, $v = x+y$ ta có hệ: $\begin{cases} u+v=4 \\ v^2-2u=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4-v \\ v^2+2v-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3, u=1 \\ v=-5, u=9 \end{cases}$

+) Với $v=3, u=1$ ta có hệ: $\begin{cases} x^2+1=y \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=y \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y=2 \\ x=-2, y=5 \end{cases}$.

+) Với $v=-5, u=9$ ta có hệ: $\begin{cases} x^2+1=9y \\ x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=9y \\ y=-5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+9x+46=0 \\ y=-5-x \end{cases}$, hệ này vô nghiệm.

KL: Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $(x; y) = \{(1; 2), (-2; 5)\}$.

♥ Ta xét tiếp 1 ví dụ thú vị + thể hiện khả năng linh hoạt của pp như sau:

ví dụ 3: $\begin{cases} x^2+2xy-2x-y=0 \\ x^4-4x^2(x+y-1)+y^2+2xy=0 \end{cases}$

Nhìn phương trình sau, 1 hằng đẳng thức sẽ đập vào mắt ta:

$$x^4-4x^2(x+y-1)+2xy+y^2 = x^4-4x^2(x+y)+2xy+y^2+4x^2$$

Có 2 hằng đẳng thức ta có thể nghĩ đến:

$$1. \quad x^4-4x^2(x+y)+2xy+y^2+4x^2 = (x^2-2(x+y))^2-3y^2-6xy$$

$$2. \quad x^4-4x^2(x+y)+2xy+y^2+4x^2 = (x^2-(x+y))^2+x^2(3-2x-2y)$$

Thử với cái thứ 1.

$$\text{hpt} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-2y=-y(1+2x) \\ (x^2-2x-2y)^2=3y(y+2x) \end{cases}$$

thế $x^2-2x-2y$ ta được: $y^2(1+2x)^2=3y(y+2x)$

Kết quả thu được không “may mắn” khả quan như trên sau khi chia 2 vế cho y.

Tạm thời dừng 1. để thử với 2. xem sao ???

$$\begin{cases} x^2-x-y=x(1-2y) \\ (x^2-x-y)^2=x^2(2x+2y-3) \end{cases}$$

sau khi thế x^2-x-y thu được:

$$x^2(1-2x)^2=x^2(2x+2y-3).$$

Xử lí $x=0$, ta còn lại hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+2xy=2x+y \\ 4x^2+4=6x+2y \end{cases}$$

Đến đây thì đơn giản hơn rất nhiều.

Thấy nghiệm đẹp $x=y=1$ nên chuẩn theo phương pháp 2 ta sẽ đi ngay đến kq.

Tuy nhiên với bài này, nếu đi theo quan sát: bậc của y ở 2 phương trình là bậc nhất nên thể công việc thế y rất thuận lợi (chỉ phải giải phương trình bậc 3)

Thật vậy, từ phương trình sau có: $y=2x^2+2-3x$. thế vào phương trình đầu được:

$$x^2-2x=(1-2x)(2x^2+2-3x)$$

$$\Leftrightarrow 4x^3-7x^2+5x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(4x^2-3x+2)=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$$

♥ Như vậy, hệ phương trình đã được giải quyết xong!. Có thể thấy phương pháp thế này khá thú vị + mạnh khi giải quyết được khá nhiều bài toán rắc rối. Hơn thế nữa, nếu biết cách quan sát + đánh giá và thể hợp lí, ta còn thu được nhiều hơn thế. Hãy xem ví dụ sau:

vd 4:
$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 & (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x & (2) \end{cases} \quad (Đề thi HSG Quốc Gia năm)$$

♥ **Nhận xét:** ở pt(1) ta thấy có thể rút ngay: $y^2 = \frac{-x^3 - 49}{3x}$. Nhưng nếu căn nó để thế vào phương trình sau thì thật phức tạp và không giúp được gì ! Cần quan sát tiếp: nhằm nghiệm đẹp: $x = -1, y = 4$. Đoán được nghiệm, ta lại thấy ở pt (2): $8y(x+1) = x^2 + y^2 + 17x$ (*). Giờ thì ổn rồi: thế y^2 vào VT của (*) thì VT chỉ chứa ẩn x và chắc chắn phải có 1 nhân tử $(x+1)$. Thật vậy, thế ta được:

$$8y(x+1) = x^2 + 17x - \frac{x^3 + 49}{3x} = \frac{2x^3 + 51x^2 - 49}{3x} = \frac{(x+1)(2x^2 + 49x - 49)}{3x}$$

Nếu $x = -1 \Rightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$ thỏa mãn là nghiệm của hệ.

Còn lại: $8y = \frac{2x^2 + 49x - 49}{3x}$ (3). Và trên có: $y^2 = \frac{-x^3 - 49}{3x}$ (4). Note: y^2 và $8y$, nghiệm $y = \pm 4$ gọi đến hằng đẳng thức: $(y \pm 4)^2$. Như vậy từ (3) và (4) ta có:

$$y^2 - 8y + 16 = \frac{-x^3 - 49}{3x} - \frac{2x^2 + 49x - 49}{3x} + 16 = -\frac{(x+1)^2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

► **Nháp:** khi đi theo phân tích $(y-4)^2$ thì ok! còn $(y+4)^2$ sẽ không được.

Như vậy, hệ đã được giải quyết. Việc trình bày còn lại dành cho các bạn! (chú ý cần xét $x \neq 0$)
Một số ví dụ tương tự:

Vd 4:
$$\begin{cases} 6x^2y + 2y^3 + 35 = 0 \\ 5x^2 + 5y^2 + 2xy + 5x + 13y = 0 \end{cases}$$

Vd 5:
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Vd 6:
$$\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 + 1 - 4x \\ xy + x + 1 = x^2 \end{cases}$$

Kết thúc tạm thời của : "Chuyên đề hệ phương trình !"

Do một số nguyên nhân, chuyên đề tạm thời kết thúc tại đây! Còn khá nhiều phương pháp mới + hay chưa được nhắc đến trong chuyên đề này. (như pp BDT, đạo hàm,nhưng vẫn được dùng xen kẽ). Để kết thúc, xin nêu một số vấn đề mở để chúng ta có thể thảo luận trao đổi sau:

➤ **Vấn đề 01: Xem xét 2 dạng hệ sau:**

- Dạng hệ thứ nhất liên quan đến 3 cách giải !

$$\text{vd 1.1: } \begin{cases} 1+x^3y^3=19x^3 \\ y(1+xy)=-6x^2 \end{cases}$$

$$\text{vd 1.2: } \begin{cases} 8x^3y^3+27=18y^3 \\ 4x^2y+6x=y^2 \end{cases}$$

$$\text{vd 1.3: } \begin{cases} 9y^3(3x^3-1)=-125 \\ 45x^2y+75x=6y^2 \end{cases}$$

- Dạng 2: Liên quan đến 1 vấn đề xung quanh chỉ một dạng !

$$\text{Vd 2.1: } \begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\frac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\frac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} \end{cases}$$

(Đề thi Quốc Gia 1996)

$$\text{Vd 2.2: } \begin{cases} x+\frac{5x+7\sqrt{5}y}{x^2+y^2}=7 \\ y+\frac{7\sqrt{5}x-5y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$$

$$\text{Vd 2.3: } \begin{cases} x\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}} \\ y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

$$\text{Vd 2.4: } \begin{cases} \left(4+\frac{1}{y+2x}\right)\sqrt{x}=2\sqrt{3} \\ \left(4-\frac{1}{y+2x}\right)\sqrt{y}=4 \end{cases}$$

$$\text{Vd 4: } \begin{cases} \sqrt{x}\left(1-\frac{12}{y+3x}\right)=2 \\ \sqrt{y}\left(1+\frac{12}{y+3x}\right)=6 \end{cases}$$

(Đề thi HSG Quốc Gia năm 2006-2007)

➤ **Vấn đề 02: TỪ MỘT PHƯƠNG TRÌNH.**

giải phương trình:

$$4x^2-8x+\sqrt{2x+3}=1 \quad (*)$$

Cách 1: bình phương đưa về giải phương trình bậc 4:

Đặt $a=2x$ để được pt gọn hơn, như vậy đơn giản hơn trong bình phương!

$$1+4a-a^2=\sqrt{a+3} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4a-a^2 \geq 0 \\ a+3 \geq 0 \\ (1+4a-a^2)^2=a+3 \end{cases} \quad (1)$$

Giải (1): $pt \Leftrightarrow a^4 - 8a^3 + 14a^2 + 7a - 2 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - 5a + 1)(a^2 - 3a - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ a = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \end{cases}$

Kết hợp điều kiện suy ra nghiệm:

$$x = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}; x = \frac{5 + \sqrt{21}}{4}$$

Cách 2: Nhân liên hợp:

$$(*) \Leftrightarrow 4x^2 - 10x + 1 = 2 - 2x - \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow 4x^2 - 10x + 1 = \frac{4x^2 - 10x + 1}{2 - 2x + \sqrt{2x+3}}$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 10x + 1) \left(1 - \frac{1}{2 - 2x + \sqrt{2x+3}} \right) = 0$$

Giải phương trình tích này thì đơn giản rồi !!!!

Cách 3: Phân tích phương trình về dạng $A^2 \pm B^2 = 0$.

$$(*) \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + \frac{9}{4} = 2x + 3 + \sqrt{2x+3} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(2x - \frac{3}{2} \right)^2 = \left(\sqrt{2x+3} + \frac{1}{2} \right)^2$$

Cách 4: Đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng !

Đặt $2t - 2 = \sqrt{2x+3}$ thì phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 4x^2 - 8x - 1 = 2t - 2 \\ 4t^2 - 8t + 4 = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 8x = 2t - 1 \\ 4t^2 - 8t = 2x - 1 \end{cases}$$

đây chính là hệ đối xứng kiểu II, trừ theo 2 phương trình của hệ ta thu dễ dàng giải quyết bài toán !

Cách 5: chuyển về giải hệ dạng ẩn số = t = hằng số.

Đặt $y = \sqrt{2x+3}$, ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x^2 - 8x = y + 1 \\ y^2 = 2x + 3 \end{cases}$$

Cộng theo vế 2 phương trình ta thu được:

$$4x^2 - 8x - y^2 = y - 2x - 2 \Leftrightarrow (2x - 2)^2 - y^2 = y - 2x + 2 \Leftrightarrow (2x - 2 - y)(2x - 1 + y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y + 2 \\ 2x = 1 - y \end{cases}$$

Tiếp theo chỉ cần thế vào giải phương trình bậc 2 nữa là xong!.

5 cách giải một phương trình vạch ra cho chúng ta 5 phương pháp giải phương trình hiệu quả. Ngoài ra, ta còn một số pp khác như: đạo hàm, đặt 2 ẩn đưa về phương trình đẳng cấp,.....

Hãy vận dụng những phương pháp trên để giải các bài phương trình !

V/ TẢN MẠN.