

CÂU CHUYỆN NHỎ VỀ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC

Tác giả: Trần Nam Dũng

Năm 1996, hồi đó tôi mới về nước chưa được một năm. Kỳ thi Olympic 30/4 tổ chức tại trường THPT chuyên Lê Hồng Phong Tp HCM. Thầy Thái Minh Đường nói tôi gửi một số đề cho BTC kỳ thi và trong số các bài toán thi cho lớp 10 có bài toán do tôi đề xuất được chọn. Đó là bài toán:

Cho $0 \leq x \leq 1$. Chứng minh rằng

$$x \left(9\sqrt{1+x^2} + 13\sqrt{1-x^2} \right) \leq 16$$

Bài toán này được chọn có lẽ nhờ cách phát biểu gọn gàng, số đẹp và đặc biệt là lời giải rất ngắn gọn, cụ thể như sau:

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$\begin{aligned} x \left(9\sqrt{1+x^2} + 13\sqrt{1-x^2} \right) &= \frac{3}{2} \cdot 3x \cdot 2\sqrt{1+x^2} + \frac{13}{2} \cdot x \cdot 2\sqrt{1-x^2} \\ &\leq \frac{3}{4} [9x^2 + 4(1+x^2)] + \frac{13}{4} [x^2 + 4(1-x^2)] \\ &= 16. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $3x = 2\sqrt{1+x^2}$ và $x = 2\sqrt{1-x^2}$, tức là khi $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Tuy lời giải đơn giản như vậy nhưng đây là một bài toán không dễ nhất là đối với học sinh lớp 10. Kết quả diễn ra đúng như vậy, chỉ duy nhất có bạn Vũ Đức Phú giải được bài này bằng cách dùng *Cauchy - Schwarz* có trọng số. Mấy đệ tử ruột của tôi trong đó có Lê Quang Năm đã bó tay, dù Năm nói "Em thử dùng đạo hàm cũng không được, hình như dấu bằng không xảy ra."

Thực ra thì chắc là Năm tính nhầm chứ nếu dùng đạo hàm thì bài toán này cũng khá tầm thường, chỉ giải phương trình đạo hàm bằng 0 và xét dấu một chút là ra.

Ở đây tôi muốn kể một chút về các hằng số 9, 13, 16 trong bài toán này. Theo một nghĩa nào đó, đó là các hằng số đẹp nhất có thể. Câu chuyện thế này

Để đặt ra bài toán, tôi muốn tìm GTLN của biểu thức dạng

$$ax\sqrt{1+x^2} + bx\sqrt{1-x^2}$$

bằng cách sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ có trọng số mà cụ thể, tôi viết

$$\begin{aligned} ax\sqrt{1+x^2} + bx\sqrt{1-x^2} &= \frac{a}{s} \cdot sx\sqrt{1+x^2} + \frac{b}{t} \cdot tx\sqrt{1-x^2} \\ &\leq \frac{a}{2s} \cdot [s^2x^2 + (1+x^2)] + \frac{b}{2t} \cdot [t^2x^2 + (1-x^2)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(as + \frac{a}{s} + bt - \frac{b}{t} \right) x^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t} \right). \end{aligned}$$

Tôi muốn chọn s, t sao cho vế trái không phụ thuộc vào x , đồng thời tồn tại x , để dấu bằng xảy ra đồng thời ở hai bất đẳng thức $AM - GM$.

Từ đây tôi được hệ

$$\begin{cases} as + \frac{a}{s} + bt - \frac{b}{t} = 0 \\ 2 + t^2 - s^2 = 0 \end{cases}$$

Chú ý là từ đầu đến giờ tôi vẫn chưa chọn a, b do đó tôi chọn s, t trước (nghiệm chọn trước tham số!). Vì $(s-t)(s+t) = 2$ nên đơn giản nhất là chọn $s-t = 1, s+t = 2$ và tôi được $s = \frac{3}{2}, t = \frac{1}{2}$. Thay vào phương trình đầu tôi được $a \cdot \frac{13}{6} = b \cdot \frac{3}{2}$. Từ đây tôi chọn $a = 9$ và $b = 13$ và đó chính là những hằng số xuất hiện trong đề toán nói trên.

Như vậy, để chọn được những hằng số đẹp (dẫn đến những lời giải đẹp), đôi khi các tác giả phải làm một bước đi ngược như vậy, chứ không phải là các số 9, 13 có trường rồi tìm ra s, t .

Bài toán Olympic 30/4 sau này còn được sử dụng một lần nữa trong một cuộc thi của báo THPT. Xét về một mặt nào đó, nó là một bài toán khá tầm thường vì đó là một bất đẳng thức một biến, có thể chứng minh khá dễ dàng bằng đạo hàm. Tuy nhiên, đối với tôi, đây vẫn luôn là một bài toán đáng nhớ. Và tôi vẫn thường dùng nó để minh họa cho phương pháp hệ số bất định khi áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$.