Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\binom{p}{i} = \frac{p!}{p(p-i)!i!} &= \frac{(p-i+1)(p-i+2)...(p-1)}{i!}\\ &\equiv \frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{i} \equiv \frac{(-1)^{i-1}}{i} \pmod{p}\\ \Rightarrow S &\equiv 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{(-1)^{k-1}}{k} \pmod{p}\end{aligned}$$

Trường hợp 1: $p = 3h+1$ thì

$k = \left\lfloor \frac{2p}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2(3h+1)}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 2h + \frac{2}{3} \right\rfloor = 2h$

$\Rightarrow p-k-1 = h \Rightarrow p-h = k+1$

Khi đó

$$\begin{aligned}S &\equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{k}\right)\\ &\equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{h}\right) \pmod{p}\end{aligned}$$

Ta có $-\frac{1}{h} \equiv \frac{1}{p-h} \pmod{p}$ nên

$$S \equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+...\frac{1}{p-1} \pmod{p}$$

Trường hợp 2: $p = 3h+2$ thì

$$k = \left\lfloor \frac{2p}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2(3h+2)}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 2h+1+\frac{1}{3} \right\rfloor = 2h+1 \Rightarrow p-h = k+1$$

Khi đó

$$\begin{aligned}S &\equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{k-1}\right)\\ &\equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{h}\right) \pmod{p}\end{aligned}$$

Ta có $-\frac{1}{h} \equiv \frac{1}{p-h} \pmod{p}$ nên

$$S \equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+...\frac{1}{p-1} \pmod{p}$$

Lời giải.

Ta có :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\binom{4n}{2n-2k}\binom{k+n}{n}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{4n}{2n+2k}\binom{k+n}{k}\\ &\overset{A}{=} \left[t^{4n}\right]\frac{t^{2n}}{(1-t)^{2n+1}}\left[\frac{1}{(1-u)^{n+1}}\middle| u=\frac{t^2}{(1-t)^2}\right]\\ &= \left[t^{2n}\right]\frac{1}{(1-t)^{2n+1}}\left[\frac{1}{(1-u)^{n+1}}\middle| u=\frac{t^2}{(1-t)^2}\right]\\ &= \left[t^{2n}\right]\frac{1}{(1-t)^{2n+1}}\cdot\frac{(1-t)^{2n+2}}{(1-2t)^{n+1}}\\ &= \left[t^{2n}\right]\frac{1-t}{(1-2t)^{n+1}}\\ &= \left[t^{2n}\right]\frac{1}{(1-2t)^{n+1}} - \left[t^{2n-1}\right]\frac{1}{(1-2t)^{n+1}}\\ &= 2^{2n}\binom{n+1+2n-1}{2n} - 2^{2n-1}\binom{2n-1+n+1-1}{2n-1}\\ &= 4^n\binom{3n}{n} - 4^n\cdot\frac{1}{2}\binom{3n-1}{n}\\ &= 4^n\binom{3n}{n} - 4^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\binom{3n}{n} = 4^n\cdot\frac{2}{3}\binom{3n}{n}\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.20. *Cho bộ ba số nguyên (m,n,r) thỏa mãn $0 \le r \le n \le m-2$. Ký hiệu :*$P(m;\ n;\ r) = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{m+n-2(k+1)}{n}\binom{r}{k}$.

Chứng minh rằng:

$$\sum_{r=0}^{n} P(m;\ n;\ r) = \binom{m+n}{n}$$

△

Nhận xét. Bài Toán này là một trong những bài tác giả thích nhất, vì nó rất đúng với dụng ý về hàm sinh của tác giả khi viết chuyên đề. Rõ ràng các cách khác như, đếm 2 cách, quy nạp, ... gần như không hiệu quả khi ngoại hình bài toán quá cồng kềnh, rối rắm.

Lời giải.
Ta có:

$$\begin{aligned}
P(m;n;r) &= \sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{m+n-2(k+1)}{n}\binom{r}{k}\\
&\overset{A}{=}\left[t^{n+m-2}\right]\frac{t^n}{(1-t)^{n+1}}\left[(1-u)^r\,|\,u=t^2\right]\\
&=\left[t^{m-2}\right]\frac{\left(1-t^2\right)^r}{(1-t)^{n+1}}\\
\Rightarrow \sum_{r=0}^{n}P(m;n;r) &= \sum_{r=0}^{n}\left[t^{m-2}\right]\frac{\left(1-t^2\right)^r}{(1-t)^{n+1}}\\
&=\left[t^{m-2}\right]\frac{\sum\limits_{r=0}^{n}\left(1-t^2\right)^r}{(1-t)^{n+1}}\\
&=\left[t^{m-2}\right]\frac{\dfrac{1-\left(1-t^2\right)^{n+1}}{1-\left(1-t^2\right)}}{(1-t)^{n+1}}\\
&=\left[t^{m-2}\right]\frac{1-\left(1-t^2\right)^{n+1}}{t^2(1-t)^{n+1}}\\
&=\left[t^{m}\right]\frac{1-\left(1-t^2\right)^{n+1}}{(1-t)^{n+1}}\\
&=\left[t^{m}\right]\left(\frac{1}{(1-t)^{n+1}}-(1+t)^{n+1}\right)\\
&=\left[t^{m}\right]\frac{1}{(1-t)^{n+1}}\\
&=\binom{m+n+1-1}{m}=\binom{m+n}{m}
\end{aligned}$$

Lời giải.
Ta có 2 bổ đề:

$$\forall j=\overline{1,p-1}:\begin{cases}\dbinom{p}{j}\ \vdots\ p\\ \dbinom{p+j}{j}-1\ \vdots p\end{cases}$$

Và định lý Wolstenholme: $\binom{2p}{p}\equiv 2 \pmod{p^2}$ (đã chứng minh ở bài 5.1)

Áp dụng vào bài toán:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j}-2^p-1\\
&=1-1+\binom{2p}{p}+\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j}-(1+1)^p\\
&=\binom{2p}{p}-2+\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}\left(\binom{p+j}{j}-1\right)\ \vdots\ p^2
\end{aligned}$$

■

Ví dụ 5.13. *Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 và $k=\left[\dfrac{2p}{3}\right]$.*

Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{k}\binom{p}{i}\vdots p^2$$

△

Lời giải.
Dễ thấy $\binom{p}{i}\ \vdots\ p,\ \forall i=\overline{1,p-1}$

Để chứng minh $\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+...+\binom{p}{k}\vdots p^2$ ta chỉ cần chứng minh

$$S=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p}\binom{p}{i}\vdots p \tag{5.3}$$

và chia cho số $(p-1)!$ nguyên tố cùng nhau với p, ta biến đổi (5.1) dưới dạng

$$\frac{N\prod}{p!} \equiv \frac{N}{p} \pmod{p} \tag{5.2}$$

trong đó $\dfrac{N\prod}{p!}$ là số nguyên bằng $\dbinom{n}{p}$.

Vậy ta đã chứng minh xong điều kiện khẳng định đầu tiên của bài toán.

Nếu số $\dfrac{N}{p} = \left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor$ chia hết cho p^s thì (5.1),(5.2) vẫn đúng theo module p^{s+1}.

Suy ra $\dfrac{N\prod}{p} = \dbinom{n}{p} \vdots\, p^s$. Vậy khẳng định thứ hai được chứng minh. ■

Ví dụ 5.11 (Trường Đông toán học miền Nam 2012-2013). *Cho số nguyên tố p. Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i}\binom{p+i}{i} \equiv 2^p \pmod{p^2}$$

△

Lời giải.

$$\binom{p}{i} \equiv 0 \pmod{p}; \quad \binom{p+i}{i} \equiv 1 \pmod{p}\ \forall i = \overline{1, p-1}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \binom{p}{i}\left(\binom{p+i}{i} - 1\right) &\ \vdots\ p^2 \\ \Rightarrow \binom{p}{i}\binom{p+i}{i} &\equiv \binom{p}{i} \pmod{p^2} \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}\binom{p+i}{i} \equiv \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \equiv 2^p \pmod{p^2}$$

■

Ví dụ 5.12. *Cho $p \in \mathbb{P}$ và $p \neq 2$. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\binom{p+j}{j} \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}$$

△

Do $n+1 \le m-1 < m \Rightarrow [t^m](1+t)^{n+1} = 0$.
Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.21 (Hoàng Xuân Thanh). *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n+k}{2k} = (-1)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}$$

△

Nhận xét. Tất nhiên là so với những bài toán nêu ở trên, bài này chỉ là bài dễ. Tuy nhiên, dụng ý tác giả đưa ra bài này là một mục đích khác, tức là: Trong trình bày lời giải, đôi khi ta không muốn phải chứng minh lại các định lý A (4.2); B (4.3), khi đó, ta sẽ ngầm dùng chúng và sử dụng luôn kết quả hàm sinh tìm được để lời giải ngắn gọn. Và cũng là để làm "vừa ý" những người đọc vốn không quen với kiểu trình bày có các ẩn u.

Chẳng hạn với bài toán này: khi dùng định lý A (4.2), ta tìm ra được ngay hàm sinh cần tìm: $f(t) = \dfrac{1-t}{1+t^2}$, và hệ số cần xét là t^n.

Lời giải. Bây giờ, tuỳ theo số dư của n trong phép chia cho 4, ta có:

$$\begin{aligned} (-1)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} &= [t^n]\frac{1}{1+t^2} - [t^n]\frac{t}{1+t^2} \\ &= [t^n]\frac{1-t}{1+t^2} \\ &= [t^n]\frac{1}{1-t}\cdot\frac{(1-t)^2}{1+t^2} \\ &= [t^n]\frac{1}{1-t}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2t}{(1-t)^2}} \end{aligned}$$

(Biến đổi này thực ra cũng là từ định lý A (4.2))

$$= [t^n]\frac{1}{1-t}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2t)^k}{(1-t)^{2k}}\right) = [t^n]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2t)^k}{(1-t)^{2k+1}}$$
$$= [t^n]\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2t)^k}{(1-t)^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{n}(-2)^k\binom{n-k+2k+1-1}{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-2)^k\binom{n+k}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-2)^k\binom{n+k}{2k}$$ ■

Nhận xét. Ở đây đã dùng tới khai triển quen thuộc:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \binom{n-1}{0} + \binom{n}{1}x + ... + \binom{n+k-1}{k}x^k + ...$$

Ví dụ 4.22. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n-k}{k}\frac{4^{n-k}}{n-k} = \frac{2^{n+1}}{n}$$ △

Lời giải. Áp dụng đẳng thức: $\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}$

Ta có đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n-k}{k}\frac{4^{n-k}}{n-k} = \frac{2^{n+1}}{n}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right)4^{n-k} = 2^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n-k}{k}4^{n-k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n-k-1}{k-1}4^{n-k} = 2^{n+1}$$

Ta có theo định lí A (4.2) thì:

Lời giải (2). Ta có

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2(n-k)}{2n+1}\binom{n-k}{1} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\binom{2n+1}{2(n-k)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}k\binom{2n+1}{2k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2k(2n+1)!}{2(2k)!(2n-2k+1)!} = \frac{2n+1}{2}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}$$

Mặt khác $4^n = (1+1)^{2n} - (1-1)^{2n} = 2\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}$

Do đó

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n+1}{2(n-k)}\binom{n-k}{1} = \frac{2n+1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4^n = (2n+1)4^{n-1} \vdots 4^{n-1}$$

Vậy ta có đpcm. ■

Ví dụ 5.10 (USA MO). *Cho p là số nguyên tố chứng minh*

$$\binom{n}{p} \equiv \left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor \pmod p$$ △

Lời giải.
Xét n số liên tiếp $n, n-1, ..., n-p+1$. Chúng đồng dư theo module p với các số $1, 2, ..., p$.
Ngoài ra một trong chúng, chẳng hạn số N, chia hết cho p, từ đó $\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor = \frac{N}{p}$.
Xóa số N sẽ được bộ số đồng dư với hệ thặng dư khác $0, 1, 2, ..., p-1$ theo modulo p.
Giả sử $\prod$ là tích cách số còn lại sau khi loại số N:

$$\prod \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{N}$$

Thế thì $\prod \equiv (p-1)! \pmod p$. Nhân với $\frac{N}{p}$ được:

$$\frac{N\prod}{p} = \frac{(p-1)!N}{p} \pmod p \qquad (5.1)$$

Trường hợp 1: $m = 2^s$ Do $m \geq 4$ nên $s \geq 2$

$$\Rightarrow m^2 - 3m + 8 = 2^{2s} - 3.2^s + 8 = 3.2^{k+1-s}$$

Nếu $s \geq 4$ thì $2^{2s} - 3.2^s + 8 \equiv 8 \pmod{16}$
$\Rightarrow 8 \equiv 3.2^{k+1-s} \pmod{16} \Rightarrow 2^{k+1-s} = 8 \Rightarrow m^2 - 3m + 8 = 24$ (không có nghiệm nguyên)
Nếu $s = 2 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow n = 3$ (thỏa mãn)
Nếu $s = 3 \Rightarrow m = 8 \Rightarrow n = 7$ (thỏa mãn)
Trường hợp 2: $m = 3.2^s$ Làm tương tự như trên ta tìm được $n = 23$
Vậy $n = 3, n = 7, n = 23$ là những giá trị cần tìm. ■

Ví dụ 5.9. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ ta có*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n+1}{2(n-k)} \binom{n-k}{1} \vdots 4^{n-1}$$

△

Lời giải (1).

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n+1}{2(n-k)} \binom{n-k}{1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{2n+1}{2i} i$$

Sử dụng công thức: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Ta có:

$$2S = \sum_{i=1}^{n} 2i\binom{2n+1}{2i} = \sum_{i=1}^{n} (2n+1)\binom{2n}{2i-1} = (2n+1)\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}$$

Bây giờ đặt $A = \sum_{i=1}^{n}\binom{2n}{2i}$.
Xét hàm $f(x) = (1+x)^{2n}$, theo định lí RUF ta có:

$$A = \frac{1}{2}(f(1) + f(-1)) = \frac{1}{2}.2^{2n} = 4^n$$

Hay $S = (2n+1)\frac{A}{2} = (2n+1)4^{n-1} \vdots 4^{n-1}$. Suy ra đpcm. ■

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} 4^{n-k} &= 4^n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1/4)^k \binom{n-k}{k} \\
&= 4^n \left[t^n\right] \frac{1}{1-t} \left[\frac{1}{1+\frac{u}{4}} \middle| u = \frac{t^2}{1-t} \right] \\
&= 4^n \left[t^n\right] \frac{4}{(t-2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k-1} 4^{n-k} &= 4^n \left[t^{n-1}\right] \frac{1}{t} \left[\frac{1}{1+\frac{u}{4}} \middle| u = \frac{t^2}{1-t} \right] \\
&= 4^n \left[t^n\right] \frac{4(1-t)}{(t-2)^2}
\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} 4^{n-k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k-1} 4^{n-k} \\
&= 4^{n+1} \left[t^n\right] \frac{2-t}{(t-2)^2} \\
&= 4^{n+1} \left[t^n\right] \frac{1}{2-t} = \frac{4^{n+1}}{2} \left[t^n\right] \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = \frac{4^{n+1}}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = 2^{n+1}
\end{aligned}$$

Từ đây suy thẳng ra điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 4.23. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} \frac{6^k}{n-k} = \frac{3^n + (-2)^n}{n}$$

△

Lời giải.
Ta có :

$$nS = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} \frac{n}{n-k} 6^k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right) 6^k$$

Ta lại có:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} 6^k \overset{A}{=} [t^n] \frac{1}{1-t} \left[\frac{1}{1-6u} \middle| u = \frac{t^2}{1-t} \right] = [t^n] \frac{1}{1-t-6t^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k-1} 6^k \overset{A}{=} [t^{n-1}] \frac{1}{t} \left[\frac{1}{1-6u} \middle| u = \frac{t^2}{1-t} \right] = [t^n] \frac{1-t}{1-t-6t^2}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} nS &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} \frac{n}{n-k} \cdot 6^k \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right) 6^k \\ &= [t^n] \frac{2-t}{-6t^2-t+1} \\ &= [t^n] \frac{2-t}{(1-3t)(1+2t)} \\ &= [t^n] \left(\frac{1}{1-3t} + \frac{1}{1+2t} \right) \\ &= 3^n + (-2)^n \\ \Rightarrow S &= \frac{3^n + (-2)^n}{n} \end{aligned}$$

■

Lời giải.
Theo đẳng thức Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}$$

Dễ thấy rằng tổng này tương đương với

$$\sum_{i=a}^{b} \binom{n}{i} \binom{m}{p-i}$$

nên :

$$(m+n-p)!p! \sum_{i=a}^{b} \binom{n}{i} \binom{m}{p-i} = (m+n)!$$

$\forall a \geq 0$ thì $(m+n-a)! \big| (m+n)!$ và $(m+n-p)! \big| (m+n-b)!$.
Từ đó suy ra ngay đpcm. ■

Ví dụ 5.8 (China MO 1998). *Tìm số tự nhiên $n \geq 3$ sao cho*

$$2^{2000} \vdots 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

△

Lời giải.
Theo đề bài ta có:

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 2^k \ (0 \leq k \leq 2000, k \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6} = 2^k$$

$$\Leftrightarrow (n+1)(n^2-n+6) = 3.2^{k+1}$$

Đặt $m = n+1 \, (m \geq 4)$. Khi đó ta có

$$m(m^2-3m+8) = 3.2^{k+1}$$

Do đó chỉ có thể xảy ra 1 trong hai trường hợp sau:

Suy ra:

$$n\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^{m-1}n\binom{n-1}{m-1} = (-1)^{m-1}m\binom{n}{m} \vdots\ m \quad \blacksquare$$

Ví dụ 5.6. *Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện $\binom{2n}{n} = (2n)^k$, trong đó k là số các ước nguyên tố của $\binom{2n}{n}$.* △

Lời giải.
Giả sử p là một ước nguyên tố của $\binom{2n}{n}$. Gọi m là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của $\binom{2n}{n}$.
Ta sẽ chứng minh $p^m \le 2n$. Giả sử ngược lại, $p^m > 2n$.
Khi đó $\left\lfloor \frac{2n}{p^m} \right\rfloor = 0$.
Suy ra :

$$m = \left(\left\lfloor\frac{2n}{p}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\right) + \left(\left\lfloor\frac{2n}{p^2}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor\right) + \ldots + \left(\left\lfloor\frac{2n}{p^{m-1}}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{n}{p^{m-1}}\right\rfloor\right) \quad (*)$$

Với $x \in \mathbb{R}$ ta có $\lfloor 2x\rfloor + 2 > 2x \ge \lfloor 2x\rfloor \Rightarrow \lfloor 2x\rfloor - 2\lfloor x\rfloor \le 1$
Do đó từ $(*)$ suy ra $m \le m-1$ mâu thuẫn. Suy ra điều phải chứng minh.
Từ kết quả vừa chứng minh ở trên ta được:

$$\binom{2n}{n} = (2n)^k \Leftrightarrow k = 1 \text{ và } \binom{2n}{n} = 2n \Leftrightarrow n = 1 \quad \blacksquare$$

Ví dụ 5.7 (T7/245-THTT). *Cho $m, n, p \in \mathbb{N}$ thỏa mãn:*

$$p \le m+n \text{ và } a = \max\{0; p-m\};\ b = \min\{p; n\}$$

Chứng minh:

$$(m+n-b)!p!\sum_{i=a}^{b}\binom{n}{i}\binom{m}{p-i} \Big| (m+n-a)!$$

△

Ví dụ 4.24 (Hoàng Xuân Thanh). *Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\lfloor\frac{n+k}{2}\rfloor}{k} = \frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+2} + (-1)^{n+1}\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^{n+2}\right)$$

△

Lời giải.
Đây có lẽ nên là một bài Toán đẹp mà không quá khó. Ngoại hình của bài toán có thể khiến bạn hơi rối, nhưng trước tiên, theo thói quen, ta hãy làm một bước nhỏ để đưa mọi thứ trở lại quỹ đạo.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+2} + (-1)^{n+1}\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^{n+2}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+2} - (-1)^{n+2}\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^{n+2}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+2}\right) = F_{n+2}
\end{aligned}$$

Kể ra cũng gọn được một ít rồi, tuy chưa đáng kể, cái ta muốn khử là cái dấu phần nguyên, vốn hơi khó chịu trong tính toán. Số 2 ở mẫu số trong $\left\lfloor\frac{n+k}{2}\right\rfloor$ gợi ý cho ta cách xét số dư trong phép chia của n cho 2, nói cách khác là tính chẵn lẻ của n.
Một cách tự nhiên, sau khi xét tính chẵn lẻ của n, ta chia tổng ban đầu tiếp thành hai thành phần theo tính chẵn lẻ của k, và như vậy hiển nhiên sẽ phá hết được những dấu phần nguyên $\left\lfloor\frac{n+k}{2}\right\rfloor$. Một ý tưởng hết sức đẹp và đơn giản!
Bây giờ, ta xét thử $n = 2m+1$, trường hợp $n = 2m$ hoàn toàn tương

tự.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{\lfloor\frac{n+k}{2}\rfloor}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{\lfloor\frac{2m+1+k}{2}\rfloor}{k}\\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{\lfloor\frac{2m+1+2k}{2}\rfloor}{2k} + \sum_{k=0}^{m}\binom{\lfloor\frac{2m+1+2k+1}{2}\rfloor}{2k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m+k}{2k} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m+k+1}{2k+1}\\
&\overset{A}{=} [t^m]\frac{1}{1-t}\left[\frac{1}{1-u}\Big| u=\frac{t}{(1-t)^2}\right]\\
&\quad + [t^{m+1}]\frac{t}{(1-t)^2}\left[\frac{1}{1-u}\Big| u=\frac{t}{(1-t)^2}\right]\\
&= [t^m]\frac{1-t}{1-3t+t^2} + [t^m]\frac{1}{1-3t+t^2} \quad (*)\\
&= [t^m]\frac{2-t}{1-3t+t^2}\\
&= [t^m]\frac{2(1-t)}{1-3t+t^2} + [t^m]\frac{t}{1-3t+t^2}\\
&= 2F_{2m+1} + F_{2m}\\
&= F_{2m+1} + (F_{2m+1} + F_{2m})\\
&= F_{2m+1} + F_{2m+2}\\
&= F_{2m+3} = F_{(2m+1)+2} = F_{n+2}
\end{aligned}$$

Bước (*) là dạng quen thuộc của các hàm sinh liên quan dãy Fibonacci. Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. Một bài toán rất - rất đẹp! ■

4.6 Các bài toán không mẫu mực

Bài toán 4.5. *Chứng minh rằng* $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{0\le k\le i\le n}(i-k)\binom{n}{i}\binom{n}{k} = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}$$

△

Ví dụ 5.4 (Đề thi HSG tỉnh Đắk Lắk 2011-2012). *Cho m là số nguyên thỏa $0 < m < 2011$. Chứng minh rằng $\dfrac{(m+2010)!}{m!2011!}$ là một số nguyên.* △

Lời giải.
Để ý rằng

$$\binom{m+2010}{2010} = \frac{(m+2010)!}{m!2010!} = \frac{2011}{m+2011}\binom{m+2011}{2011}$$

Suy ra

$$(m+2011)\binom{m+2010}{2010} = 2011\binom{m+2011}{2011}$$

Tức là $2011 \mid (m+2011)\binom{m+2010}{2010}$

$\left(\text{do } \binom{m+2010}{2010}; \binom{m+2011}{2011} \in \mathbb{N}\right)$.
Vì 2011 là số nguyên tố và $0 < m < 2011$ nên ƯCLN$(m, 2011) = 1$, từ đó: ƯCLN$(m+2011, 2011) = 1$.
Vậy $2011 \Big| \binom{m+2010}{2010}$ hay $\dfrac{(m+2010)!}{m!2011!}$ là một số nguyên. ■

Ví dụ 5.5 (Hungari 2001). *Cho m, n là các số nguyên dương và $1 \le m \le n$.*
Chứng minh rằng

$$n\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^k\binom{n}{k} \,\vdots\, m$$

△

Lời giải.
Áp dụng hệ thức Pascal $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, ta có:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{0} - \sum_{k=0}^{m-2}(-1)^k\left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1}\right)\\
&= (-1)^{m-1}\binom{n-1}{m-1}
\end{aligned}$$

đồng dư với số $(p-1)!$ theo modulo p^2.
Lập luận tiếp được $\binom{2p}{p} = 2\binom{2p-1}{p-1} \equiv 2 \pmod{p^2}$. ■

Ví dụ 5.2. *Chứng minh rằng với n là các số nguyên dương lẻ thì tập*

$$S = \left\{ \binom{n}{1}; \binom{n}{2}; ...; \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \right\}$$

chứa lẻ các số lẻ. △

Lời giải.
Đặt

$$S_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$$

Khi đó

$$2S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} - 2 = 2^n - 2 \Rightarrow S_n = 2^{n-1} - 1 \text{ là số lẻ}$$

Vậy tập S phải chứa lẻ các số lẻ. ■

Ví dụ 5.3. *Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Tìm ƯCLN của các số*

$$\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, ..., \binom{2n}{2n-1}$$

△

Lời giải.
Ta có: $\binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + ... + \binom{2n}{2n-1} = 2^{2n-1}$
Suy ra ước chung của các số $\binom{2n}{1}, \binom{2n}{2}, ..., \binom{2n}{2n-1}$ có dạng 2^m.
Giả sử $n = 2^p q$, với q lẻ.
Ta có: $\binom{2n}{1} = 2^{p+1}q \Rightarrow$ ước chung đang xét sẽ $\leq 2^{p+1}$.
Ta cần chứng minh ước chung chính là 2^{p+1}.
Ta có: $\binom{2^{p+1}q}{m} = \frac{2^{p+1}q}{m}\binom{2^{p+1}q-1}{m-1} \Rightarrow 2^{p+1} \Big| \binom{2^{p+1}q}{m}$ ■

Lời giải.
Tham khảo lời giải tại địa chỉ

http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?/topic/82111-sum-0-le-k-le-i-le-n-lefti-kbinomnibinomnkright-dfracn2binom2nn/

(Bài viết số 2).
Ta có đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq k\leq i\leq n}(i-k)\binom{n}{i}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{k}\right]\\ &\quad\cdot\left[\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}+\cdots+\binom{n}{n}\right]\\ &= a_{n-1}\end{aligned}$$

Với một số nguyên dương n cho trước, xét dãy số $(b_k)_{k\geq 0}$ xác định như sau:

$$b_k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k}$$

Bây giờ xét khai triển chuỗi luỹ thừa hình thức của: $\mathcal{C}(x) = \frac{(1+x)^n}{1-x}$ với $|x| < 1$.
Ta có:

$$\mathcal{C}(x) = (1+x+x^2+\cdots)\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Bằng cách xem xét hệ số của x^k $(0 \leq k \leq n)$; ta có: $b_k = c_k$ $\forall 0 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad (\mathcal{C}(x))^2 = \frac{(1+x)^{2n}}{(1-x)^2} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)\\ \Rightarrow \quad \left[\binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}x+\cdots+\binom{2n}{2n}x^{2n}\right]\cdot(1+2x+3x^2+...)\\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)\end{aligned}$$

Bây giờ so sánh hệ số của x^{n-1} ở hai vế, ta có:

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n}{r}(n-r) &= c_0c_{n-1}+c_1c_{n-2}+\dots+c_{n-1}c_0\\ &= b_0b_{n-1}+b_1b_{n-2}+\dots+b_{n-1}b_0\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{k}\right]\\ &\quad\cdot\left[\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}+\cdots+\binom{n}{n}\right]\\ &= a_{n-1}\end{aligned}$$

Như vậy, công việc còn lại của ta là đi chứng minh đẳng thức sau:

$$\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n}{r}(n-r)=\frac{n}{2}\binom{2n}{n} \tag{4.1}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n}{r}(n-r) &= n\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n}{r}-\sum_{r=0}^{n-1}r\binom{2n}{r}\\ &= \frac{n}{2}\left[\sum_{r=0}^{2n}\binom{2n}{r}-\binom{2n}{n}\right]-\sum_{r=0}^{n-1}r\binom{2n}{r}\\ &= n.2^{2n-1}-\frac{n}{2}\cdot\binom{2n}{n}-\sum_{r=0}^{n-1}r\binom{2n}{r}\end{aligned}$$

Nên (5.1) tương đương với

$$n.2^{2n-1}=\sum_{r=0}^{n}r\binom{2n}{r} \tag{4.2}$$

- $\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\dots<\binom{n}{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1}=\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$
- $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$ (Hệ thức Vandermonde)

5.3 Các bài toán

Ví dụ 5.1 (Định lý Wolstenholme). *Cho p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng*

$$\binom{2p}{p}\equiv 2 \pmod{p^2}$$

△

Lời giải (1).
Theo hệ thức Vandermonde, ta có

$$\binom{2p}{p}=\binom{p}{0}\binom{p}{p}+\binom{p}{1}\binom{p}{p-1}+\dots+\binom{p}{p}\binom{p}{0}$$

Mà $\binom{p}{k}\ \vdots\ p\ ,\forall k=\overline{1,p-1}$. Do đó $\binom{p}{i}\binom{p}{p-1}\ \vdots\ p^2\ ,\forall i=\overline{1,p-1}$ ■

Lời giải (2).
Với $p=2$ điều khẳng định đúng vì $\binom{4}{2}-2=4$ chia hết cho $2^2=4$.
Xét số nguyên tố $p>2$, trước hết ta có đẳng thức

$$\binom{2p}{p}=2\binom{2p-1}{p-1}$$

Từ hệ thức $(2p-k)(p+k)\equiv k(p-k)\pmod{p^2}$ đúng với mọi $k=1,2,\dots,\frac{p-1}{2}$ (số $p-1$ chẵn), ta có tích

$$\begin{aligned}&(2p-1)(2p-2)\dots(p+1)\\ &=[(2p-1)(p+1)][(2p-2)(p+2)]\dots\left[\left(2p-\frac{p-1}{2}\right)\left(p+\frac{p-1}{2}\right)\right]\\ &\equiv[1.(p-1)]\,[2.(p-2)]\dots\left(\frac{p+1}{2}\cdot\frac{p+2}{2}\right)\pmod{p^2}\end{aligned}$$

Mà $\binom{p}{k}$ nguyên liên tiếp nên $(p-1)(p-2)...(p-k+1) \vdots k!$

Hay $\dfrac{(p-1)(p-2)...(p-k+1)}{k!} = a \in \mathbb{Z}$

Vậy ta có điều cần chứng minh. ■

ĐỊNH LÝ 5.2 (ĐỊNH LÝ TƯƠNG ỨNG CỦA LUCAS.)–
Cho p là một số nguyên tố và n là một số nguyên dương với $n = (\overline{n_m n_{m-1}...n_0})_p$.
Giả sử i là một số nguyên dương nhỏ hơn n, viết $i = i_0 + i_1 p + \cdots i_m p^m$, ở đó $0 \le i_0, ..., i_m \le p-1$.
Khi đó

$$\binom{n}{i} \equiv \prod_{j=0}^{m} \binom{n_j}{i_j} \pmod{p}$$

□

ĐỊNH LÝ 5.3 (ĐỊNH LÍ RUF)–
Cho số nguyên dương n, Gọi ε là nghiệm phức khác 1 bất kì của phương trình $x^n = 1$.
Xét hàm đa thức:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.x^i$$

thì $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_{in} = \frac{1}{n}\left(f(1) + f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2) + ... + f(\varepsilon^{n-1})\right)$
Khi sử dụng định lí này nên chú ý từ định nghĩa ε thì ta có:

$$1 + \varepsilon + ... + \varepsilon^{n-1} = 0$$

□

5.2 Một số hệ thức cơ bản

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (Đối xứng)
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (Hệ thức Pascal)

Bây giờ với $r = 1; 2; ...; n$, ta có:

$$r\binom{2n}{r} = \frac{r \cdot (2n)!}{r! \cdot (2n-r)!} = \frac{(2n)!}{(r-1)! \cdot (2n-r)!}$$
$$= \frac{2n \cdot (2n-1)!}{(r-1)! \cdot (2n-r)!} = 2n\binom{2n-1}{r-1}$$

Suy ra

$$\sum_{r=0}^{n} r\binom{2n}{r} = 2n\sum_{r=1}^{n}\binom{2n-1}{r-1} = 2n\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n-1}{r}$$
$$= 2n \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{r=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{r} = n.2^{2n-1}$$

Từ đây suy ra (5.2) đúng; suy ra (5.1) đúng.
Do đó đẳng thức ban đầu được chứng minh hoàn toàn. ■

Nhận xét. Đây là một trong những bài Toán khó nhất trong tài liệu này. Bước biến đổi đầu tiên là tương đối khó để xây dựng. Hàm sinh đưa ra cũng không phải là hàm sinh tương ứng với cả 1 dãy số cần xét, mà nó chỉ là hàm sinh tương ứng với những số hạng đầu tiên của dãy mà thôi. Ngoài ra, bài này còn đòi hỏi các kỹ năng biến đổi thành thạo với tổ hợp chập (ở phần 3-4).
Nhìn chung; đây là 1 bài toán hay - khó - ngoạn mục!
Điều dễ dàng bù lại là kỹ năng xét $(\mathcal{C}(x))^2$ tương đối quen thuộc.
Suy ngẫm về bài toán này ta thấy, có mối liên hệ mật thiết với định lý tổng từng phần
(Định lý P): $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k = [t^n]\,\frac{f(t)}{1-t}$
Như vậy, dù là một bài toán không mẫu mực nhưng lời giải trên cũng có những cơ sở nhất định, chứ không hẳn là cảm tính và kỹ năng.

Bài toán 4.6. *Chứng minh rằng*

$$(x+m+1)\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{x+y+j}{m-j}\binom{y+2j}{j}-\sum_{j=0}^{m}\binom{x+j}{m-j}(-4)^j$$
$$=(x-m)\binom{x}{m} \qquad \triangle$$

Lời giải.

Chú ý: Hàm sinh tương ứng của dãy $(-1)^j\binom{y+2j}{j}$ $(j\in\mathbb{N})$ là:

$$\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\left(\frac{1-\sqrt{1+4t}}{2(-t)}\right)^y=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\left(\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2t}\right)^y$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
&(x+m+1)\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{x+y+j}{m-j}\binom{y+2j}{j}\\
&\overset{B}{=}(x+m+1)\left[t^m\right](1+t)^{x+y}\left[\frac{1}{\sqrt{1+4u}}\left(\frac{\sqrt{1+4u}-1}{2u}\right)^y\middle|\, u=t(1+t)\right]\\
&=(x+m+1)\left[t^m\right](1+t)^{x+y}\frac{1}{1+2t}\cdot\frac{(2t)^y}{2^yt^y(1+t)^y}\\
&=(x+m+1)\left[t^m\right](1+t)^x\frac{1}{1+2t}\\
&=(x+m+1)\left[t^m\right]\frac{(1+t)^x}{1+2t}
\end{aligned}$$

Ta cũng có:
$$\sum_{j=0}^{m}\binom{x+j}{m-j}(-4)^j\overset{B}{=}\left[t^m\right](1+t)^x\left[\frac{1}{1+4u}\middle|\, u=t(1+t)\right]=\left[t^m\right]\frac{(1+t)^x}{(1+2t)^2}$$

Chương

5

Ứng dụng đẳng thức tổ hợp vào Số học

5.1 Định lý 125
5.2 Một số hệ thức cơ bản 126
5.3 Các bài toán 127
5.4 Bài tập 148

Trần Trung Kiên (Ispectorgadget)
Lê Kim Nhã (gogo123)

Tóm tắt nội dung

Trong phần này, chúng tôi giới thiệu một số định lý và các bài toán Số học sử dụng Tổ hợp và ĐTTH. Để giải được chúng, các bạn phải biết kết hợp các phương pháp, kỹ thuật với nhau.

5.1 Định lý

ĐỊNH LÝ 5.1–

Cho p là số nguyên tố. Khi đó $\binom{p}{k}\,\vdots\, p$ với mọi $p=1,2,...,p-1$ □

Chứng minh.
$\binom{p}{k}=\frac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}$ Do p nguyên tố và $k\in\{1,2,...,p-1\}$ nên $(p,k!)=1$

Từ đó suy ra:

$$
\begin{aligned}
(x+m+1)\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{x+y+j}{m-j}\binom{y+2j}{j}-\sum_{j=0}^{m}\binom{x+j}{m-j}(-4)^j\\
&= (x+m+1)\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}-[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{(1+2t)^2}\\
&= (x+1)\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}+m\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}-[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{(1+2t)^2}
\end{aligned}
$$

(Mẫu số $(1+2t)^2$ chính là mấu chốt gợi cho ta liên tưởng đến việc xét đạo hàm)

$$
\begin{aligned}
&(x+1)\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}+m\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}-[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{(1+2t)^2}\\
&= (x+1)\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}+[t^{m-1}]\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{(1+t)^x}{1+2t}\right)-[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{(1+2t)^2}\\
&= (x+1)\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}+[t^{m-1}]\left(\frac{x(1+t)^{x-1}(1+2t)-2(1+t)^x}{(1+2t)^2}\right)\\
&\qquad -[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{(1+2t)^2}\\
&= (x+1)\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}+x\,[t^m]\,\frac{t(1+t)^{x-1}}{1+2t}-[t^m]\,\frac{2t(1+t)^x}{(1+2t)^2}\\
&\qquad -[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{(1+2t)^2}\\
&= (x+1)\,[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}+x\,[t^m]\,\frac{t(1+t)^{x-1}}{1+2t}-[t^m]\,\frac{(1+t)^x}{1+2t}\\
&= [t^m]\,\frac{(1+t)^{x-1}\left((x+1)(1+t)+xt-(1+t)\right)}{1+2t}\\
&= [t^m]\,\frac{(1+t)^{x-1}(1+2t)x}{1+2t}\\
&= [t^m]\,x(1+t)^{x-1}=x\binom{x-1}{m}\\
&= (x-m)\binom{x}{m} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Nhận xét. Đây là bài toán khó nhất trong chuyên đề này!
Bài toán này được đưa vào mục các bài toán không mẫu mực vì phép biến đổi trong bài này là tương đối lạ và ít gặp, hàm sinh đưa ra cũng không quá quen thuộc, dù sao thì phép biến đổi $m\left[t^m\right]\dfrac{(1+t)^x}{1+2t} = \left[t^{m-1}\right]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{(1+t)^x}{1+2t}\right)$ cũng là phép biển đổi đẹp và nên nhớ!

Bài toán 4.7. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, ta có:*

$$\sum_{k\geq 0}\binom{2n}{k}F_{2k+1} = 5^n F_{2n+1}$$

△

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0}\binom{2n}{k}F_{2k+1} &\overset{A}{=} \left[t^{2n}\right]\frac{1}{1-t}\left[\frac{1-u}{1-3u+u^2}\,\middle|\, u=\frac{t}{1-t}\right]\\
&= \left[t^{2n}\right]\frac{1}{1-t}\cdot\frac{1-\frac{t}{1-t}}{1-3\frac{t}{1-t}+\left(\frac{t}{1-t}\right)^2}\\
&= \left[t^{2n}\right]\frac{1}{1-t}\cdot\frac{(1-t)^2-t(1-t)}{(1-t)^2-3t(1-t)+t^2}\\
&= \left[t^{2n}\right]\frac{1-2t}{5t^2-5t+1}\\
&= 5^n\left[t^{2n}\right]\frac{1-\frac{2\sqrt{5}t}{5}}{t^2-\sqrt{5}t+1}
\end{aligned}$$

Tức là ta cần chứng minh $\left[t^{2n}\right]\dfrac{1-\frac{2\sqrt{5}t}{5}}{t^2-\sqrt{5}t+1} = F_{2n+1}$

Lời kết

Chỉ bằng vài chục trang thì đương nhiên không thể truyền tải hết những gì người viết chuyên đề muốn gửi gắm. Tuy nhiên, tác giả đã cố gắng để có thể có một chuyên đề cô đọng - dễ hiểu và dễ áp dụng. Xin được điểm lại một vài ý lớn trong chuyên đề:

- Luyện tập để sử dụng thành thạo những dạng khai triển hàm sinh cơ bản.
- Giới thiệu một vài kiểu khai triển hàm sinh tương đối khó.
- Giới thiệu những định lý có ứng dụng nhiều trong tính tổng dùng hàm sinh.
- Các bài tập không mẫu mực có nhiều ứng dụng.

Vẫn còn nhiều điều khác trong tính tổng dùng hàm sinh mà tác giả chưa thể mang đến: các tổng có liên quan đến số nghịch đảo (harmonic number), tổng lượng giác, dạng hàm sinh của số phức... Cũng như là những cách tiếp cận để tìm ra cụ thể hàm tương ứng với dãy ví dụ như phương pháp sử dụng hàm siêu hình (hypergeometric function); phương pháp sử dụng định lý nghịch đảo Lagrange (Lagrange's Inversion Theorem)... Tác giả rất tiếc nhưng chưa thể nói ra được do những giới hạn về thời gian và kiến thức.

Hi vọng là có thể gặp được các bạn trong một chuyên đề khác, có thể là 1 ấn phẩm khác của VMF, tác giả có thể có dịp để chia sẻ và thảo luận nhiều hơn về những vấn đề này. Còn hiện tại, nếu thật sự quan tâm, các bạn có thể tìm hiểu thông qua các từ khoá tiếng Anh mà tác giả cung cấp, hoặc trao đổi thêm thông qua địa chỉ mail: loc_lhp@yahoo.com

Tạm biệt và cảm ơn các bạn vì đã theo dõi chuyên đề. Chúc các bạn học tốt.

BÀI 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$\sum (-1)^{j_1+j_2+...+j_n+1} \frac{(j_1+j_2+...+j_n-1)!}{j_1!j_2!...j_n!} = \frac{1}{n}$$

Trong đó tổng trên được lấy trên tất cả các bộ số nguyên không âm $(j_1; j_2; ...; j_n)$ thoả mãn $j_1 + 2j_2 + ... + nj_n = n$

Ta có:

$$\begin{aligned}
\left[t^{2n}\right] \frac{1-\frac{2\sqrt{5}t}{5}}{t^2-\sqrt{5}t+1} &= \left[t^{2n}\right] \frac{1-\frac{2\sqrt{5}t}{5}}{\left(t-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} \\
&= \left[t^{2n}\right] \frac{1-\frac{2\sqrt{5}t}{5}}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-t\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-t\right)} \\
&= \left[t^{2n}\right] \frac{1-\frac{2\sqrt{5}t}{5}}{\left(1+t\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(1+t\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)} \\
&= \left[t^{2n}\right] \frac{1}{\left(1+t\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(1+t\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)} \\
&\qquad - \frac{2\sqrt{5}}{5}\left[t^{2n-1}\right] \frac{1}{\left(1+t\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(1+t\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$\left(\text{Tới đây ta dùng đến công thức } \left[t^n\right] \frac{1}{(1+rt)(1+st)} = \frac{r^{n+1}-s^{n+1}}{r-s}(-1)^n\right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n+1}}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)}(-1)^{2n} \\
&\qquad - \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n}}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)}(-1)^{2n-1} \\
&= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n+1} \\
&\qquad + \frac{2\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2n}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right)$$
$$= F_{2n+1}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét.

Hãy để ý kỹ cách xử lý $\left[t^{2n}\right]\frac{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{t^2-\sqrt{5}t+1}$, vì cách xử lý này cũng là cách làm tổng quát với dạng phân thức có mẫu thức là hàm bậc 2 có nghiệm thực.

Trong topic http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?/topic/68310-sum-kge-0-binom2nk-f-2k1-5n-f-2n1/ nickname hxthanh có đưa ra một lời giải khá ngắn gọn dựa trên nhị thức Newton và tính toán Đại Số thuần tuý. Tuy nhiên, theo quan điểm của người viết, lời giải trên tuy "cồng kềnh" nhưng lại có nhiều cái để học tập hơn.
Dựa trên tư tưởng lời giải trên, các bạn hãy giải bài tương tự:
Với mọi số nguyên dương n. Chứng minh:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k = F_{2n}$$

Tuy nhiên, cách này sẽ không thể dùng để giải bài sau: Với mọi số nguyên dương n. Chứng minh:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}2^k\binom{n}{k}F_{2k} = F_{3n}$$

Các bạn hãy tự tìm cho mình cách giải thích tại sao như vậy. Đồng thời giải nó bằng cách của hxthanh xem sao? Đây có thể xem là một dịp để đối chiếu các cách giải khác nhau.

Bài toán 4.8. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n,ta có :*

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}3^k\binom{3n}{k}\binom{3n-k-2}{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{3n}{k}(n-k)\,2^k$$ △

Lời giải.
Ta có:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{k}\binom{y+n-k}{n-k} \overset{conv}{=} [t^n]\frac{1}{(1-t)^{x+1}}\cdot\frac{1}{(1-t)^{y+1}}$$
$$= [t^n]\frac{1}{(1-t)^{x+y+2}}$$
$$= \binom{x+y+2+n-1}{n} = \binom{x+y+n+1}{n}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. ■

4.7 Bài tập tự luyện

BÀI 1. Chứng minh rằng với các số nguyên dương m, n thoả mãn: $1 \le m \le n-1$ thì ta luôn có đẳng thức :

$$\binom{2n-m-1}{2n-2m-1}-\binom{n-1}{m} = \sum_{k}\sum_{j}\binom{k+j}{k}\binom{2n-m-2k-j-3}{2\,(n-m-k-1)}$$

BÀI 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có :

$$\sum_{0\le k\le \frac{n}{3}} 2^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{2k} = 2^{n-1}+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

BÀI 3. Cho trước 2 số nguyên dương $n; r$ với $r < n$. Chứng minh rằng nếu có các bộ số nguyên không âm $(k_1; k_2; ...; k_n)$ thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n}k_i = r\sum_{i=1}^{n}ik_i = n$$

thì ta luôn có

$$\sum\frac{1}{k_1!\,k_2!......k_n!} = \frac{1}{r!}\binom{n-1}{r-1}$$

Xét hệ số của x^s cả 2 vế, ta có:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{s}\binom{r+i}{i}\binom{q+s-i}{s-i} &= \binom{r+q+s+1}{s}\\
\Rightarrow \frac{s!q!r!}{t!}\sum_{i=0}^{s}\binom{r+i}{i}\binom{q+s-i}{q} &= \frac{s!q!r!}{t!}\binom{r+q+s+1}{s}\\
&= \frac{s!(t-s-r)!r!}{t!}\binom{t+1}{s}\\
&= \frac{s!\,(t-s-r)!r!}{t!}\frac{(t+1)!}{(t+1-s)!s!}\\
&= \frac{(t-s-r)!r!\,(t+1)}{(t+1-s)!}\\
&= \frac{t+1}{(t+1-s)\binom{t-s}{r}}
\end{aligned}$$

Nên từ đây suy ra điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Với cách dùng hàm sinh như trên, các bạn hãy thử luyện tập bằng cách giải bài toán đơn giản sau:
Chứng minh rằng với các số nguyên $0 \le s \le k \le n$, ta có :

$$\sum_{t=0}^{n}\binom{t}{s}\binom{n-t}{k-s} = \binom{n+1}{k+1}$$

Gợi ý: Sử dụng định lý: $G\left(\binom{p+k}{m}\right) = \dfrac{t^{m-p}}{(1-t)^{m+1}}$

Bài toán 4.10. *Chứng minh rằng:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{k}\binom{y+n-k}{n-k}$$

△

Lời giải.
Tham khảo lời giải (bằng tiếng Anh) tại địa chỉ:

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=41&t=491174

(Bài viết số 3).
Ta có tính chất sau: (Định lý Convolution (4.1))

$$[t^n]\left(f(t)g(t)\right) = \sum_{k=0}^{n}\left[t^k\right]f(t)\cdot\left[t^{n-k}\right]g(t) \tag{4.3}$$

Ta thấy:

- $n-k$ là hệ số của x^{n-k} trong khai triển $\dfrac{x}{(1-x)^2}$.
- $2^k\binom{3n}{k}$ là hệ số của x^k trong khai triển $(1+2x)^{3n}$.

Do đó theo (4.3), ta có:

$$\begin{aligned}
[x^n]\frac{(1+2x)^{3n}x}{(1-x)^2} &= [x^n]\left(\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}(2x)^k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}kx^k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{3n}{k}2^k(n-k)
\end{aligned}$$

Mặt khác để tính hệ số của x^n trong khai triển hàm $f(x) = \dfrac{(1+2x)^{3n}.x}{(1-x)^2}$

theo cách khác (theo hướng có số 3^k) ở vế trái, ta có :

$$\begin{aligned}
[x^n]\frac{(1+2x)^{3n}x}{(1-x)^2} &= [x^n]\frac{((1-x)+3x)^{3n}x}{(1-x)^2} \\
&= [x^n]\frac{\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}3^k x^{k+1}\cdot(1-x)^{3n-k}}{(1-x)^2} \\
&= [x^n]\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}3^k x^{k+1}\cdot(1-x)^{3n-k-2} \\
&= [x^n]\sum_{k=0}^{n-1}\binom{3n}{k}3^k x^{k+1}\cdot(1-x)^{3n-k-2} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}3^k\binom{3n}{k}\binom{3n-k-2}{n-1-k}
\end{aligned}$$

Vậy ta có kết quả cuối cùng:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}3^k\binom{3n}{k}\binom{3n-k-2}{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{3n}{k}(n-k)2^k$$ ■

Bài toán 4.9. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên không âm r, s, t thỏa mãn $t \geq r+s$, ta có :*

$$\frac{\binom{s}{0}}{\binom{t}{r}} + \frac{\binom{s}{1}}{\binom{t}{r+1}} + \dots + \frac{\binom{s}{s}}{\binom{t}{r+s}} = \frac{t+1}{(t+1-s)\binom{t-s}{r}}$$ △

Lời giải.
Đặt $q = t-r-s$. Rõ ràng q là số nguyên không âm.

Với $i = 0, ..., s$, ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{s}{i}}{\binom{t}{r+i}} &= \frac{s!}{i!\,(s-i)!}\cdot\frac{(r+i)!\,(t-r-i)!}{t!} \\
&= \frac{s!}{i!\,(s-i)!}\cdot\frac{(r+i)!\,(q+s-i)!}{t!} \\
&= \frac{s!q!r!}{t!}\cdot\frac{(r+i)!}{r!i!}\cdot\frac{(q+s-i)!}{(s-i)!q!} \\
&= \frac{s!q!r!}{t!}\binom{r+i}{i}\binom{q+s-i}{s-i} \\
&= \frac{s!q!r!}{t!}\binom{r+i}{r}\binom{q+s-i}{q}
\end{aligned}$$

Suy ra :

$$\frac{\binom{s}{0}}{\binom{t}{r}} + \frac{\binom{s}{1}}{\binom{t}{r+1}} + \dots + \frac{\binom{s}{s}}{\binom{t}{r+s}} = \frac{s!q!r!}{t!}\sum_{i=0}^{s}\binom{r+i}{r}\binom{q+s-i}{q}$$

Xét khai triển hàm sinh dựa trên chuỗi luỹ thừa hình thức:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^{r+q+2}} &= \frac{1}{(1-x)^{r+1}}\frac{1}{(1-x)^{q+1}} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{r+i}{i}x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{q+i}{i}x^i\right) \\
\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty}\binom{r+q+1+i}{i}x^i &= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{r+i}{i}x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{q+i}{i}x^i\right)
\end{aligned}$$