Tóm lại ta luôn có $S \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1} \pmod p$

Theo định lí Wolstenholme ta có

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod p \Rightarrow S \equiv 0 \pmod p$$

$$\Rightarrow S \ \vdots \ p$$

■

Ví dụ 5.14. *Cho các số nguyên không âm $i; j; n$ thoả mãn : $i + j \leq n$. Chứng minh rằng:*

$$2^{n-i-j} \,\Big|\, \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}\binom{p}{i}\binom{p}{j}$$

△

Lời giải.

Không mất tính tổng quát giả sử $i \geq j$.

Ta có: $\binom{n}{p}\binom{p}{i}\binom{p}{j} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-p}\binom{p}{j}$

Đặt $A_j = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-p}\binom{p}{j}$

Xét biểu thức

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{j=0}^{n} A_j x^j \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-p}\binom{p}{j} x^j \\ &= \binom{n}{i}\sum_{p=0}^{n}\binom{n-i}{n-p}\sum_{j=0}^{n}\binom{p}{j} x^j \\ &= \binom{n}{i}\sum_{p=0}^{n}\binom{n-i}{n-p}(1+x)^p \end{aligned}$$

$$= \binom{n}{i}(1+x)^n \sum_{p=0}^{n} \binom{n-i}{n-p} \frac{1}{(1+x)^{n-p}}$$
$$= \binom{n}{i}(1+x)^n \left(1+\frac{1}{1+x}\right)^{n-i}$$
$$= \binom{n}{i}(1+x)^i(2+x)^{n-i}$$

Vậy $F(x) = \binom{n}{i}(1+x)^i(2+x)^{n-i}$ và A_j là hệ số của x^j trong khai triển của $F(x)$.
Dễ thấy là hệ số của các đơn thức của x có bậc bé hơn j trong khai triển $(2+x)^{n-i}$ đều chia hết cho 2^{n-i-j}
Do đó $2^{n-i-j}|A_j$. Đây là đpcm. ■

Ví dụ 5.15 (Australia MO). *Tìm giá trị k tự nhiên nhỏ nhất sao cho số*

$$\forall n \geq m : \frac{k}{m+n+1}\binom{2n}{n+m} \in \mathbb{N}$$

△

Lời giải.
Trước hết ta chứng minh $\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m} \in \mathbb{Z}$

Ta có:

$$\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m} = \left(1-\frac{m}{m+1}\right)\binom{2m}{m} = \binom{2m}{m} - \frac{(2m)!}{(m-1)!(m+1)!}$$
$$= \binom{2m}{m} - \frac{(2m)!}{(m-1)!(m+1)!} = \binom{2m}{m} - \binom{2m}{m-1} \in \mathbb{Z}$$

Giả sử cho trước số $m \in \mathbb{N}$. Vì với $n = m$, số $\frac{k}{m+n+1}\binom{2n}{n+m} = \frac{k}{2m+1}$ phải là số tự nhiên nên giá trị phải tìm $k \in \mathbb{N}$ phải chia hết cho $2m+1$, vì thế $k \geq 2m+1$.

Tài liệu tham khảo

[1] http://diendantoanhoc.net/forum/

[2] http://www.artofproblemsolving.com/

[3] http://www.math.net.vn

[4] http://forum.mathscope.org/

[5] 102 Combinatorial Problems, Titu Andreescu, Zuming Feng

BÀI 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ chúng ta có:

$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

BÀI 3. (IMO 1989) Cho n, k là các số nguyên dương và S là tập hợp gồm n điểm trên mặt phẳng thỏa mãn:
(1) Không có ba điểm nào thuộc tập S thẳng hàng.
(2) Với mỗi điểm P thuộc tập S thì có ít nhất k điểm thuộc S cách đều với điểm P.
Chứng minh rằng: $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$

BÀI 4. (IMC 2002) Trong một cuộc thi toán học có 200 sinh viên tham dự. Họ được đề nghị giải 6 bài toán và mỗi bài toán được giải đúng bởi ít nhất 120 sinh viên . Chứng minh rằng luôn có hai sinh viên mà với mỗi bài toán thì ít nhất một trong hai thí sinh này giải đúng bài toán đó.

BÀI 5. Chứng minh rằng: $\sum \frac{k!}{k_1!k_2!...k_n!} = n^k$, trong đó bộ $(k_1, k_2, ..., k_n)$ thỏa mãn $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$.

BÀI 6. Cho $m; n$ là những số nguyên không âm . Chứng minh rằng :

$$\mathcal{E}(m;n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{m-k}{m-k-n} = 1$$

Với $m \geq 2n$

Giả sử $k = 2m+1$, thế thì với $n = m$, số dương $\frac{k}{n+m+1}\binom{n+m}{2n}$ là số tự nhiên và với $n > m$ nó bằng

$$\begin{aligned}\frac{2m+1}{n+m+1}\binom{2n}{n+m} &= \left(1 - \frac{n-m}{n+m+1}\right)\binom{2n}{n+m}\\ &= \binom{2n}{n+m} - \frac{(2n)!}{(n+m+1)!(n-m-1)!}\\ &= \binom{2}{n+m} - \binom{2n}{n+m+1} \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Vậy giá trị k nhỏ nhất bằng $2m+1$. ■

Ví dụ 5.16 (T8/419-THTT). *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương n, k thỏa mãn điều kiện*

$$\binom{3n}{n} = 3^n.n^k$$

△

Lời giải.
Ta có:

$$\begin{aligned}\binom{3n}{n} &= 3^n.n^k\\ \Leftrightarrow \frac{(3n)!}{n!(2n)!} &= 3^n.n^k\\ \Leftrightarrow \frac{(3n-2)!(3n-1).3n}{2n^2(n-1)!(2n-1)!} &= 3^n.n^k\\ \Leftrightarrow \frac{(3n-2)!}{(n-1)!(2n-1)!} &= \frac{2.3^{n-1}n^{k+1}}{3n-1}\end{aligned}$$

Vì

$$\frac{(3n-2)!}{(n-1)!(2n-1)!} = \binom{3n-2}{n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2.3^{n-1}.n^{k+1} \,\vdots\, 3n-1 \qquad (5.4)$$

Lại có $(3, 3n-1) = 1$ và $(n, 3n-1) = 1$ nên từ (5.4) suy ra

$$2 \,\vdots\, 3n-1 \Rightarrow 3n-1 \leq 2 \Rightarrow n \leq 1$$

Do đó $n = 1$. Ta được $\binom{3n}{n} = 3^n.n^k \Leftrightarrow \binom{3}{1} = 3.1^k$
Đẳng thức này thỏa mãn với mọi số k nguyên dương.
Vậy cặp số (n, k) cần tìm là $(1, k)$ với k là số nguyên dương bất kì. ■

Nhận xét. Có thể giải bài toán này bằng cách khác như sau:
Với $n = 1$, ta có kết quả như trên; với $n \geq 2$, bằng quy nạp ta chứng minh rằng $\binom{3n}{n} \not\vdots\ 3^n$ nên bài toán không thỏa mãn.

Ví dụ 5.17 (IMO 1974). *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k} \not\vdots\ 5$$

△

Lời giải (1).
Ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} 2^{3(n-k)}$$

Mặt khác vì 16 chia 5 dư 1 nên ta có:

$$2^{3(n-i)} \equiv \frac{1}{2^{n-i}} = \frac{2^i}{2^n} \pmod 5$$

Suy ra $2^n.\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}.2^{3k} \equiv S_{2n+1} \pmod 5$
với $S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} 2^i$
Do vậy, giờ ta sẽ đi tính $S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} 2^i$
Xét hàm sinh $f(x) = (1 + x\sqrt{2})^{2n+1} = \sum_{i=0}^{2n+1} \binom{i}{2n+1} 2^i$,theo định lí RUF thì:

$$S_{2n+1} = \frac{1}{2}(f(1) + f(-1)) = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^{2n+1} + (1-\sqrt{2})^{2n+1}\right)$$

Để ý rằng $0 = (1-1)^r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} = 1 - \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} \binom{r}{i}$.

Vậy chúng ta có $\sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} \binom{r}{i} = 1$, tức là x được đếm 1 lần ở vế phải.

Vậy nguyên lí bù trừ được chứng minh. ■

Nhận xét.
Qua một số bài toán và ví dụ ở trên các bạn có thể thấy, phương pháp đếm bằng hai cách được diễn tả bằng ngôn ngữ hoàn toàn dễ hiểu. Bằng cách đó chúng ta có thể áp dụng giải được nhanh gọn một số bài toán mà các phương pháp khác tỏ ra kém hữu hiệu và phức tạp hơn.

Bên cạnh ưu điểm trên thì phương pháp đếm bằng hai cách cũng có nhiều nhược điểm và tương đối yếu đối với các bài toán phức tạp (như tổng đan dấu, tổng chứa phân thức). Vấn đề quan trọng trong việc sử dụng phương pháp này đó là ta phải phân tích được đề bài dưới dạng một bài toán đếm! Điều này cần tới sự quan sát và khả năng nhạy bén của mỗi người. Tuy nhiên còn một số cách nhận biết dấu hiệu và chuyển đổi hệ thống cho phương pháp này, song do thời gian gấp rút nên tác giả chưa có điều kiện giới thiệu đến bạn đọc trong chuyên đề này.
Hẹn gặp lại các bạn vào một dịp khác!

Sau cùng, mời các bạn cùng luyện tập với một số bài toán sau:

6.5 Bài tập

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq k \geq 1$ chúng ta có:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$$

Từ đó chúng ta có:

$$\frac{b}{h} = \frac{\binom{c}{2}}{\binom{k}{2}} = \frac{c(c-1)}{k(k-1)}$$

■

Ví dụ 6.17 (Nguyên lí bù trừ). *Cho $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập bất kì. Khi đó chúng ta có:*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + ...$$
$$+ (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<...<i_k\le n} |A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}| + ...$$

△

Lời giải.
Xét một phần tử x bất kỳ.

- Nếu x không thuộc $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ thì x không được đếm lần nào ở vế trái, cũng không được đếm lần nào ở vế phải.
- Nếu x thuộc $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ thì x được đếm một lần ở vế trái. Ta chứng minh x cũng được đếm một lần ở vế phải. Như thế, một phần tử x bất kỳ được đếm như nhau ở cả hai vế, do đó hai vế bằng nhau.
  Thật vậy, vì x thuộc $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ nên x thuộc vào một số tập con A_i. Giả sử x thuộc r tập con. Khi đó x sẽ được đếm r lần ở tổng thứ nhất ở vế phải, $\binom{r}{2}$ lần ở tổng thứ hai,... Như vậy, x sẽ được đếm $\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}\binom{r}{i}$ lần ở vế phải.

Đây là một con số quen thuộc, $1+\sqrt{2}$ và $1-\sqrt{2}$ là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$ nên S_{2n+1} là công thức tổng quát của một dãy số cho bởi công thức truy hồi :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$$

Và $u_0 = 1; u_1 = 1$ nên u_n không chia hết cho 5. ■

Lời giải (2).
Gọi $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$
Vì $2^3 = 8 = 10 - 2$ chia cho 5 dư -2, nên 2^{3k} chia cho 5 có số dư bằng số dư của $(-2)^k$ khi chia cho 5. Do đó, ta chỉ cần chứng minh $S_n \not\vdots\, 5$ với $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{2n+1}{2k+1}$
Đặt $R_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k} 2^k$
Theo khai triển nhị thức Newton ta có:

$$(1+i\sqrt{2})^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (i\sqrt{2})^k = R_n + i\sqrt{2}S_n$$

Lấy module 2 vế suy ra $3^{2n+1} = R_n^2 + 2S_n^2$.
Vì $3^{2n+1} = 3.9^n$ chia cho 5 sẽ có số dư là ± 3 nên nếu $S_n \vdots 5$ thì R_n^2 chia cho 5 sẽ dư ± 3.
Nhưng R_n^2 là bình phương của một số nguyên nên chia cho 5 chỉ có thể dư $0; 1; 4$. Mâu thuẫn này chứng tỏ $S_n \not\vdots\, 5$. Vậy ta có đpcm. ■

Ví dụ 5.18. *Cho p là một số nguyên tố và các số tự nhiên m, n, p thỏa mãn $2 \le n \le m$ và $(p, q) = 1$. Chứng minh rằng $\binom{qp^m}{n} \vdots\, p^{m-n+1}$* △

Lời giải (1).
Viết số tự nhiên n dưới dạng $n = kp^\alpha$ với $(k, p) = 1; k, \alpha \in \mathbb{N}^*$.
Nếu $\alpha \ge n$ thì $n = kp^\alpha \ge kp^n \ge p^n$. Điều này vô lý vì vậy $\alpha \le n - 1$.

Ta có: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ nên

$$\binom{qp^m}{n} = \binom{qp^m}{kq^\alpha} = \frac{q}{k}p^{m-\alpha}\binom{qp^{m-1}}{kq^{\alpha-1}}$$

Do $(k,p) = 1$ và $\binom{qp^{m-1}}{kp^{\alpha-1}}$ là số nguyên dương suy ra $\binom{qp^m}{n} \vdots p^{m-\alpha}$

Mà $\alpha \leq n-1$ nên $p^{m-\alpha} \vdots p^{m-n+1}$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. ∎

Lời giải (2).

Ta có:

$$\binom{qp^m}{n} = \frac{qp^m(qp^m-1)(qp^m-n+1)}{n!} \tag{5.5}$$

Gọi a và b thứ tự là số mũ cao nhất của p trong phân tích tiêu chuẩn của tử và mẫu trong (5.5) thì $\binom{qp^m}{n} \vdots p^{a-b}$.

Nhận thấy $a \geq m$.

$$\begin{aligned} b &= \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \text{ với } k \in \mathbb{N}^*, p^k \leq n \leq p^{k+1} \\ &\leq n\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^k}\right) < \frac{n}{p-1} \leq n \end{aligned}$$

Nên $a - b \geq m - n + 1$. Do đó ta có đpcm. ∎

Nhận xét. Ta có kết quả mạnh hơn $\binom{qp^m}{n} \vdots p^{m-n+2}$.

Ví dụ 5.19. *Cho p là số nguyên tố và n là số nguyên thoả mãn $n \geq p$. Chứng minh rằng :*

$$\binom{n+p}{p}^2 - \binom{n+2p}{2p} - \binom{n+p}{2p} \vdots p^2$$ △

Do hai cách đếm có cùng số lượng như nhau nên chúng ta có: $T_n n! = n^{n-2}n!$. Vậy $T_n = n^{n-2}$. Định lí được chứng minh. ∎

6.4 Ứng dụng đếm hai cách giải các bài toán rời rạc

Ví dụ 6.16 (Hồng Kông 1994). *Trong một trường học có b giáo viên và c học sinh thỏa mãn các điều kiện sau:*
(1) *Mỗi giáo viên dạy đúng k học sinh;*
(2) *Cứ hai học sinh bất kì thì học chung đúng h giáo viên.*
Chứng minh rằng:

$$\frac{b}{h} = \frac{c(c-1)}{k(k-1)}$$ △

Lời giải.

Nếu giáo viên T_r dạy hai học sinh $S_i, S_j (i \neq j)$thì ta coi $T_r; S_i, S_j$ là một bộ ba có dạng $\{T_r; S_i, S_j\}$ và tổng tất cả các bộ ba $\{T_r; S_i, S_j\}$ là S.

- **Đếm theo cách 1** Với mỗi giáo viên T_r, Thầy giáo (hoặc cô giáo) dạy k học sinh nên có $\binom{k}{2}$ bộ $\{T_r; S_i, S_j\}$. Vì trường học có b giáo viên nên tổng số bộ $\{T_r; S_i, S_j\}$ là $S = b\binom{k}{2}$.
- **Đếm theo cách 2** Dựa vào điều kiện cứ hai học sinh $S_i, S_j (i \neq j)$học chung đúng h giáo viên. Do đó chúng ta cũng có h bộ $\{T_r; S_i, S_j\}$. Vì trường học có c học sinh nên chúng ta có $\binom{c}{2}$cách chọn $S_i, S_j, (i \neq j)$ nên chúng ta cũng có tổng số bộ $\{T_r; S_i, S_j\}$ là $S = h\binom{c}{2}$

Vậy theo cả hai cách đếm trên chúng ta có:

$$S = b\binom{k}{2} = h\binom{c}{2}$$

Gọi $A_1, A_2, ..., A_n$ là n người trong buổi họp đó. Khi đó mỗi cặp (A_i, A_j) dùng để chỉ người A_i bắt tay người A_j.
Gọi x_i là số lần bắt tay của người A_i và y là tổng số lần bắt tay xảy ra.
Một mặt chúng ta có số lần bắt tay của các cặp (A_i, A_j) là $\sum_{i=1}^{n} x_i$ vì mỗi người A_i có x_i cách chọn bắt tay với người A_j
Mặt khác, số lần bắt tay xảy ra giữa hai cặp (A_i, A_j) và (A_j, A_i) là $2y$.
Do đó theo nguyên lí đếm bằng hai cách chúng ta có: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2y$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 6.15. *(Định lí Cayley) Có n^{n-2} cây được tạo ra bởi n đỉnh phân biệt.* △

Lời giải.
Công thức Cayley được coi là một trong những công thức đẹp nhất của toán học lí thuyết đồ thị. Để chứng minh công thức này người ta có nhiều cách giải khác nhau, ở đây chúng tôi xin trình bày cách giải bằng kĩ thuật đếm bằng hai cách cho công thức này.
Gọi T_n là số cây được tạo ra từ n đỉnh.

- **Đếm theo cách 1**
  Ta chọn một đỉnh trong số n đỉnh làm gốc và chọn một trong $(n-1)!$ của $n-1$ cạnh để tạo thành một dãy cạnh có hướng. Khi đó tổng số dãy cạnh được tạo theo cách này là: $T_n n(n-1)! = T_n n!$.

- **Đếm theo cách 2**
  Để đếm số dãy cạch có hướng ta có thể xây dựng cây bằng cách bổ sung từng cạnh một vào n đỉnh đã cho. Giả sử chúng ta đã bổ sung $n-k$ cạnh thì ta thu được một rừng có k cây, có $n(k-1)$ cách chọn cạnh kế tiếp để bổ sung mà đỉnh đầu của nó là một trong n đỉnh, đỉnh cuối của nó là một trong số $k-1$ gốc của các cây không chứa đỉnh đầu. Đếm theo cách này chúng ta có tổng số cách chọn là:

$$\prod_{k=2}^{n} n(k-1) = n^{n-1}(n-1)! = n^{n-2}n!$$

Lời giải.
Trước tiên ta có:

$$\binom{2p}{p} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}^2 \equiv 2 \pmod{p^2}$$

Đặt $S = \binom{n+p}{p}^2 - \binom{n+2p}{2p} - \binom{n+p}{2p}$. Ta có

$$\begin{aligned}\binom{2p}{p} S &= \binom{n+p}{p}\left[\binom{n+p}{p}\binom{2p}{p} - \binom{n}{p} - \binom{n+2p}{p}\right]\\ &\equiv \binom{n+p}{p}\left[2\binom{n+p}{p} - \binom{n}{p} - \binom{n+2p}{p}\right] \pmod{p^2}\end{aligned}$$

Giờ ta chỉ cần chứng minh:

$$\binom{n}{p} + \binom{n+2p}{p} - 2\binom{n+p}{p} \vdots p^2$$

.
Mà $\binom{n}{p} + \binom{n+2p}{p} - 2\binom{n+p}{p}$ là hệ số của x^p trong khai triển:

$$\begin{aligned}(1+x)^n + (1+x)^{n+2p} - 2(1+x)^{n+p} &= (1+x)^n\left((1+x)^p - 1\right)^2\\ &= (1+x)^n\left(\sum_{i=1}^{p}\binom{p}{i}x^i\right)^2\end{aligned}$$

Dễ thấy trong khai triển $\left(\sum_{i=1}^{p}\binom{p}{i}x^i\right)^2$ thì hệ số của x^j là $\sum_{i=1}^{j-1}\binom{p}{i}\binom{p}{j-i} \vdots p^2$
Do đó hệ số của x^p trong khai triển $(1+x)^n\left((1+x)^p-1\right)^2$ chia hết cho p^2, ta có đpcm. ■

Ví dụ 5.20 (Nghệ An 2011-2012). *Cho số nguyên tố $p > 3$ và tập hợp $M = \{1, 2, ..., p\}$. Với mỗi số nguyên k thỏa mãn $1 \le k \le p$ ta đặt*

: $E_k = \{A \subset M : |A| = k\}$ *và* $x_k = \sum_{A \in E_k} (\min A + \max A)$.

Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^{p-1} x_k \binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p^3}$$

△

Lời giải.

Giả sử $A = \{m_1; m_2; ...; m_k\} \in E_k$.
Suy ra $A' = \{p+1-m_1; ...; p+1-m_k\} \in E_k$. Ta có nhận xét sau:
Nếu $m_1 = \min A$ thì $p+1-m_1 = \max A'$ và $m_k = \max A$
thì $p+1-m_k = \min A'$
Suy ra:

$$2x_k = \sum_{A \in E_k} (m_1+p+1+a_k+p+1-a_k) = \sum_{A \in E_k} 2(p+1) = \binom{p}{k} 2(p+1)$$

hay $x_k = \binom{p}{k}(p+1)$.

Do đó ta cần chứng minh $(p+1)\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}^2 \equiv 0 \pmod{p^3}$ hay

$$\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}^2 \equiv 0 \pmod{p^3} \tag{5.6}$$

Thật vậy,ta có:

$$\binom{p}{k} \vdots\, p \Rightarrow \frac{1}{p}\binom{p}{k} = \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$$

Do đó (5.6) tương đương với: $\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}\right)^2 \equiv 0 \pmod{p}$

Đặt $a_k = \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$

$$\Rightarrow \quad k!a_k = (p-1)(p-2)...(p-k+1) \equiv (-1)^{k-1}(k-1)! \pmod{p}$$
$$\Rightarrow \quad ka_k \equiv (-1)^{k-1} \pmod{p}$$

vào tập này một phần tử ảo là x_i với qui ước nếu trong 4 số được chọn từ A_i trong đó có phần tử x_i thì đồng nghĩa với trong 2 cặp ban đầu có 1 phần tử lặp lại 2 lần trong 3 phần tử còn lại.
Sau khi chọn ra 4 phần tử nếu ko có x_i thì ta có $\binom{3}{2} = 3$ cách tạo chúng thành 2 cặp.
Nếu có x_i thì có 3 cách gán giá trị cho x_i (là một trong 3 giá trị còn lại) với mỗi giá trị x_i chỉ cho đúng 1 cách phân cặp. Tóm lại ở trường hợp này sẽ có $3\sum_{i=1}^{n}\binom{k_i+1}{4}$.

- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Từ n tập này ta tạo được $\sum_{i=1}^{n}\binom{k_i}{2}$ cặp phần tử thuộc cùng tập.
  Do đó vế phải là số cách chọn ra 2 cặp như vậy.

Từ đây ta có điều phải chứng minh. ■

6.3 Ứng dụng phương pháp đếm giải các bài toán đồ thị

Ví dụ 6.14. *Trong một buổi họp có n người tham gia và có một số cái bắt tay (mỗi cái bắt tay tạo thành từ hai người, hai người đã bắt rồi thì không bắt tay lại). Chứng minh rằng nếu số người tham gia bắt tay là một số lẻ thì số cái bắt tay được tạo ra là một số chẵn.*
Bài toán trên tương đương với bài toán sau
Cho đồ thị $G = (V, E)$. Khi đó

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v).$$

Trong đó V là số đỉnh và E là số cạnh của đồ thị. △

Lời giải.

Ở đây chúng ta giải bài toán trên theo phương pháp đếm bằng hai cách.

- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Gọi a_n là số tập con của tập $(1; 2; ...; n)$ mà không chứa 2 số nguyên liên tiếp.
  Xét a_{n+1}
  Nếu phần tử cuối cùng là $n+1$ thì phần tử liền trước nó không thể là n, nên có a_{n-1} tập con.
  Nếu phần tử cuối cùng không phải là $n+1$ thì có a_n tập con.
  $\Rightarrow a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$
  Dễ thấy $a_0 = 1; a_1 = 2$ nên
  $a_n = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Như vậy:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\binom{i}{n-i+1} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

■

Ví dụ 6.13. *Cho $k_1; k_2; ...; k_n$ là các số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{1\le i<j\le n}\binom{k_i}{2}\binom{k_j}{2} + 3\sum_{i=1}^{n}\binom{k_i+1}{4} = \binom{\sum_{i=1}^{n}\binom{k_i}{2}}{2}$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc.
  Gọi $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập gồm $k_1, k_2, ..., k_n$ phần tử.

- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Nếu 2 cặp này không cùng thuộc 1 tập thì có $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n}\binom{k_i}{2}\binom{k_j}{2}$ cách chọn.
  Nếu 2 cặp này cùng thuộc 1 tập A_i nào đó có k_i phần tử, ta chèn

Đặt $b_k = \dfrac{(p-1)!}{k} \Rightarrow kb_k = (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$
Suy ra: $a_k \equiv (-1)^k.b_k \pmod{p}$
Ta có: $\forall k \in \{1; 2; ...; p-1\}, \exists! j \in \{1; 2; ...; p-1\} : jk \equiv 1 \pmod{p}$.
Do đó:

$$\sum_{k=1}^{p-1} b_k^2 \equiv \sum_{k=1}^{p-1} b_k^2(kj)^2 \equiv \sum_{k=1}^{p-1}(b_k k)^2 j^2 \equiv \sum_{j=1}^{p-1} j^2 \equiv \frac{(p-1)(2p-1)p}{6} \pmod{p}$$

Mặt khác $p > 3$ nên

$$p-1 \,\vdots\, 2 \text{ và } (p-1)(2p-1) = 2p^2 + 1 - 3p \equiv 2.1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

hay $(p-1)(2p-1) \,\vdots\, 6$. Suy ra

$$\sum_{k=1}^{p-1} a_k^2 \equiv \sum_{k=1}^{p-1} b_k^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

Tức (5.6) đúng. Ta có đpcm. ■

Ví dụ 5.21. *Cho m, n là các số nguyên dương, biết m lẻ. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{n3^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{3m}{3k}(3n-1)^k \in \mathbb{Z}$$

△

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{3m}{3k}(3n-1)^k \,\vdots\, n3^m$.

Xét $f(x) = (x + \sqrt[3]{3n-1}x)^{3m}$. Gọi $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ thì ta có:

$$S = \frac{1}{3}(f(1) + f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2))$$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt[3]{3n-1}.\varepsilon^i)^{3m} &= (1 + 3n - 1 + 3\sqrt[3]{3n-1}.\varepsilon^i + 3\sqrt[3]{(3n-1)^2}.\varepsilon^{2i})^m \\ &= 3^m(n + \sqrt[3]{3n-1}.\varepsilon^i + \sqrt[3]{(3n-1)^2}.\varepsilon^{2i})^{3m}\end{aligned}$$

Nên:

$$\begin{aligned}\frac{S}{3^{m-1}} &= (n+\sqrt[3]{3n-1}.\varepsilon+\sqrt[3]{(3n-1)^2}.\varepsilon^2)^{3m}\\ &+(n+\sqrt[3]{3n-1}.\varepsilon^2+\sqrt[3]{(3n-1)^2}.\varepsilon)^{3m}\\ &+(n+\sqrt[3]{3n-1}+\sqrt[3]{(3n-1)^2})^{3m}\end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases}(n+\sqrt[3]{3n-1}.\varepsilon+\sqrt[3]{(3n-1)^2}.\varepsilon^2)^{3m} = a_m\\ (n+\sqrt[3]{3n-1}.\varepsilon^2+\sqrt[3]{(3n-1)^2}.\varepsilon)^{3m} = b_m\\ (n+\sqrt[3]{3n-1}+\sqrt[3]{(3n-1)^2})^{3m} = c_m\end{cases}$

Chú ý $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0; \varepsilon^3=1$ và $a_n+b_n+c_n$ là số nguyên với mọi n

Ta có: $a_1+b_1+c_1=3n$; $a_3+b_3+c_3 \vdots 3n$; $a_5+b_5+c_5 \vdots 3n$.

Giả sử $a_{2i+1}+b_{2i+1}+c_{2i+1} \vdots 3n$ với mọi $i<k$ ta có:

$$\begin{aligned}a_{2k+1}+b_{2k+1}+c_{2k+1} &= (a_{2k-1}+b_{2k-1}+c_{2k-1})(a_2+b_2+c_2)\\ &-(a_{2k-3}+b_{2k-3}+c_{2k-3})(a_2b_2+c_2b_2+a_2c_2)\\ &+a_2b_2c_2(a_{2k-5}+b_{2k-5}+c_{2k-5})\end{aligned}$$

chia hết cho $3n$ theo giả thiết quy nạp.

Nên theo nguyên lí qui nạp thì $a_{2k+1}+b_{2k+1}+c_{2k+1} \vdots 3n$ với mọi k nguyên dương, tức là S chia hết cho $n3^m$.

Hay $\dfrac{1}{n3^m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{3m}{3k}(3n-1)^k \in \mathbb{Z}$ ■

Ví dụ 5.22 (Mongolia TST 2011). *Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{p+k}{k} \equiv -1 \pmod{p^3}$$

△

Lời giải.

Xét hàm sinh:

$$f(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{p+k}{k}x^p$$

- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Gọi x_n là số cách chia thỏa mãn bài toán với n học sinh.
  Xét x_{n+1}
  Giả sử nhóm được chia cuối cùng có k người, khi đó có k cách chia nhóm này (thực ra là k cách chọn nhóm trưởng), và g_{n+1-k} cách chia $n-k$ người trước, nên có $k.g_{n+1-k}$ cách chia.

  Quy ước $g_0=1$, ta có: $g_1=1$

  $\Rightarrow g_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kg_{n+1-k}$

  $\Rightarrow g_{n+1}=3g_n-g_{n-1}$

  Kết hợp với $g_0=1, g_1=1$ ta được:

  $g_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right]$

Như vậy ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 6.12. *Tính tổng:*

$$\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\binom{n-i+1}{i}$$

△

Lời giải.

- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Ta đếm số tập con có i phần tử của tập hợp $(1;2;3;...;n)$ mà không chứa hai số nguyên liên tiếp.
  Gọi A là họ tất cả các tập con có tính chất nêu trên và B là tất cả các tập con của tập hợp $1;2;...;n-(r-1)$.
  Xét ánh xạ $f:A\to B$ như sau:
  $f: a_1;a_2;...;a_r \to b_1;b_2;...;b_r$ với $b_i=a_i-i+1, i=\overline{1;r}$
  Dễ thấy f là 1 song ánh nên $|A|=|B|=\dbinom{n-i+1}{i}$

  $\Rightarrow \displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\binom{n-i+1}{i}$ là số các tập con của $1;2;...;n$

+ Nếu tất cả các gia đình đều có con được nhận quà thì có $\binom{n}{n}.2^n$ cách phát quà.

Vậy tổng cộng có $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.2^k$ cách phát quà.

- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Mỗi gia đình thì có 3 cách (cả 2 con đều không có quà, cả 2 con đều có quà, hoặc 1 đứa có quà 1 đứa không có quà).

Như vậy có tất cả 3^n cách phát quà.
Từ đây ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 6.11.
Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n+k-1}{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right]$$ △

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc.
  Một lớp học có n học sinh đi dã ngoại. Cô giáo chia thành một số nhóm và trong mỗi nhóm chọn ra một nhóm trưởng để tiện quản lí.
  Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chia?

- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Xét số nhóm là k. Mô hình hóa bài toán như sau:
  Ta cho trưởng nhóm cầm một cái cột, giữa 2 nhóm có 1 cái cột nên có tất cả $2k-1$ cái cột trong $n+k-1$ vị trí.
  Do đó với k nhóm thì có $\binom{n+k-1}{2k-1}$ cách chia.
  Như vậy có tất cả $\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n+k-1}{2k-1}$ cách chia.

Ta có:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{p+k}{k}x^p \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{k}x^{p-k}\sum_{p=0}^{\infty}\binom{p+k}{k}x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{k}x^{p-k}\cdot\frac{1}{(1-x)^{p+1}} \\
&= \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}\left(\frac{-1}{x}\right)^k \\
&= \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^p \\
&= -\frac{1}{1-x} = -1-x-x^2-\dots
\end{aligned}$$

Suy ra $\sum\limits_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{p+k}{k} \equiv -1 \pmod{p^3}$ ■

Ví dụ 5.23. *Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng*

$$T = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{p+k}{k} - (2^p+1) \vdots p^2$$ △

Lời giải.
Ta có:

$$T = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{p+k}{k} - (2^p+1) = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{p+k}{k} - \left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}+1\right)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T &= \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}\binom{p+k}{p} + 1 + \binom{2p}{p} - \left(\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}+3\right) \\
&= \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}\left(\binom{p+k}{k}-1\right) + \left(\binom{2p}{p}-2\right)
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}\left(\binom{p+k}{k}-1\right) \vdots\, p^2$ thì ta chỉ cần chứng minh $\binom{p+k}{k}-1 \vdots\, p$ với $1 \le k \le p-1$ vì $\binom{p}{k} \vdots\, p$.
Thật vậy :

$$\binom{p+k}{k}-1=\frac{(p+k)!}{p!.k!}-1=\frac{(p+1)(p+2)...(p+k)-k!}{k!}$$

Vì $(p+1)(p+2)...(p+k) \equiv k! \pmod p$
$\Rightarrow (p+1)(p+2)...(p+k)-k!$ chia hết cho p và $k!$.
Mà $(p,k!)=1 \Rightarrow (p+1)(p+2)...(p+k)-k! \vdots\, k!p \Rightarrow \binom{p+k}{k}-1 \vdots\, p$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}\left[\binom{p+k}{k}-1\right] \vdots\, p^2$$

Mà ta lại có $\binom{2p}{p}-2 \vdots\, p^2$ (định lý Wolstenholme, xem bài 5.1)

Do đó, ta có $T \vdots\, p^2$. ■

5.4 Bài tập

BÀI 1. Cho p là số nguyên tố và $p \ge 5$. Chứng minh rằng $\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^3}$

BÀI 2. (Putnam 1997) Cho p là số nguyên tố và a, b là số dương thỏa mãn $a \ge b > 0$. Chứng minh

$$\binom{pa}{pb} \equiv \binom{a}{b} \pmod p$$

BÀI 3. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng

$$\forall k=\overline{0,p-1}:\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod p$$

- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Sau đó chọn ra 3 bạn cho ba vị trí nhất, nhì, ba,..., bét thế thì tổng cần tính chính là số cách chọn đó.
- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Chọn luôn hạng nhất, nhì,...bét ngay từ n bạn và bổ sung thêm một số bạn trong $n-3$ bạn còn lại để thi vòng chung kết.

  Nếu chọn kiểu này này thì có $n(n-1)(n-2)2^{n-3}$ giải pháp vì 1 số bạn chọn theo cách kia chính là 1 tập con trong $n-3$ cô còn lại.

Từ đó có kết quả cần tìm là $n(n-1)(n-2)2^{n-3}$
Từ đây ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 6.10.
Chứng minh rằng:

$$\sum_{n}^{k}\binom{n}{k}.2^k=3^n$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc.
  Có n gia đình trong 1 công ty, mỗi gia đình có 2 người con. Nhân ngày trung thu, công ty tổ chức phát quà cho các cháu có kết quả học tập cao, nhưng trong cùng 1 gia đình không có 2 cháu nào cùng được nhận quà. Hỏi có bao nhiêu cách phát quà?
- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**

  + Nếu không có gia đình nào có con được nhận quà thì có $\binom{n}{0}.2^0$ cách phát quà.

  + Nếu có 1 gia đinh có con được nhận quà thì có $\binom{n}{1}.2^1$ cách phát quà.

  + ...

- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Thầy ghép n học sinh nam và n học sinh nữ thành n đôi. (việc làm này coi như thực hiện từ đầu và không ảnh hưởng gì đến cách chia vé của thầy)

  - Chọn ra k đôi và chia cho mỗi đôi 1 vé - có $2^k\binom{n}{k}$ cách chọn (vì mỗi đôi có 1 vé nên k đôi sẽ có 2^k kết cục khác nhau), như vậy còn lại $n-k$ vé và $n-k$ đôi còn lại. Thầy tiếp tục chọn ra $\left\lfloor \dfrac{n-k}{2} \right\rfloor$ đôi và chia cho mỗi đôi 2 vé - có $\binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor}$ cách.

  - Bây giờ thầy còn lại $S = n-k-2\left\lfloor \dfrac{n-k}{2} \right\rfloor$ vé.
  $S = 0$ nếu $n-k$ là số chẵn (khi đó n vé đã được chia hết)
  $S = 1$ nếu $n-k$ là số lẻ (khi đó chiếc vé còn lại dành cho thầy)

  - Dễ thấy rằng k có thể nhận các giá trị từ 0 đến n

- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Nếu n vé được chia ngẫu nhiên cho $2n$ học sinh và cả mình thì xảy ra $\binom{2n+1}{n}$ trường hợp.

Do đó, theo cách chia đó của thầy ta có tất cả: $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor}$ các cách chia n vé cho $2n+1$ người.
Từ đây ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 6.9. *Tính*

$$\sum_{k=3}^{n} (k-2)(k-1)k\binom{n}{k}$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc.
  Giả sử có n bạn tham gia thi hội khỏe Phù Đổng vòng sơ tuyển cần chọn ra một số bạn vào vòng chung kết.

Bài 4. Cho p là số nguyên tố và gọi bất kì $k, a \in \mathbb{N} : 0 \le a \le p^k - 1$. Chứng minh rằng

$$\binom{p^k-1}{a} \equiv (-1)^a \pmod{p}$$

Bài 5. Chứng minh rằng nếu $n = 2^m - 1$ thì $\forall k = \overline{0, n} : \binom{n}{k}$ là số lẻ.

Bài 6. Tìm số dư của $\binom{2009}{k}$ khi chia cho 2011.

Bài 7. Cho k là số tự nhiên chẵn và p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng nếu k không chia hết cho $p-1$ thì $\sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i}^k \vdots\, p^{k+1}$

Bài 8. Tìm tất cả số nguyên $n > 1$ sao cho $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} : \binom{kn}{n} \vdots\, k^n$.

Bài 9. Chứng minh rằng:

$$2.1\binom{2000}{2} + 3.2\binom{2000}{3} + .. + 2000.1999\binom{2000}{1999} \vdots\, 3998000$$

Bài 10. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge k$:

$$\text{ƯCLN}\left[\binom{n}{k}; \binom{n+1}{k}; \dots; \binom{n+k}{k}\right] = 1$$

$x_{k+1} > max\{x_1, x_2, ..., x_k\}$
Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Ứng với mỗi $x_{k+1} = i+1, (1 \le i \le n)$, ta có i các chọn x_1, i cách chọn x_2, ...; i cách chọn x_k.
  Do đó, số các cách chọn là: $S = 1^k + 2^k + ... + n^k$

- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Ta sẽ chọn ra $k+1$ số từ $n+1$ số, số lớn nhất, ta chọn làm x_{k+1}, các số còn lại, ta sếp thứ tự là xong.
  Gọi $i (0 \le i \le k)$ là số các phần tử bằng nhau trong nhóm $x_1, x_2, ..., x_k$.
  Chọn $k-i+1$ số khác nhau từ $n+1$ số, ta có $\binom{n+1}{k-i+1}$ cách.
  Xếp thứ tự $k-i$ số khác nhau vào k chỗ trống (các chỗ trống còn lại, hiển nhiên dành cho i số bằng nhau), ta có A_k^{k-i} cách.
  Vậy số cách chọn là:

$$S = \sum_{i=0}^{k-1} A_k^{k-i} \binom{n+1}{k-i+1}$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 6.8.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor} = \binom{2n+1}{n}$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc.
  Thầy Thế, GVCN lớp 10A gồm n học sinh nam và n học sinh nữ. Tối nay, ở Rạp chiếu phim quốc gia, chiếu một bộ phim rất hay, thầy định tổ chức cho cả lớp đi xem... Cuối cùng thầy Thế chỉ mua được n vé. Thầy suy nghĩ:

- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Cho $8n$ viên bi này vào $4n$ hộp, mỗi hộp có 2 viên:
  Đầu tiên chọn ra đúng k hộp sao cho mỗi hộp có đúng 1 viên bi được lấy ra.
  - Số cách chọn $2n-2k$ hộp trong $4n$ hộp là $\binom{4n}{2n-2k}$
  - Trong mỗi hộp trong $2n-2k$ hộp trên ta chọn ra đúng 1 bi, trong 2 viên bi có trong hộp, nên số cách chọn là $2^{2n-2k}=4^{n-k}$
  - Chọn $2k$ viên bi còn lại trong $2n+2k$ hộp còn lại sao cho mỗi hộp sẽ có đúng 2 bi được chọn sẽ là k hộp nên có $\binom{2n+2k}{k}$ cách chọn.
- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Ta sẽ đếm số cách chọn $2n$ viên bi từ $8n$ viên bi này khi đó có $\binom{8n}{2n}$ cách.
  Từ đó suy ra số cách chọn $2n$ trong $8n$ viên bi theo cách đếm thứ 2 sẽ là $\sum_{k=0}^{n} 4^{n-k}\binom{4n}{2n+2k}\binom{2n+2k}{k}$

Từ đây ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 6.7. *Chứng minh rằng:*

$$1^k+2^k+...+n^k=\sum_{i=0}^{k-1} A_k^{k-i}\binom{n+1}{k-i+1}$$

với $k=1,2,3,...$ △

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc:
  Từ tập các số nguyên dương $A=\{1,2,...,n+1\}$, ta chọn ra bộ sắp thứ tự $(x_1,x_2,...,x_{k+1})$ thỏa mãn điều kiện:

Chương 6

Kỹ thuật đếm bằng hai cách chứng minh đẳng thức tổ hợp

Hoàng Minh Quân (batigoal)
Nguyễn Hiền Trang (tranghieu95)

Tóm tắt nội dung

Kỹ thuật đếm bằng hai cách là một phương pháp phổ biến và đã có nhiều tác giả viết về nó. Tuy nhiên để bạn đọc hiểu tại sao lại giải được như thế, hoặc cách xây dựng các bước giải cho bài toán sử dụng kĩ thuật này như thế nào thì nhiều bài viết lại chưa đề cập đến. Trong khuôn khổ bài viết nhỏ này tác giả hy vọng cung cấp được phần nào ý tưởng của phương pháp này tới bạn đọc.

6.1 Nguyên lí đếm bằng hai cách

"Cùng một số lượng thì kết quả đếm được theo hai cách là như nhau".

Nguyên lí tưởng chừng như rất đơn giản này nhưng lại là khởi nguồn của nhiều ý tưởng để giải các bài toán tổ hợp hay và khó. Bài viết sau đây sẽ phân tích một số ý tưởng cho việc sử dụng nguyên lí này.
Để chứng minh một đẳng thức tổ hợp có dạng $A = B$. Chúng ta có thể thực hiện các bước dự đoán sau đây để sử dụng phương pháp đếm bằng hai cách:

6.1.1 Các bước thực hiện

- **Bước 1:** Phát biểu lại bài toán về đếm một sự kiện quen thuộc.
- **Bước 2:** Đếm theo vế trái của đẳng thức.
- **Bước 3:** Đếm theo vế phải của đẳng thức.

6.1.2 Ghi nhớ cần thiết

- Nếu vế trái (hoặc vế phải) là tổng các biểu thức thì ở cách đếm vế trái (hoặc vế phải) đó ta chia thành các trường hợp riêng để đếm dùng quy tắc cộng.
- Nếu vế trái (hoặc vế phải) là tích các biểu thức thì ở cách đếm vế trái (hoặc vế phải) đó ta chia thành các công đoạn cùng hoàn thành để đếm dùng quy tắc nhân.

Trong bài viết này, chúng tôi minh họa kỹ thuật đếm bằng hai cách thông qua các bài toán nổi tiếng và đa phần là các bài toán, các định lý có tên nhằm minh họa cho ý tưởng của bài viết.
Sau đây là một số ứng dụng của phương pháp đếm bằng hai cách. Chúng tôi phân tích và trình bày chi tiết hai ví dụ mở đầu, các ví dụ sau ý tưởng phân tích tương tự.

Ví dụ 6.5. *Với n nguyên dương cho trước. Chứng minh rằng:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc:
  Một đoạn thẳng có độ dài n được tô bằng 4 màu, D, X, V, T.
- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Ta sẽ chọn ra một tập cách tô màu D và X sao cho $D + X = k$ thì số cách chọn sẽ là $\sum_{i=0}^{k} \binom{i}{k}\binom{k}{k-i} = \binom{2k}{k}$
  khi đó số cách chọn ra các đoạn màu V, T sẽ là
  $\sum_{j=0}^{k} \binom{n-k}{j}\binom{n-k}{k-j} = \binom{2n-2k}{n-k}$
- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Rõ ràng ta có 4^n cách như thế.

Do đó với mỗi k cố định thì ta được số cách tô sẽ là $\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$

Cho k chạy từ 0 đến n ta được số cách tô màu là $\sum_{i=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$

Từ đây ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 6.6.

$$\sum_{k=0}^{n} 4^{n-k}\binom{4n}{2n+2k}\binom{2n+2k}{k} = \binom{8n}{2n};\ n \in \mathbb{N}^*$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc: Xét $8n$ viên bi.

Ví dụ 6.4. *Chứng minh rằng với $n \geq m$ thì*

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}2^{n-m}$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại bài toán đếm quen thuộc:
  Giả sử rằng từ n học sinh của lớp học, giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra một đội văn nghệ số lượng người tùy ý, trong đó có m học sinh cầm micro. Khi đó giáo viên chủ nhiệm có hai phương án thực hiện.
- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Trước hết giáo viên chọn ra k người từ n người. Khi đó có $\binom{n}{k}$ cách chọn , sau đó từ k người này sẽ chọn lấy m người cầm micro. Cho k chạy từ 0 đến n chúng ta có
  $$\sum_{k\geq 0} \binom{n}{k}\binom{k}{m}$$
- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Chọn ngay m học sinh cầm Micro từ n học sinh của lớp, sau đó chọn bổ sung thêm một nhóm tùy ý từ $n-m$ người còn lại. Trong $n-m$ người này đối với mỗi người có thể được chọn hoặc không được chọn nên có 2^{n-m} cách chọn.
  Vậy cả thảy có $\binom{n}{m}2^{n-m}$

Do đó chúng ta có $\sum_{k\geq 0} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}2^{n-m}$ ■

Nhận xét. Với ý tưởng tương tự ví dụ trên, bạn đọc có thể chứng minh đẳng thức sau:
Chứng minh rằng với $n, m \in \mathbb{N}$ thì

$$\sum_{r=0}^{m} 2^{n-r}\binom{n}{r}\binom{m}{r} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n+m-r}{m}\binom{n}{r}.$$

6.2 Ứng dụng chứng minh đẳng thức tổ hợp

Ví dụ 6.1. *(Chứng minh đẳng thức Pascal)*
Với mọi số nguyên dương $n \geq k \geq 1$ chúng ta có

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc:
  Trại hè toán học có n học sinh tham dự ban tổ chức cần chọn ra k học sinh làm bài thi môn tổ hợp . Như vậy ban tổ chức có hai cách đếm số cách chọn.
- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**
  Nếu chọn k học sinh bất kì trong n học sinh thì ban tổ chức có $\binom{n}{k}$ cách chọn.
- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Quan sát vế phải ta thấy vế phải là "tổng" của hai biểu thức tổ hợp nên điều đó gợi cho chúng ta nhớ tới xét các khả năng để dùng quy tắc cộng.
  Giả sử Long là một trong n học sinh đó.
  - *Phương án 1*:
    Nếu Long được chọn tham dự thi môn tổ hợp thì cần chọn $k-1$ người trong số $n-1$ người còn lại. Khi đó ban tổ chức có $\binom{n-1}{k-1}$ cách chọn.
  - *Phương án 2*:
    Nếu Long không được chọn thi môn tổ hợp thì cần chọn ra cho đủ k người trong số $n-1$ người còn lại. Khi đó ban tổ chức có $\binom{n-1}{k}$ cách chọn.

Như vậy theo nguyên lí đếm bằng hai cách chúng ta có đẳng thức được chứng minh. ■

Ví dụ 6.2. *Chứng minh rằng:*

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}=2^n$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu bài toán dưới lại dưới dạng toán đếm quen thuộc: Tìm số cách chọn một số số từ n số cho trước.
- **Bước 2:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 1)**

  \+ Nếu chọn 0 viên có $\binom{n}{0}$ cách

  \+ Nếu chọn 1 viên có $\binom{n}{1}$ cách

  \+ ... ...

  \+ Nếu chọn n viên có $\binom{n}{n}$ cách

  Vậy tổng cộng có $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}$ cách.
- **Bước 3:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 2)**
  Mỗi số sẽ có 2 trạng thái (được chọn và không được chọn), mà có n số như vậy nên có 2^n cách chọn.

Như vậy ta có điều cần chứng minh. ■

Ví dụ 6.3. *(Chứng minh đẳng thức Vandermonde.)*

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+...+\binom{n}{k}\binom{m}{0}=\binom{m+n}{k};\quad \text{với } k\le n\le m.$$

△

Lời giải.

- **Bước 1:** Phát biểu lại thành bài toán đếm quen thuộc. Công ty X gồm n nhân viên nam và m nhân viên nữ cần chọn ra k người để lập thành đội tình nguyện.
- **Bước 2:** Xét biểu thức vế phải **(Đếm theo cách 1)**
  Chọn ngẫu nhiên k người trong công ty gồm $n+m$ người thì có $\binom{m+n}{k}$ cách chọn.
- **Bước 3:** Xét biểu thức vế trái **(Đếm theo cách 2)**
  Quan sát vế trái ta thấy vế trái các số hạng thành phần là "tích" của hai biểu thức tổ hợp nên điều đó gợi cho chúng ta nhớ tới xét các khả năng để dùng quy tắc nhân.
  Chọn ra i nhân viên nam và $k-i$ nhân viên nữ thì có $\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$ cách. Vì số người được chọn là tùy ý trong giới hạn cho phép k người nên cho i chạy từ 0 đến k, ta có tổng tất cả các cách chọn như vậy là:
  $$\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+...+\binom{n}{k}\binom{m}{0}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh. ■

Nhận xét. Đẳng thức Vandermonde được viết thu gọn như sau:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{m+n}{k}$$

Khi đó:
a. Với $m=n$ thì chúng ta có đẳng thức quen thuộc

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$$

b. Với $(0\le k_i\le n_i)$; $i=\overline{1,r}$ thì

$$\sum_{k_1+k_2+...+k_r=k}\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}...\binom{n_r}{k_r}=\binom{n_1+n_2+...+n_r}{k}$$