

PHẦN THI TÀI NĂNG TOÁN HỌC: CẶP ĐÔI HOÀN HẢO VMF 2013

Bài toán 1 (Mê cung "Lục Hoa")— Ngày xuân 2013, Bang hội *VMF* tổ chức cuộc thi "*Cặp đôi Hoàn hảo 2013*". Cặp đôi của bạn và bao cặp đôi khác cũng vui mừng hờ hởi đến tham gia. Lạ lắm thay, vừa bước vào hòn đảo đại bản doanh *VMF*, bạn đã thấy tứ bề là những cây đào, mai, cúc, v.v (như "Đảo Đào Hoa", được cháu ngoại 80 đời của Đông Tà Hoàng Dược Sư là *perfectstrong* và các sư huynh *alex_hoang*, *dark templar* tài trợ xây dựng). Một chiếc bảng thật to trước mặt ghi rằng:

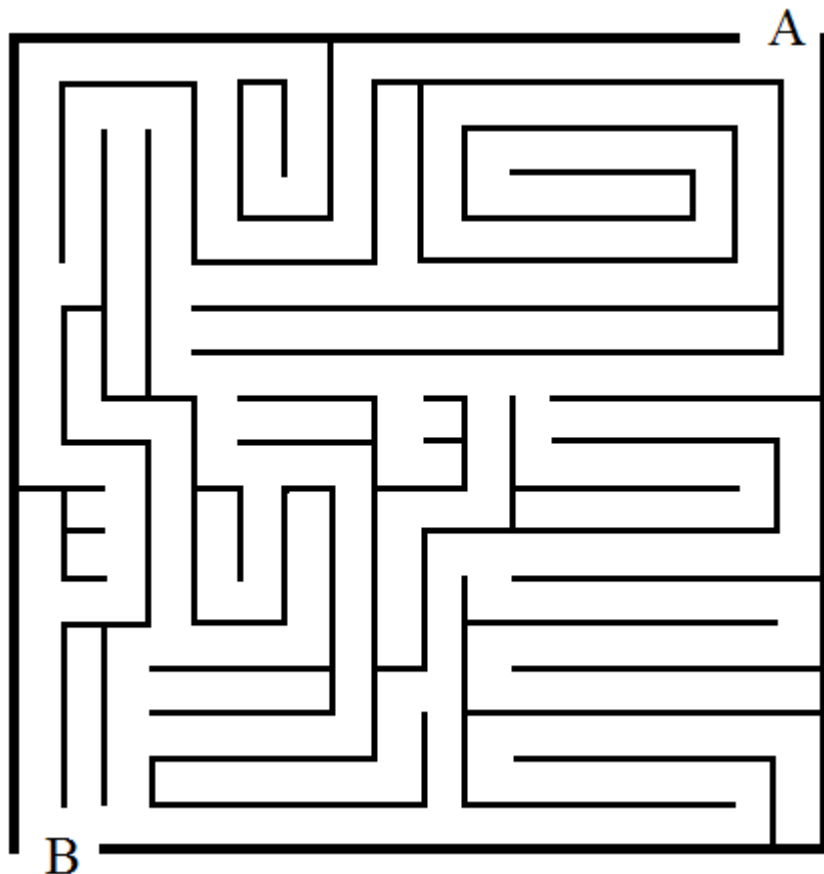
Mọi cặp đôi phải tìm mọi con đường vượt qua mê cung "Lục Hoa" sau tấm bảng này, bằng cách đi từ cổng *A* đến cổng *B*, phải tuân theo luật sau:

- Tuyệt đối không được vượt qua những bức tường hoa nếu không muốn toi mạng.
- Không được đào đất nếu không muốn rơi xuống biển.
- Không được nhảy cóc qua những bức tường nếu chưa muốn bị đại bàng bắt đi.
- Trên mỗi đoạn đường không được đi qua quá 2 lần.

Hãy mau vượt qua mê cung "Lục Hoa" để tiếp tục đến với những thử thách kế tiếp. Chúc may mắn. ☺

perfectstrong - alex_hoang - dark templar

P/S: HÃY SỬ DỤNG TẤM BẢN ĐỒ DƯỚI ĐÂY.



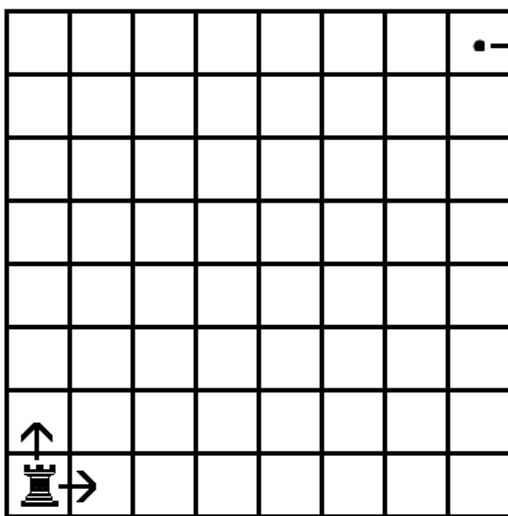
Bài toán 2 (Đấu cờ)— Vượt qua mê cung "Lục Hoa", bạn tiếp tục bước trên con đường đá tới cửa ải thứ 2. Lần này, bạn phải đấu cờ với kì thủ *perfectstrong*. Nhưng, luật chơi đấu cờ thật khác lạ. Trước mặt bạn là một bàn cờ vua 8×8 . Một quân cờ X được đặt ở góc trái dưới cùng. Cho Z là tập hợp các hướng đi "hợp lệ" của X .

Cặp đôi của bạn của phải chơi với *perfectstrong* lần lượt chơi theo luật sau: tới lượt mình, phải đi quân X theo 1 hướng trong Z . Bạn là người chơi đầu tiên rồi tới *perfectstrong*, rồi lại tới bạn, Người thắng là người đầu tiên đi quân X tới được ô ở góc phải trên cùng ☺

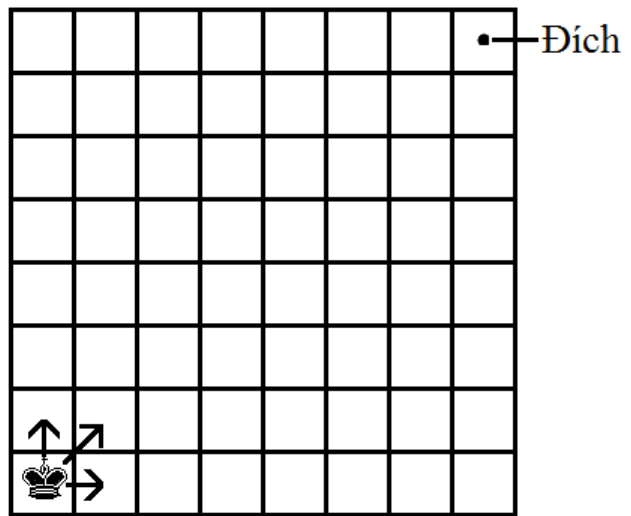
Hỏi bạn có chiến lược thắng cuộc không nếu

- X là quân Xe và $Z = \{\text{đi lên, sang phải}\}$.
- X là quân Vua và $Z = \{\text{đi lên, sang phải, đi chéo lên bên phải}\}$

QUY ƯỚC: khi đi quân X , phải thỏa mãn khả năng đi của quân cờ và không quá bàn cờ, tức quân Xe có thể đi bao nhiêu ô tùy ý, quân Vua chỉ được đi 1 ô.



a)



b)

Bài toán 3 (Vực thẳm)— Tạm biệt kì thủ *perfectstrong*, cặp đôi bạn lại lên đường. Thiên nhiên phong cảnh rất nên thơ, hữu tình. Thật tuyệt vời! Bỗng một cái vực sâu thăm thẳm xuất hiện trước mặt các bạn. Một giọng nói từ đâu vọng lại rằng:

"Hãy giải hệ phương trình trên vách đá dưới vực. Với đáp án đúng, một cây cầu sẽ xuất hiện. Bằng không, hãy trèo qua ngọn núi này."

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 2) = 6 \ln \left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 9}}{x + \sqrt{x^2 + 9}} \right) \\ x^3 - 2x + 1 = y^2 \end{cases}$$

Bài toán 4 (Thách đố)— Nhẹ nhàng băng qua vực thẳm trên cây cầu huyền ảo, hai bạn đối đầu ngay với sư huynh *dark templar* bên bờ kia. Trên tay với cây bút ngòi bằng thép, anh đang vẽ những hình tròn, hình vuông, đồ thị phức ảo. Anh vẫn mãi say mê những con Toán nếu cây cầu của hai bạn không đè lên nó. Thấy vậy, anh ta liền "bắt đền" cặp đôi bạn bằng một bài toán:

Cho tam giác ABC thay đổi. $G, (I; r)$ thứ tự là trọng tâm và đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Gọi $m_a; m_b; m_c$ là độ dài các trung tuyến ứng đỉnh A, B, C và $h_a; h_b; h_c$ là độ dài các đường cao ứng đỉnh A, B, C trong $\triangle ABC$. Bất đẳng thức sau có đúng không? Chứng minh hoặc phủ nhận nó:

$$\max \left\{ \frac{m_a}{h_a}; \frac{m_b}{h_b}; \frac{m_c}{h_c} \right\} \leq \frac{GI}{2r}$$

Một cửa ải không dễ nhưng chắc hai bạn sẽ cùng nhau vượt qua. ☺

Bài toán 5 (Quyền-cước)— Trong cửa ải cuối cùng, các bạn sẽ phải chiến đấu với sư huynh *alex_hoang* cùng những ngọn cước đa thức của anh ấy. Biết rằng anh có $n - 1$ chiêu cước đa thức $P_1(x); P_2(x); \dots; P_{n-1}(x)$ ($n > 3$) mà mỗi chiêu có dạng $P_k(x) = x^2 + a_kx + b_k$, trong đó, $(a_k), (b_k)$ là các Cấp số cộng (CSC) có công sai là số nguyên, $a_1; b_1 \in \mathbb{Z}$. May mắn thay, chiêu đầu tiên và cuối cùng của anh ấy là $P_1(x); P_{n-1}(x)$ đều vô nghiệm.

Để chiến đấu lại anh ấy, hai bạn cần phải tìm ra n đa thức quyền $T_1(x); T_2(x); \dots; T_n(x)$ có hệ số dương sao cho

$$T_1(x) = P_1(x)T_2(x); T_2(x) = P_2(x)T_3(x); \dots; T_{n-1}(x) = P_{n-1}(x)T_n(x)$$

Chỉ như vậy, hai bạn mới có cơ hội vượt qua ải này. Hãy chứng minh rằng hai bạn có thể thắng!!!

CHÚC HAI BẠN CÙNG NHAU VƯỢT QUA MỌI CỬA ẢI!!!

