

Tuyển tập đề thi IMO

IMO Task Collection

Hà Nội - 2002

Kỳ thi IMO lần thứ nhất - 1959

1. Chứng minh rằng $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

2. Với giá trị thực nào của x thì biểu thức $\sqrt{x+\sqrt{2x+1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = A$ nhận các giá trị:

(a) $A = \sqrt{2}$

(b) $A = 1$

(c) $A = 2$

Ở đây chỉ có các số thực không âm cho phép trong dấu căn và giá trị của căn luôn lấy giá trị không âm?

3. Giả sử a, b, c là các số thực. Cho phương trình sau của $\cos x$:

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

Hãy thiết lập phương trình bậc 2 đối với $\cos 2x$ sao cho có cùng nghiệm x với phương trình trên. So sánh các phương trình trên với $a = 4, b = 2, c = -1$.

4. Cho trước độ dài $|AC|$, hãy dựng tam giác ABC với góc $\angle ABC = 90^\circ$, và trung tuyến BM thỏa mãn $BM^2 = AB \cdot BC$.

5. Cho điểm M tùy ý trong đoạn thẳng AB . Dựng các hình vuông $AMCD$ và $MBEF$ nằm cùng phía đối với đường thẳng AB . Gọi P, Q lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các hình vuông $AMCD$ và $MBEF$. Các đường tròn này giao nhau tại M và N .

(a) Chứng minh rằng AF và BC cắt nhau tại N .

(b) Chứng minh rằng MN đi qua một điểm cố định S (không phụ thuộc vào M).

(c) Tìm quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng PQ khi M thay đổi.

6. Cho hai mặt phẳng P và Q không song song với nhau. Điểm A nằm trong P nhưng không thuộc Q , điểm C nằm trong Q nhưng không thuộc P . Dựng điểm B trong P và D trong Q sao cho tứ giác $ABCD$ thỏa mãn các điều kiện sau: nằm trên một mặt phẳng, AB song song với CD , $AD = BC$, và ngoại tiếp một đường tròn.

1st IMO 1959

1. Prove that $\frac{21n+4}{14n+3}$ is irreducible for every natural number n .

2. For what real values of x is $\sqrt{x+\sqrt{2x+1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = A$ given (a) $A = \sqrt{2}$, (b) $A = 1$, (c) $A = 2$, where only non-negative real numbers are allowed in square roots and the root always denotes the non-negative root?

3. Let a, b, c be real numbers. Given the equation for $\cos x$:

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0,$$

form a quadratic equation in $\cos 2x$ whose roots are the same values of x . Compare the equations in $\cos x$ and $\cos 2x$ for $a = 4, b = 2, c = -1$.

4. Given the length $|AC|$, construct a triangle ABC with angle $\angle ABC = 90^\circ$, and the median BM satisfying $BM^2 = AB \cdot BC$.

5. An arbitrary point M is taken in the interior of the segment AB . Squares $AMCD$ and $MBEF$ are constructed on the same side of AB . The circles circumscribed about these squares, with centers P and Q , intersect at M and N .

(a) prove that AF and BC intersect at N ;

(b) prove that the lines MN pass through a fixed point S (independent of M);

(c) find the locus of the midpoints of the segments PQ as M varies.

6. The planes P and Q are not parallel. The point A lies in P but not Q , and the point C lies in Q but not P . Construct points B in P and D in Q such that the quadrilateral $ABCD$ satisfies the following conditions: it lies in a plane, AB is parallel to CD , $AD = BC$, and a circle can be inscribed in $ABCD$ touching the sides.

Kỳ thi IMO lần thứ hai - 1960

1. Tìm tất cả các số có ba chữ số sao cho số đó chia hết cho 11, và kết quả của số đó sau khi chia cho 11 bằng tổng bình phương các chữ số của nó.
2. Với giá trị thực nào của x bất đẳng thức sau thỏa mãn:

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{(1+2x)})^2} < 2x+9$$

3. Cho tam giác vuông ABC, cạnh huyền BC có độ dài a được chia thành n phần bằng nhau, trong đó n là một số lẻ. Phần đoạn thẳng ở chính giữa nhìn A dưới một góc α . Gọi h là khoảng cách từ A xuống BC. Chứng minh rằng:

$$\tan \alpha = \frac{4nh}{(an^2 - a)}$$

4. Dựng tam giác ABC biết độ dài các đường cao hạ từ A, B và độ dài đường trung tuyến kẻ từ A.
5. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có A ở trên A', B ở trên B', C ở trên C', D ở trên D'. X là một điểm bất kì trên đường chéo AC và Y là một điểm bất kì trên B'D'.
 - (a) Tìm quỹ tích trung điểm của XY.
 - (b) Tìm quỹ tích các điểm Z trên XY sao cho $ZY = 2XZ$.
6. Một hình nón có một hình cầu nội tiếp tiếp xúc với mặt đáy và với các mặt nghiêng của hình nón. Một hình trụ ngoại tiếp hình cầu sao cho mặt đáy của nó nằm trên mặt đáy của hình nón. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón và hình trụ.
 - (a) Chứng minh rằng $V_1 \neq V_2$.

- (b) Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của tỉ lệ $\frac{V_1}{V_2}$. Trong trường hợp này xây dựng góc nửa của hình nón.

2nd IMO 1960

1. Determine all 3 digit numbers N which are divisible by 11 and where $N/11$ is equal to the sum of the squares of the digits of N .
2. For what real values of x does the following inequality hold:

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{(1+2x)})^2} < 2x+9?$$

3. In a given right triangle ABC, the hypotenuse BC, length a , is divided into n equal parts with n an odd integer. The central part subtends an angle α at A. h is the perpendicular distance from A to BC. Prove that:

$$\tan \alpha = \frac{4nh}{(an^2 - a)}$$

4. Construct a triangle ABC given the lengths of the altitudes from A and B and the length of the median from A.
5. The cube ABCDA'B'C'D' has A above A', B above B' and so on. X is any point of the face diagonal AC and Y is any point of B'D'.
 - (a) find the locus of the midpoint of XY;
 - (b) find the locus of the point Z which lies one-third of the way along XY, so that $ZY=2XZ$.
6. A cone of revolution has an inscribed sphere tangent to the base of the cone (and to the sloping surface of the cone). A cylinder is circumscribed about the sphere so that its base lies in the base of the cone. The volume of the cone is V_1 and the volume of the cylinder is V_2 .
 - (a) Prove that $V_1 \neq V_2$;

- (b) Find the smallest possible value of $\frac{V_1}{V_2}$. For this case construct the half angle of the cone.

Kỳ thi IMO lần thứ 3 - 1961

1. Giải hệ phương trình sau với ẩn x, y, z :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ xy = z^2 \end{cases}$$

Với điều kiện nào của a, b để x, y, z là các số dương khác nhau?

2. Cho a, b, c là các cạnh của một tam giác và A là diện tích của nó.

Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}A$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

3. Giải phương trình $\cos^n x - \sin^n x = 1$, trong đó n là một số tự nhiên.

4. P là một điểm bên trong tam giác ABC . PA cắt BC tại D , PB cắt AC tại E , và PC cắt AB tại F . Chứng minh rằng ít

nhất một trong các tỉ số: $\frac{AP}{PD}$, $\frac{BP}{PE}$, $\frac{CP}{PF}$ không vượt quá 2, và ít nhất có một tỉ số không nhỏ hơn 2.

5. Dựng tam giác ABC biết độ dài đoạn $AC = b$, $AB = c$ và góc nhọn $\angle AMB = \alpha$, trong đó M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng tam giác này dựng được nếu và chỉ nếu:

$$b \tan \frac{\alpha}{2} \leq c < b$$

Khi nào thì xảy ra dấu bằng?

6. Cho ba điểm không thẳng hàng A, B, C và một mặt phẳng p không song song với mặt phẳng ABC , sao cho các điểm A, B, C nằm cùng phía đối với mặt phẳng p . Lấy ba điểm tùy ý A', B', C' trong p . Gọi A'', B'', C'' lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA', BB', CC' và gọi O là trọng tâm tam giác $A''B''C''$. Tìm quỹ tích các điểm O khi A', B', C' thay đổi.

3rd IMO 1961

1. Solve the following equations for x, y and z :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ xy = z^2 \end{cases}$$

What conditions must a and b satisfy for x, y and z to be distinct positive numbers?

2. Let a, b, c be the sides of a triangle and A its area. Prove that:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}A$$

When do we have equality?

3. Solve the equation $\cos^n x - \sin^n x = 1$, where n is a natural number.

4. P is inside the triangle ABC . PA intersects BC in D , PB intersects AC in E , and PC intersects AB in F .

Prove that at least one of $\frac{AP}{PD}$, $\frac{BP}{PE}$, $\frac{CP}{PF}$ does not exceed 2, and at least one is not less than 2.

5. Construct the triangle ABC , given the lengths $AC=b$, $AB=c$ and the acute angle $\angle AMB = \alpha$, where M is the midpoint of BC . Prove that the construction is possible if and only if

$$b \tan \frac{\alpha}{2} \leq c < b.$$

When does equality hold?

6. Given 3 non-collinear points A, B, C and a plane p not parallel to ABC and such that A, B, C are all on the same side of p . Take three arbitrary points A', B', C' in p . Let A'', B'', C'' be the midpoints of AA', BB', CC' respectively, and let O be the centroid of A'', B'', C'' . What is the locus of O as A', B', C' vary?

Kỳ thi IMO lần thứ 4 - 1962

1. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có chữ số cuối cùng là 6, sao cho nếu số cuối cùng là 6 được di chuyển lên đầu thì được một số gấp 4 lần số đó.

2. Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn:

$$\sqrt{(3-x)} - \sqrt{(x+1)} > \frac{1}{2}$$

3. Hình lập phương $ABCD A'B'C'D'$ có mặt trên là $ABCD$ và mặt dưới là $A'B'C'D'$ với A ở trên A' , B ở trên B' , C ở trên C' , D ở trên D' . Điểm X di chuyển theo chu vi của $ABCD$ với tốc độ không đổi, và điểm Y cũng di chuyển với tốc độ như vậy theo chu vi của $B'C'CB$, khi X chuyển từ A tới B thì Y đồng thời cũng di chuyển tương ứng từ B' tới C' . Tìm quỹ tích trung điểm của XY ?

4. Tìm tất cả các nghiệm thực thỏa mãn: $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

5. Cho ba điểm phân biệt A, B, C trên đường tròn K . Dựng điểm D trên K sao cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn.

6. Cho tam giác cân ABC . Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác và gọi R, r lần lượt là bán kính của đường tròn O_1, O_2 . Chứng minh rằng:

$$O_1 O_2 = \sqrt{R(R-2r)}$$

7. Tứ diện $SABC$ có tính chất sau: tồn tại 5 hình cầu, mỗi hình cầu đều tiếp xúc với 6 cạnh của tứ giác hoặc đường kéo dài của chúng.

(a) Chứng minh rằng tứ diện $SABC$ là đều.

(b) Chứng minh rằng với mỗi tứ diện đều 5 hình cầu như vậy tồn tại.

4th IMO 1962

1. Find the smallest natural number with 6 as the last digit, such that if the final 6 is moved to the front of the number it is multiplied by 4.

2. Find all real x satisfying: $\sqrt{(3-x)} - \sqrt{(x+1)} > \frac{1}{2}$.

3. The cube $ABCD A'B'C'D'$ has upper face $ABCD$ and lower face $A'B'C'D'$ with A directly above A' and so on. The point x moves at constant speed along the perimeter of $ABCD$, and the point Y moves at the same speed along the perimeter of $B'C'CB$. X leaves A towards B at the same moment as Y leaves B' towards C' . What is the locus of the midpoint of XY ?

4. Find all real solutions to $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

5. Given three distinct points A, B, C on a circle K , construct a point D on K , such that a circle can be inscribed in $ABCD$.

6. The radius of the circumcircle of an isosceles triangle is R and the radius of its inscribed circle is r . Prove that the distance between the two centers is $\sqrt{R(R-2r)}$.

7. Prove that a regular tetrahedron has five distinct spheres each tangent to its six extended edges. Conversely, prove that if a tetrahedron has five such spheres then it is regular.

Kỳ thi IMO lần thứ 5 - 1963

1. Với giá trị thực nào của p thì phương trình sau có nghiệm thực:

$$\sqrt{(x^2 - p)} + 2\sqrt{(x^2 - 1)} = x$$

Tìm các nghiệm đó.

2. Cho điểm A và đoạn thẳng BC, xác định quỹ tích tất cả các điểm P trong không gian sao cho góc $\angle APX = 90^\circ$ với X nằm trên BC.

3. Cho đa giác n cạnh có tất cả các góc bằng nhau và độ dài các cạnh thoả mãn: $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Chứng minh rằng tất cả các cạnh cũng bằng nhau.

4. Tìm tất cả các nghiệm $x_1, \dots, x_5$ từ hệ năm phương trình:

$$x_5 + x_2 = yx_1$$

$$x_1 + x_3 = yx_2$$

$$x_2 + x_4 = yx_3$$

$$x_3 + x_5 = yx_4$$

$$x_4 + x_1 = yx_5$$

Ở đây y là tham số.

5. Chứng minh rằng:

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

6. Có năm sinh viên A, B, C, D, E được xếp hạng từ 1 đến 5 trong một cuộc thi với không ai xếp cùng thứ hạng như nhau. Người ta dự đoán rằng kết quả đó có thể theo thứ tự là A, B, C, D, E. Nhưng không có sinh viên nào đạt được kết quả theo như dự đoán trên và không có hai sinh viên liên tiếp trong danh sách dự đoán có kết quả liên tiếp. Ví dụ, kết quả cho C và D không thể tương ứng là 1,2 hoặc 2,3 hoặc 3,4 hoặc 4,5. Một dự đoán khác là có thể theo thứ tự là của D, A, E, C, B. Chính xác là chỉ có hai sinh viên đạt được kết quả như dự đoán và có hai cặp không liên tiếp trong dự đoán đạt được kết quả liên tiếp. Xác định kết quả đạt được của 5 sinh viên trên.

5th IMO 1963

1. For which real values of p does the equation

$$\sqrt{(x^2 - p)} + 2\sqrt{(x^2 - 1)} = x$$
 have real roots? What are the roots?

2. Given a point A and a segment BC, determine the locus of all points P in space for which angle $\angle APX = 90^\circ$ for some X on the segment BC.

3. An n -gon has all angles equal and the lengths of consecutive sides satisfy $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Prove that all the sides are equal.

4. Find all solutions $x_1, \dots, x_5$ to the five equations $x_i + x_{i+2} = y x_{i+1}$ for $i = 1, \dots, 5$, where subscripts are reduced by 5 if necessary.

5. Prove that $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

6. Five students A, B, C, D, E were placed 1 to 5 in a contest with no ties. One prediction was that the result would be the order A, B, C, D, E. But no student finished in the position predicted and to two students predicted to finish consecutively did so. For example, the outcome for C and D was not 1, 2 (respectively), or 2, 3, or 3, 4 or 4, 5. Another prediction was the order D, A, E, C, B. Exactly two students finished in the places predicted and two disjoint pairs predicted to finish consecutively did so. Determine the outcome.

Kỳ thi IMO lần thứ 6 - 1964

- (a) Tìm tất cả các số tự nhiên n với $2^n - 1$ chia hết cho 7.
(b) Chứng minh rằng không có số tự nhiên n nào để $2^n + 1$ chia hết cho 7.
- Giả sử a, b, c là các cạnh của một tam giác.
Chứng minh rằng:

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc.$$

- Tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c . Các đường tiếp tuyến của đường tròn nội tiếp tam giác được dựng song song với các cạnh của tam giác và cắt hai cạnh kia tạo thành ba tam giác. Đối với mỗi tam giác này lại có một đường tròn nội tiếp. Tính tổng diện tích của cả bốn đường tròn nội tiếp trên.
- Có 17 người, mỗi một cặp trong số họ đều trao đổi thư từ cho nhau với một trong ba chủ đề. Chứng minh rằng có ít nhất 3 người viết cho nhau theo cùng một chủ đề. (Hay nói một cách khác, nếu ta tô màu cho các cạnh của một đồ thị đầy đủ 17 đỉnh với ba màu khác nhau, khi đó ta có thể tìm thấy một tam giác có tất cả các cạnh cùng màu).
- Cho năm điểm trong một mặt phẳng sao cho không có hai đường thẳng (trong số các đường thẳng nối hai trong số các điểm trên) nào trùng nhau, song song với nhau hoặc vuông góc với nhau (các đường thẳng được nối từ hai trong năm điểm đã cho). Từ mỗi một điểm ta kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng được nối hai trong bốn điểm còn lại. Hãy xác định số điểm giao nhau lớn nhất giữa các đường thẳng vuông góc có thể có.
- Cho tứ diện ABCD và D_0 là trọng tâm tam giác ABC. Từ A, B, C kẻ các đường thẳng song song với DD_0 lần lượt cắt các mặt phẳng BCD, CAD, ABD tương ứng tại A_0, B_0, C_0 . Chứng minh rằng thể tích của $A_0B_0C_0D_0$ gấp ba lần thể tích của ABCD. Kết quả có đúng khi D_0 là một điểm tùy ý trong tam giác ABC không ?

6th IMO 1964

- (a) Find all natural numbers n for which 7 divides $2^n - 1$.
(b) Prove that there is no natural number n for which 7 divides $2^n + 1$.
- Suppose that a, b, c are the sides of a triangle. Prove that:
$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc.$$
- Triangle ABC has sides a, b, c . Tangents to the inscribed circle are constructed parallel to the sides. Each tangent forms a triangle with the other two sides of the triangle and a circle is inscribed in each of these three triangles. Find the total area of all four inscribed circles.
- Each pair from 17 people exchange letters on one of three topics. Prove that there are at least 3 people who write to each other on the same topic. [In other words, if we color the edges of the complete graph K_{17} with three colors, then we can find a triangle all the same color.]
- 5 points in a plane are situated so that no two of the lines joining a pair of points are coincident, parallel or perpendicular. Through each point lines are drawn perpendicular to each of the lines through two of the other 4 points. Determine the maximum number of intersections these perpendiculars can have.
- ABCD is a tetrahedron and D_0 is the centroid of ABC. Lines parallel to DD_0 are drawn through A, B and C and meet the planes BCD, CAD and ABD in A_0, B_0 , and C_0 respectively. Prove that the volume of ABCD is one-third of the volume of $A_0B_0C_0D_0$. Is the result true if D_0 is an arbitrary point inside ABC?

Kỳ thi IMO lần thứ 7 - 1965

1. Tìm tất cả x trong đoạn $[0, 2\pi]$ thỏa mãn:

$$2\cos x \leq |\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}| \leq \sqrt{2}$$

2. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

Trong đó các hệ số a_{ij} ($i, j = \overline{1, 3}$) thỏa mãn:

(a) a_{ii} là các số dương.

(b) a_{ij} là các số âm ($i \neq j$).

(c) Tổng các hệ số trong mỗi phương trình là dương.

Chứng minh rằng $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình trên.

3. Tứ diện ABCD được chia thành hai phần bởi một mặt phẳng song song với AB và CD. Khoảng cách từ mặt phẳng đó đến AB gấp k lần đến CD. Tính tỉ lệ giữa thể tích của hai phần được chia đó.

4. Tìm tất cả các bộ bốn số thực sao cho tổng của bất kì một số nào đó và tích của ba số còn lại là bằng 2.

5. Cho tam giác OAB có góc O nhọn. M là một điểm tùy ý trên AB. Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống OA và OB.

(a) Tìm quỹ tích tất cả các điểm H là trực tâm của tam giác OPQ khi M thay đổi trên AB.

(b) Quỹ tích đó sẽ thay đổi như thế nào nếu M là một điểm tùy ý trong tam giác OAB?

6. Cho n điểm trong mặt phẳng ($n > 2$). Chứng minh rằng: có nhiều nhất n cặp điểm là có khoảng cách lớn nhất (giữa các khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ).

7th IMO 1965

1. Find all x in the interval $[0, 2\pi]$ which satisfy:

$$2\cos x \leq |\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}| \leq \sqrt{2}$$

2. The coefficients a_{ij} of the following equations

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

satisfy the following:

(a) a_{11}, a_{22}, a_{33} are positive,

(b) other a_{ij} are negative ($i \neq j$)

(c) the sum of the coefficients in each equation is positive.

Prove that the only solution is $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

3. The tetrahedron ABCD is divided into two parts by a plane parallel to AB and CD. The distance of the plane from AB is k times its distance from CD. Find the ratio of the volumes of the two parts.

4. Find all sets of four real numbers such that the sum of any one and the product of the other three is 2.

5. The triangle OAB has angle O acute. M is an arbitrary point on AB. P and Q are the feet of the perpendiculars from M to OA and OB respectively. What is the locus of H, the orthocenter of the triangle OPQ (the point where its altitudes meet)? What is the locus if M is allowed to vary of the interior of OAB?

6. Given $n > 2$ points in the plane, prove that at most n pairs of points are the maximum distance apart (of any two points in the set).

Kỳ thi IMO lần thứ 8 - 1966

1. Đề thi toán gồm có 3 bài toán A, B, C.

Có 25 thí sinh đã giải ít nhất một trong ba bài trên. Trong số những thí sinh không giải được bài A, số thí sinh giải bài B nhiều gấp đôi số thí sinh giải bài C.

Số thí sinh chỉ giải bài A nhiều hơn so với thí sinh giải bài A và ít nhất một trong các bài còn lại là 1.

Số thí sinh chỉ giải bài A bằng số thí sinh chỉ giải bài B cộng với thí sinh chỉ giải bài C.

Hỏi có tất cả có bao nhiêu thí sinh chỉ giải được bài B?

2. Chứng minh rằng nếu :

$$BC + AC = tg \frac{C}{2} (BC \operatorname{tg} A + AC \operatorname{tg} B)$$

thì tam giác ABC cân.

3. Chứng minh rằng tổng khoảng cách từ một điểm tới các đỉnh của một tứ diện đều là nhỏ nhất nếu nó là tâm của tứ diện.

4. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$$

với bất kì số tự nhiên n và số thực x (với $\sin 2^n x \neq 0$).

5. Giải hệ phương trình:

$$|a_i - a_1|x_1 + |a_i - a_2|x_2 + |a_i - a_3|x_3 + |a_i - a_4|x_4 = 1 \text{ với } i = 1, 2, 3, 4.$$

Trong đó: a_i là các số thực khác nhau.

6. Lấy bất kì các điểm K, L, M lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Chứng minh rằng có ít nhất một trong số các tam giác AML, BKM, CLK có diện tích $\leq \frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC.

8th IMO 1966

1. Problems A, B and C were posed in a mathematical contest. 25 competitors solved at least one of the three. Amongst those who did not solve A, twice as many solved B as C. The number solving only A was one more than the number solving A and at least one other. The number solving just A equalled the number solving just B plus the number solving just C. How many solved just B?

2. Prove that if $BC + AC = tg \frac{C}{2} (BC \operatorname{tg} A + AC \operatorname{tg} B)$, then the triangle ABC is isosceles.

3. Prove that a point in space has the smallest sum of the distances to the vertices of a regular tetrahedron iff it is the center of the tetrahedron.

4. Prove that

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$$

for any natural number n and any real x (with $\sin 2^n x$ non-zero).

5. Solve the equations:

$$|a_i - a_1|x_1 + |a_i - a_2|x_2 + |a_i - a_3|x_3 + |a_i - a_4|x_4 = 1, i = 1, 2, 3, 4, \text{ where } a_i \text{ are distinct reals.}$$

6. Take any points K, L, M on the sides BC, CA, AB of the triangle ABC. Prove that at least one of the triangles AML, BKM, CLK has area $\leq \frac{1}{4}$ area ABC.

Kỳ thi IMO lần thứ 9 - 1967

1. Cho hình bình hành ABCD có $AB = a$, $AD = 1$, $\angle BAD = A$ và tam giác ABD có tất cả các góc đều nhọn. Chứng minh rằng các đường tròn có bán kính bằng 1 và tâm là A, B, C, D bao trùm hình bình hành nếu và chỉ nếu:

$$a \leq \cos A + \sqrt{3} \sin A$$

2. Chứng minh rằng tứ diện chỉ có một cạnh có độ dài lớn hơn 1 có thể tích lớn nhất là $\frac{1}{8}$.

3. Cho k, m, n là các số tự nhiên sao cho $m + k + 1$ là số nguyên tố lớn hơn $n + 1$.

Và cho $c_s = s(s+1)$.

Chứng minh rằng: $(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \dots (c_{m+n} - c_k)$ chia hết cho tích $c_1 c_2 \dots c_n$.

4. Cho các tam giác nhọn $A_0 B_0 C_0$ và $A_1 B_1 C_1$ (tam giác nhọn là tam giác có tất cả các góc đều nhọn). Dựng tam giác ABC có diện tích lớn nhất sao cho nó ngoại tiếp tam giác $A_0 B_0 C_0$ (BC chứa A_0 , CA chứa B_0 , AB chứa C_0) và đồng dạng với tam giác $A_1 B_1 C_1$.

5. Giả sử $a_1, \dots, a_8$ là các số thực không đồng thời bằng 0. Cho $c_n = a_1^n + a_2^n + \dots + a_8^n$ với $n = 1, 2, 3, \dots$

Biết rằng có vô hạn số c_n bằng 0. Hãy tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $c_n = 0$.

6. Tổng số huy chương được trao tặng trong một cuộc thi đấu thể thao kéo dài n ngày là m . Trong ngày thứ nhất có 1 huy chương và $1/7$ huy chương còn lại được trao tặng. Trong ngày thứ hai có 2 huy chương và $1/7$ huy chương được trao tặng, và cứ theo quy luật như thế. Trong ngày cuối cùng, còn lại n huy chương được trao tặng. Tìm m, n .

9th IMO 1967

1. The parallelogram ABCD has $AB = a$, $AD = 1$, angle $\angle BAD = A$, and the triangle ABD has all angles acute. Prove that circles radius 1 and center A, B, C, D cover the parallelogram iff

$$a \leq \cos A + \sqrt{3} \sin A$$

2. Prove that a tetrahedron with just one edge length greater than 1 has volume at most $1/8$.

3. Let k, m, n be natural numbers such that $m + k + 1$ is a prime greater than $n + 1$. Let $c_s = s(s+1)$. Prove that:

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \dots (c_{m+n} - c_k)$$

is divisible by the product $c_1 c_2 \dots c_n$.

4. $A_0 B_0 C_0$ and $A_1 B_1 C_1$ are acute-angled triangles. Construct the triangle ABC with the largest possible area which is circumscribed about $A_0 B_0 C_0$ (BC contains A_0 , CA contains B_0 , and AB contains C_0) and similar to $A_1 B_1 C_1$.

5. $a_1, \dots, a_8$ are reals, not all zero. Let $c_n = a_1^n + a_2^n + \dots + a_8^n$ for $n = 1, 2, 3, \dots$. Given that an infinite number of c_n are zero, find all n for which c_n is zero.

6. In a sports contest a total of m medals were awarded over n days. On the first day one medal and $1/7$ of the remaining medals were awarded. On the second day two medals and $1/7$ of the remaining medals were awarded, and so on. On the last day, the remaining n medals were awarded. How many medals were awarded, and over how many days?

Kỳ thi IMO lần thứ 10 - 1968

1. Tìm tất cả các tam giác có chiều dài các cạnh là các số nguyên liên tiếp, và một trong các góc của tam giác đó gấp đôi một góc khác.
2. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho tích của tất cả các chữ số của nó là $n^2 - 10n - 22$.
3. a, b, c là các số thực với $a \neq 0$.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn hệ phương trình gồm n phương trình sau:

$$ax_i^2 + bx_i + c = x_{i+1}, \text{ với } 1 \leq i < n.$$

$$ax_n^2 + bx_n + c = x_1$$

Chứng minh rằng hệ có 0, 1, hoặc >1 nghiệm thực tùy theo $(b-1)^2 - 4ac$ là $<0, =0$, hay >0 .

4. Chứng minh rằng mọi tứ diện tồn tại đỉnh mà ba cạnh xuất phát từ đỉnh này tạo thành ba cạnh của một tam giác.
5. Cho $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ - là tập hợp tất cả các số thực), sao cho tồn tại $a > 0$ thỏa mãn:

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{(f(x) - f(x)^2)} \text{ với mọi } x.$$

Chứng minh: hàm số f tuần hoàn, và hãy chỉ ra một hàm f như vậy không là hằng số với $a = 1$.

6. Với mọi số tự nhiên n hãy ước lượng tổng:

$$\left\lfloor \frac{(n+1)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(n+2)}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(n+4)}{8} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(n+2^k)}{2^{k+1}} \right\rfloor + \dots$$

Trong đó: $[x]$ biểu diễn số nguyên lớn nhất $\leq x$.

10th IMO 1968

1. Find all triangles whose side lengths are consecutive integers, and one of whose angles is twice another.
2. Find all natural numbers n the product of whose decimal digits is $n^2 - 10n - 22$.
3. a, b, c are real with a non-zero. $x_1, x_2, \dots, x_n$ satisfy the n equations:

$$ax_i^2 + bx_i + c = x_{i+1}, \text{ for } 1 \leq i < n$$

$$ax_n^2 + bx_n + c = x_1$$

Prove that the system has zero, 1 or >1 real solutions according as $(b-1)^2 - 4ac$ is $<0, =0$ or >0 .

4. Prove that every tetrahedron has a vertex whose three edges have the right lengths to form a triangle.
5. Let f be a real-valued function defined for all real numbers, such that for some $a > 0$ we have

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{(f(x) - f(x)^2)} \text{ for all } x.$$

Prove that f is periodic, and give an example of such a non-constant f for $a = 1$.

6. For every natural number n evaluate the sum

$$\left\lfloor \frac{(n+1)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(n+2)}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(n+4)}{8} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(n+2^k)}{2^{k+1}} \right\rfloor + \dots, \text{ where } [x] \text{ denotes the greatest}$$

integer $\leq x$.

Kỳ thi IMO lần thứ 11 - 1969

1. Chứng minh rằng tồn tại vô số các số nguyên dương m để $n^4 + m$ không là số nguyên tố với mọi n nguyên dương.

2. Cho $f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2} \cos(a_2 + x) + \frac{1}{4} \cos(a_3 + x) + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos(a_n + x)$ trong đó a_i là các hằng số thực, x là biến thực.

Chứng minh rằng: Nếu $f(x_1) = f(x_2) = 0$ thì $(x_1 - x_2) = k\pi$, với k là một số nguyên.

3. Với mỗi $k = 1, 2, 3, 4, 5$ tìm điều kiện cần và đủ với $a > 0$ sao cho tồn tại một tứ diện có k cạnh chiều dài a và các cạnh còn lại có chiều dài là 1.

4. C là một điểm nằm trên nửa đường tròn đường kính AB (ở giữa A và B). D là chân đường vuông góc kẻ từ C xuống AB . Đường tròn K_1 nội tiếp tam giác ABC , đường tròn K_2 tiếp xúc với CD , DA và nửa đường tròn đường kính AB . Đường tròn K_3 tiếp xúc với CD , DB và nửa đường tròn đường kính AB . Chứng minh rằng K_1, K_2, K_3 có chung một tiếp tuyến khác AB .

5. Cho n điểm nằm trong một mặt phẳng ($n > 4$), trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có nhiều nhất $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ tứ diện lồi có các đỉnh trong số n điểm trên.

6. Cho các số thực $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ thỏa mãn $x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 y_1 > z_1^2$ và $x_2 y_2 > z_2^2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2}$$

Điều kiện cần và đủ để dấu đẳng thức xảy ra.

11th IMO 1969

1. Prove that there are infinitely many positive integers m , such that $n^4 + m$ is not prime for any positive integer n .

2. Let $f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2} \cos(a_2 + x) + \frac{1}{4} \cos(a_3 + x) + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos(a_n + x)$, where a_i are real constants and x is a real variable. If $f(x_1) = f(x_2) = 0$, prove that $x_1 - x_2$ is a multiple of π .

Chứng minh rằng: Nếu $f(x_1) = f(x_2) = 0$ thì $(x_1 - x_2) = k\pi$, với k là một số nguyên.

3. For each of $k = 1, 2, 3, 4, 5$ find necessary and sufficient conditions on $a > 0$ such that there exists a tetrahedron with k edges length a and the remainder length 1.

4. C is a point on the semicircle diameter AB , between A and B . D is the foot of the perpendicular from C to AB . The circle K_1 is the in-circle of ABC , the circle K_2 touches CD , DA and the semicircle, the circle K_3 touches CD , DB and the semicircle. Prove that K_1, K_2 and K_3 have another common tangent apart from AB .

5. Given $n > 4$ points in the plane, no three collinear. Prove that there are at least $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ convex quadrilaterals with vertices amongst the n points.

6. Given real numbers $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$, satisfying $x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 y_1 > z_1^2$, and $x_2 y_2 > z_2^2$, prove that:

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2}$$

Give necessary and sufficient conditions for equality.

Kỳ thi IMO lần thứ 12 - 1970

1. M là một điểm trên cạnh AB của tam giác ABC. r, r_1, r_2 lần lượt là bán kính của các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, AMC, BMC. q là bán kính của đường tròn tiếp xúc với ba cạnh AB, và CA, CB kéo dài. q_1 là bán kính của đường tròn tiếp xúc với BC và AB, AC kéo dài. q_2 là bán kính của đường tròn tiếp xúc với CA và BA, BC kéo dài. Chứng minh rằng: $r_1 r_2 q = r q_1 q_2$

2. Cho $0 \leq x_i < b$ với $i = 0, 1, \dots, n$ và $x_n > 0, x_{n-1} > 0$.

Nếu $a > b$, và: $A = x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \dots + x_0 a^0$; $B = x_n b^n + x_{n-1} b^{n-1} + \dots + x_0 b^0$
 $A' = x_{n-1} a^{n-1} + x_{n-2} a^{n-2} + \dots + x_0 a^0$; $B' = x_{n-1} b^{n-1} + x_{n-2} b^{n-2} + \dots + x_0 b^0$.

Chứng minh rằng: $A'B < AB'$.

3. Cho các số thực $a_0, a_1, a_2, \dots$ thỏa mãn: $1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$
 các số thực $b_1, b_2, b_3, \dots$ được định nghĩa bởi:

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k})}{\sqrt{a_k}}$$

(a) Chứng minh rằng: $0 \leq b_n < 2$.

(b) Cho c thỏa mãn $0 \leq c < 2$. Chứng minh rằng ta có thể tìm được a_n sao cho $b_n > c$ với mọi n đủ lớn.

4. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tập $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ có thể được chia ra thành hai tập con mà tích của tất cả các số trong mỗi tập con là bằng nhau.

5. Cho tứ diện ABCD có $\angle BDC = 90^\circ$ và chân đường cao hạ từ D xuống mặt phẳng ABC là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2).$$

Trong trường hợp nào thì dấu đẳng thức xảy ra ?

6. Cho 100 điểm đồng phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng nhiều nhất có 70% số tam giác được tạo thành từ các điểm trên có tất cả các góc đều nhọn.

12th IMO 1970

1. M is any point on the side AB of the triangle ABC. r, r_1, r_2 are the radii of the circles inscribed in ABC, AMC, BMC. q is the radius of the circle on the opposite side of AB to C, touching the three sides of AB and the extensions of CA and CB. Similarly, q_1 and q_2 . Prove that $r_1 r_2 q = r q_1 q_2$.

2. We have $0 \leq x_i < b$ for $i = 0, 1, \dots, n$ and $x_n > 0, x_{n-1} > 0$. If $a > b$, and $x_n x_{n-1} \dots x_0$ represents the number A base a and B base b , whilst $x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0$ represents the number A' base a and B' base b , prove that $A'B < AB'$.

3. The real numbers $a_0, a_1, a_2, \dots$ satisfy $1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$. $b_1, b_2, b_3, \dots$ are defined by

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k})}{\sqrt{a_k}}.$$

(a) Prove that $0 \leq b_n < 2$.

(b) Given c satisfying $0 \leq c < 2$, prove that we can find a_n so that $b_n > c$ for all sufficiently large n .

4. Find all positive integers n such that the set $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ can be partitioned into two subsets so that the product of the numbers in each subset is equal.

5. In the tetrahedron ABCD, angle $BDC = 90$ and the foot of the perpendicular from D to ABC is the intersection of the altitudes of ABC. Prove that:

$$(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2).$$

When do we have equality?

6. Given 100 coplanar points, no 3 collinear, prove that at most 70% of the triangles formed by the points have all angles acute.

Kỳ thi IMO lần thứ 13 - 1971

1. Cho $E_n = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n) + \dots + (a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})$. S_n là định đề mà $E_n \geq 0$ với mọi số thực a_i .

Chứng minh rằng: S_n đúng với $n = 3$ và $n = 5$, nhưng lại sai với những giá trị khác của n (với $n > 2$).

2. Cho P_1 là một đa giác lồi với các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_9$. P_i là đa giác thu được từ P_1 bằng cách tịnh tiến mà di chuyển A_1 tới A_i . Chứng minh rằng: có ít nhất hai đa giác trong số các đa giác $P_1, P_2, \dots, P_9$ có chung một điểm trong.

3. Chứng minh rằng ta có thể tìm được một tập vô hạn các số nguyên dương dạng $2^n - 3$ (trong đó n cũng là một số nguyên dương) mà với mọi cặp của nó nguyên tố cùng nhau.

4. Tất cả các mặt của tứ diện ABCD có các góc đều là nhọn. Lấy điểm X trong đoạn AB, Y trong BC, Z trong CD, và T trong AD.

(a) Nếu $\angle DAB + \angle BCD \neq \angle CDA + \angle ABC$, chứng minh rằng: không có đường đi đóng XYZTX có độ dài ngắn nhất.

(b) Nếu $\angle DAB + \angle BCD = \angle CDA + \angle ABC$ thì có vô số các đường đi ngắn nhất XYZTX mà mỗi đường có độ dài là

$2AC \sin k$, trong đó: $2k = \angle BAC + \angle CAD + \angle DAB$.

5. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m ta có thể tìm được một tập S hữu hạn các điểm trong mặt phẳng sao cho với bất kì điểm A thuộc S tồn tại đúng m điểm thuộc S có khoảng cách từ A đến là 1 đơn vị.

6. Cho $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ là một ma trận vuông với a_{ij} là các số nguyên không âm. Với mỗi i, j mà có $a_{ij} = 0$ thì tổng của các phần tử ở hàng thứ i và cột thứ j sẽ không nhỏ hơn n . Chứng minh rằng: tổng của tất cả các phần tử của

ma trận không nhỏ hơn $\frac{n^2}{2}$.

13th IMO 1971

1. Let $E_n = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n) + \dots + (a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})$. Let S_n be the proposition that $E_n \geq 0$ for all real a_i .

Prove that S_n is true for $n = 3$ and 5 , but for no other $n > 2$.

2. Let P_1 be a convex polyhedron with vertices $A_1, A_2, \dots, A_9$. Let P_i be the polyhedron obtained from P_1 by a translation that moves A_1 to A_i . Prove that at least two of the polyhedra $P_1, P_2, \dots, P_9$ have an interior point in common.

3. Prove that we can find an infinite set of positive integers of the form $2^n - 3$ (where n is a positive integer) every pair of which are relatively prime.

4. All faces of the tetrahedron ABCD are acute-angled. Take a point X in the interior of the segment AB, and similarly Y in BC, Z in CD and T in AD.

(a) If $\angle DAB + \angle BCD \neq \angle CDA + \angle ABC$, then prove that none of the closed paths XYZTX has minimal length;

(b) If $\angle DAB + \angle BCD = \angle CDA + \angle ABC$, then there are infinitely many shortest paths XYZTX, each with length $2AC \sin k$, where $2k = \angle BAC + \angle CAD + \angle DAB$.

5. Prove that for every positive integer m we can find a finite set S of points in the plane, such that given any point A of S, there are exactly m points in S at unit distance from A.

6. Let $A = (a_{ij})$, where $i, j = 1, 2, \dots, n$, be a square matrix with all a_{ij} non-negative integers. For each i, j such that $a_{ij} = 0$, the sum of the elements in the i th row and the j th column is at least n . Prove that the sum of all the elements in the matrix is at least $n^2/2$.

Kỳ thi IMO lần thứ 14 - 1972

1. Cho bất kì một tập 10 số khác nhau trong đoạn $[10, 99]$. Chứng minh rằng: luôn tìm được hai tập con rời nhau sao cho các tập đều có tổng như nhau.
2. Cho $n > 4$. Chứng minh rằng: mọi tứ giác nội tiếp đường tròn đều có thể chia thành n tứ giác nội tiếp đường tròn.
3. Chứng minh rằng: $(2m)!(2n)!$ là bội số của $m!n!(m+n)!$ với mọi số nguyên không âm n và m .
4. Tìm tất cả các nghiệm thực dương của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leq 0 \\ (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0 \\ (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0 \\ (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0 \\ (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leq 0 \end{cases}$$

5. Cho f và g là hai hàm nhận giá trị thực trên tập các số thực.

Với mọi x và y : $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$.

Hàm f không đồng nhất bằng 0 và $|f(x)| \leq 1$ với mọi x .

Chứng minh rằng: $|g(x)| \leq 1$ với mọi x .

6. Cho 4 mặt phẳng khác nhau và song song với nhau.

Chứng minh rằng: tồn tại một tứ diện đều với mỗi đỉnh nằm trên mỗi mặt phẳng.

14th IMO 1972

1. Given any set of ten distinct numbers in the range 10, 11, ..., 99, prove that we can always find two disjoint subsets with the same sum.
2. Given $n > 4$, prove that every cyclic quadrilateral can be dissected into n cyclic quadrilaterals.
3. Prove that $(2m)!(2n)!$ is a multiple of $m!n!(m+n)!$ for any non-negative integers m and n .
4. Find all positive real solutions to:

$$\begin{cases} (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leq 0 \\ (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0 \\ (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0 \\ (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0 \\ (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leq 0 \end{cases}$$

5. f and g are real-valued functions defined on the real line. For all x and y , $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$. f is not identically zero and $|f(x)| \leq 1$ for all x . Prove that $|g(x)| \leq 1$ for all x .

6. Given four distinct parallel planes, prove that there exists a regular tetrahedron with a vertex on each plane.

Kỳ thi IMO lần thứ 15 - 1973

1. $OP_1, OP_2, \dots, OP_{2n+1}$ là các vector đơn vị trong một mặt phẳng. $P_1, P_2, \dots, P_{2n+1}$ là các điểm nằm cùng phía đối với một đường thẳng đi qua O.

Chứng minh rằng: $|OP_1 + \dots + OP_{2n+1}| \geq 1$.

2. Liệu có thể tìm được một tập hữu hạn các điểm không đồng phẳng sao cho nếu có hai điểm bất kì A, B thì sẽ tồn tại hai điểm khác C và D mà hai đường thẳng AB và CD song song với nhau và khác nhau.

3. Cho a, b là các số thực để phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2$.

4. Một người lính cần di chuyển trên một vùng có hình dáng là một tam giác đều để dò mìn. Máy dò có hiệu lực trong vòng bán kính bằng một nửa đường cao của tam giác. Anh ta bắt đầu từ một đỉnh của tam giác. Tiếp theo anh ta phải đi như thế nào để di chuyển ngắn nhất mà vẫn dò mìn trong toàn bộ vùng đó.

5. G là tập hợp của các hàm f, trong đó f không phải là hằng số và là hàm tuyến tính thực có dạng: $f(x) = ax + b$ với số thực a, b nào đó. Tập G thỏa mãn các tính chất sau:

Nếu f và g thuộc G thì fg cũng thuộc G, trong đó fg được định nghĩa bởi $fg(x) = f(g(x))$. Hàm ngược f^{-1} của f được

định nghĩa như sau: Nếu $f = ax + b$ thì $f^{-1} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$. Nếu f thuộc G thì hàm ngược của nó f^{-1} cũng thuộc G. Mọi hàm

f thuộc G đều có một điểm cố định, nói cách khác ta có thể tìm được x_f sao cho $f(x_f) = x_f$.

Chứng minh rằng tất cả các hàm thuộc G đều có chung một điểm cố định.

6. $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương và q thỏa mãn: $0 < q < 1$. Tìm $b_1, b_2, \dots, b_n$ sao cho:

(a) $a_i < b_i$ với $i = 1, 2, \dots, n$,

(b) $q < \frac{b_{i+1}}{b_i} < \frac{1}{q}$ với $i = 1, 2, \dots, n-1$,

(c) $b_1 + b_2 + \dots + b_n < (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(1 + q)/(1 - q)$.

15th IMO 1973

1. $OP_1, OP_2, \dots, OP_{2n+1}$ are unit vectors in a plane. $P_1, P_2, \dots, P_{2n+1}$ all lie on the same side of a line through O. Prove that $|OP_1 + \dots + OP_{2n+1}| \geq 1$.

2. Can we find a finite set of non-coplanar points, such that given any two points, A and B, there are two others, C and D, with the lines AB and CD parallel and distinct?

3. a and b are real numbers for which the equation $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ has at least one real solution. Find the least possible value of $a^2 + b^2$.

4. A soldier needs to sweep a region with the shape of an equilateral triangle for mines. The detector has an effective radius equal to half the altitude of the triangle. He starts at a vertex of the triangle. What path should he follow in order to travel the least distance and still sweep the whole region?

5. G is a set of non-constant functions f. Each f is defined on the real line and has the form $f(x) = ax + b$ for some real a, b. If f and g are in G, then so is fg, where fg is defined by $fg(x) = f(g(x))$. If f is in G, then so is the inverse f^{-1} . If $f(x) = ax + b$, then $f^{-1}(x) = x/a - b/a$. Every f in G has a fixed point (in other words we can find x_f such that $f(x_f) = x_f$). Prove that all the functions in G have a common fixed point.

6. $a_1, a_2, \dots, a_n$ are positive reals, and q satisfies $0 < q < 1$. Find $b_1, b_2, \dots, b_n$ such that:

(a) $a_i < b_i$ for $i = 1, 2, \dots, n$,

(b) $q < b_{i+1}/b_i < 1/q$ for $i = 1, 2, \dots, n-1$,

(c) $b_1 + b_2 + \dots + b_n < (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(1 + q)/(1 - q)$.

Kỳ thi IMO lần thứ 16 - 1974

1. Ba người chơi một trò chơi như sau: Có ba lá bài, mỗi lá được ghi bởi các số nguyên dương khác nhau. Mỗi một vòng chơi các lá bài được phân phối ngẫu nhiên cho những người chơi và mỗi người sẽ nhận được một số trên lá bài của mình. Cộng tất cả các số thu được ở các vòng chơi của mỗi người để tính điểm. Biết rằng: sau 2 vòng hay nhiều hơn 2 vòng người thứ nhất nhận được 20, người thứ hai là 10, và người thứ ba là 9. Trong vòng chơi cuối cùng người thứ hai nhận được số lớn nhất. Hỏi ai đã nhận được con số ở giữa trong vòng thứ nhất.

2. Chứng minh rằng tồn tại một điểm D trên cạnh AB của tam giác ABC để $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$ nếu và chỉ nếu

$$\sin A \cdot \sin B \leq \sin^2 \frac{C}{2}.$$

3. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=0}^n 2^{3k} C_{2n+1}^{2k+1}$$

không chia hết cho 5 với bất kì số nguyên không âm n.

Trong đó:
$$C_r^s = \frac{r!}{s!(r-s)!}$$

4. Một bàn cờ 8 x 8 được chia thành p hình chữ nhật rời nhau (theo đường lưới giữa các ô vuông) sao cho mỗi một hình chữ nhật sẽ có số ô trắng bằng với số ô đen, và các hình có số ô vuông khác nhau. Tìm giá trị lớn nhất có thể của p và tất cả các bộ có thể của kích thước các hình chữ nhật.

5. Xác định tất cả các giá trị dương của:

$$\frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

với a, b, c, d là các số thực dương.

6. Cho P(x) là một đa thức bậc d (d > 0) với các hệ số nguyên. Giả sử n là số nghiệm nguyên khác nhau của P(x) = 1 hoặc P(x) = -1. Chứng minh rằng: $n \leq d + 2$.

16th IMO 1974

1. Three players play the following game. There are three cards each with a different positive integer. In each round the cards are randomly dealt to the players and each receives the number of counters on his card. After two or more rounds, one player has received 20, another 10 and the third 9 counters. In the last round the player with 10 received the largest number of counters. Who received the middle number on the first round?

2. Prove that there is a point D on the side AB of the triangle ABC, such that CD is the geometric mean of AD and DB if and only if $\sin A \cdot \sin B \leq \sin^2 \frac{C}{2}$.

3. Prove that $\sum_{k=0}^n 2^{3k} C_{2n+1}^{2k+1}$ is not divisible by 5 for any non-negative integer n.

[$C_r^s = \frac{r!}{s!(r-s)!}$ denotes the binomial coefficient.]

4. An 8 x 8 chessboard is divided into p disjoint rectangles (along the lines between squares), so that each rectangle has the same number of white squares as black squares, and each rectangle has a different number of squares. Find the maximum possible value of p and all possible sets of rectangle sizes.

5. Determine all possible values of

$$\frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

for positive reals a, b, c, d.

6. Let P(x) be a polynomial with integer coefficients of degree d > 0. Let n be the number of distinct integer roots to P(x) = 1 or -1. Prove that $n \leq d + 2$.

Kỳ thi IMO lần thứ 17 - 1975

1. Cho $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ và $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ là các số thực. Chứng minh rằng: nếu z_i là một hoán vị bất kì của y_i thì:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$$

2. Cho $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ là các số nguyên dương. Chứng minh rằng: Với mọi $i \geq 1$ tồn tại vô số a_n sao cho có thể được biểu diễn dưới dạng: $a_n = ra_i + sa_j$, với r và s là các số nguyên dương và $j > i$.

3. Cho tam giác ABC bất kì. Về phía ngoài tam giác hãy dựng các tam giác ABR, BCP, CAQ sao cho $PBC = 45^\circ$, $PCB = 30^\circ$, $QAC = 45^\circ$, $QCA = 30^\circ$, $RAB = 15^\circ$, và $RBA = 15^\circ$. Chứng minh rằng tam giác RPQ vuông cân tại R.

4. Cho A là tổng các chữ số thập phân của 4444^{4444} và B là tổng các chữ số thập phân của A. Tìm tổng các chữ số thập phân của B.

5. Hãy tìm 1975 điểm trên chu vi của một đường tròn đơn vị sao cho khoảng cách giữa mỗi cặp điểm là một số hữu tỉ. Hãy chỉ ra sự tồn tại hoặc chứng minh rằng không thể tìm được.

6. Tìm tất cả các đa thức $P(x, y)$ theo hai biến sao cho:

(1) $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$ với n nguyên dương nào đó và với mọi số thực t, x, y .

(2) $P(y + z, x) + P(z + x, y) + P(x + y, z) = 0$ với mọi số thực x, y, z .

(3) $P(1, 0) = 1$.

17th IMO 1975

1. Let $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, and $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ be real numbers. Prove that if z_i is any permutation of the y_i , then:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$$

2. Let $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ be positive integers. Prove that for every $i \geq 1$, there are infinitely many a_n that can be written in the form $a_n = ra_i + sa_j$, with r, s positive integers and $j > i$.

3. Given any triangle ABC, construct external triangles ABR, BCP, CAQ on the sides, so that angle PBC = 45, angle PCB = 30, angle QAC = 45, angle QCA = 30, angle RAB = 15, angle RBA = 15. Prove that angle QRP = 90 and QR = RP.

4. Let A be the sum of the decimal digits of 4444^{4444} , and B be the sum of the decimal digits of A. Find the sum of the decimal digits of B.

5. Find 1975 points on the circumference of a unit circle such that the distance between each pair is rational, or prove it impossible.

6. Find all polynomials $P(x, y)$ in two variables such that:

(1) $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$ for some positive integer n and all real t, x, y ;

(2) for all real x, y, z : $P(y + z, x) + P(z + x, y) + P(x + y, z) = 0$;

(3) $P(1, 0) = 1$.

Kỳ thi IMO lần thứ 18 - 1976

1. Một tứ diện lồi có diện tích là 32 và tổng của hai cạnh đối diện và một đường chéo là 16. Tìm tất cả các độ dài có thể của đường chéo còn lại.

2. Cho $P_1(x) = x^2 - 2$ và $P_{i+1} = P_1(P_i(x))$ với $i = 1, 2, 3, \dots$

Hãy chỉ ra rằng với mọi n phương trình $P_n(x) = x$ có các nghiệm thực khác nhau.

3. Một hình hộp chữ nhật có thể được lấp đầy với các hình lập phương đơn vị. Nếu người ta đặt được càng nhiều càng tốt các hình lập phương thể tích 2 vào trong hộp thì sẽ chiếm thể tích là 40% thể tích của hộp. Xác định các kích thước có thể của hộp.

4. Xác định số lớn nhất là tích của các số nguyên dương có tổng là 1976.

5. Cho n là một số nguyên dương và $m = 2n$. $a_{ij} = 0, 1$, hoặc -1 (với $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$).

$x_1, x_2, \dots, x_m$ là m ẩn chưa biết thỏa mãn n phương trình sau:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m = 0, \quad \text{với } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Chứng minh rằng: hệ phương trình trên có các nghiệm nguyên có giá trị tuyệt đối lớn nhất là bằng m và không đồng thời bằng 0.

6. Cho dãy $u_0, u_1, u_3, \dots$ được định nghĩa bởi: $u_0 = 2, u_1 = \frac{5}{2}, u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1$ với $n = 1, 2, \dots$. Chứng minh rằng:

$$[u_n] = 2^{\frac{(2n-(-1)^n)}{3}}$$

Trong đó: $[x]$ biểu diễn số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x .

18th IMO 1976

1. A plane convex quadrilateral has area 32, and the sum of two opposite sides and a diagonal is 16. Determine all possible lengths for the other diagonal.

2. Let $P_1(x) = x^2 - 2$, and $P_{i+1} = P_1(P_i(x))$ for $i = 1, 2, 3, \dots$. Show that the roots of $P_n(x) = x$ are real and distinct for all n .

3. A rectangular box can be completely filled with unit cubes. If one places as many cubes as possible, each with volume 2, in the box, with their edges parallel to the edges of the box, one can fill exactly 40% of the box. Determine the possible dimensions of the box.

4. Determine the largest number which is the product of positive integers with sum 1976.

5. n is a positive integer and $m = 2n$. $a_{ij} = 0, 1$ or -1 for $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. The m unknowns $x_1, x_2, \dots, x_m$ satisfy the n equations:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m = 0,$$

for $i = 1, 2, \dots, n$. Prove that the system has a solution in integers of absolute value at most m , not all zero.

6. The sequence $u_0, u_1, u_2, \dots$ is defined by: $u_0 = 2, u_1 = 5/2, u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1$ for $n = 1, 2, \dots$. Prove that

$$[u_n] = 2^{\frac{(2n-(-1)^n)}{3}}$$

where $[x]$ denotes the greatest integer less than or equal to x .

Kỳ thi IMO lần thứ 19 - 1977

1. Dựng về phía bên trong hình vuông ABCD các tam giác đều ABK, BCL, CDM, DAN. Hãy chỉ ra rằng các trung điểm của KL, LM, MN, NK và các trung điểm của AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN tạo thành đa giác đều có 12 cạnh.
2. Trong một dãy hữu hạn các số thực, tổng của bất kì 7 số hạng liên tiếp là âm, và tổng của bất kì 11 số hạng liên tiếp là dương. Xác định số lớn nhất trong các số hạng của dãy.
3. Cho số nguyên $n > 2$. Giả sử V_n là tập các số nguyên dạng $1 + kn$, trong đó k là một số nguyên dương. Số m thuộc V_n được gọi là không phân tích được nếu nó không thể biểu diễn dưới dạng tích của hai số thuộc V_n . Chứng minh rằng: có một số thuộc V_n mà có thể biểu diễn dưới dạng tích của các số không phân tích được thuộc V_n bằng nhiều hơn một cách.
4. Cho $f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x$, trong đó a, b, A, B là các hằng số thực. Giả sử rằng: $f(x) \geq 0$ với mọi số thực x .
Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \leq 2$ và $A^2 + B^2 \leq 1$.
5. Cho a, b là các số nguyên dương. Khi $(a^2 + b^2)$ chia cho $(a + b)$ được thương số là q và số dư là r .
Tìm tất cả các cặp số a và b thỏa mãn: $q^2 + r = 1997$.
6. Cho hàm $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^+$ là tập các số nguyên dương.
Cho $f(n+1) > f(f(n))$ với mọi n .
Chứng minh rằng: $f(n) = n$ với mọi n .

19th IMO 1977

1. Construct equilateral triangles ABK, BCL, CDM, DAN on the inside of the square ABCD. Show that the midpoints of KL, LM, MN, NK and the midpoints of AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN form a regular dodecahedron.
2. In a finite sequence of real numbers the sum of any seven successive terms is negative, and the sum of any eleven successive terms is positive. Determine the maximum number of terms in the sequence.
3. Given an integer $n > 2$, let V_n be the set of integers $1 + kn$ for k a positive integer. A number m in V_n is called indecomposable if it cannot be expressed as the product of two members of V_n . Prove that there is a number in V_n which can be expressed as the product of indecomposable members of V_n in more than one way (decompositions which differ solely in the order of factors are not regarded as different).
4. Define $f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x$, where a, b, A, B are real constants. Suppose that $f(x) \geq 0$ for all real x . Prove that $a^2 + b^2 \leq 2$ and $A^2 + B^2 \leq 1$.
5. Let a and b be positive integers. When $a^2 + b^2$ is divided by $a + b$, the quotient is q and the remainder is r . Find all pairs a, b such that $q^2 + r = 1977$.
6. The function f is defined on the set of positive integers and its values are positive integers. Given that $f(n+1) > f(f(n))$ for all n , prove that $f(n) = n$ for all n .

Kỳ thi IMO lần thứ 20 - 1978

1. Cho m, n là các số nguyên dương với $m < n$. Ba chữ số thập phân cuối cùng của 1978^m giống như ba chữ số thập phân cuối cùng của 1978^n . Tìm m, n sao cho $m + n$ đạt giá trị nhỏ nhất.
2. P là một điểm bên trong một hình cầu. Ba tia vuông góc với nhau từng đôi một kẻ từ P cắt hình cầu tại U, V, W . Q là đỉnh đối diện qua đường chéo với P trong hình hộp được xác định bởi PU, PV, PW . Tìm quỹ tích các điểm Q khi các tia vuông góc xuất phát từ P thay đổi.
3. Tập tất cả các số nguyên dương là hợp của hai tập con rời nhau $\{f(1), f(2), f(3), \dots\}$ và $\{g(1), g(2), g(3), \dots\}$. Trong đó $f(1) < f(2) < f(3) < \dots$, và $g(1) < g(2) < g(3) < \dots$
 $g(n) = f(f(n)) + 1$ với $n = 1, 2, 3, \dots$

Xác định $f(240)$.

4. Tam giác ABC cân tại A . Một đường tròn tiếp xúc bên trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác và cắt AB, AC lần lượt tại P và Q . Chứng minh rằng: trung điểm của PQ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
5. $\{a_k\}$ là dãy các số nguyên dương khác nhau. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{với mọi số nguyên dương } n.$$

6. Một cuộc giao lưu quốc tế có các thành viên từ 6 nước khác nhau. Danh sách của các thành viên gồm có 1978 người được đánh số là $1, 2, \dots, 1978$. Chứng minh rằng: tồn tại ít nhất một thành viên có số là tổng của các số của hai thành viên cùng nước của mình, hoặc gấp đôi số của một thành viên cùng nước với mình.

20th IMO 1978

1. m and n are positive integers with $m < n$. The last three decimal digits of 1978^m are the same as the last three decimal digits of 1978^n . Find m and n such that $m + n$ has the least possible value.
2. P is a point inside a sphere. Three mutually perpendicular rays from P intersect the sphere at points U, V and W . Q denotes the vertex diagonally opposite P in the parallelepiped determined by PU, PV, PW . Find the locus of Q for all possible sets of such rays from P .
3. The set of all positive integers is the union of two disjoint subsets $\{f(1), f(2), f(3), \dots\}$, $\{g(1), g(2), g(3), \dots\}$, where $f(1) < f(2) < f(3) < \dots$, and $g(1) < g(2) < g(3) < \dots$, and $g(n) = f(f(n)) + 1$ for $n = 1, 2, 3, \dots$. Determine $f(240)$.
4. In the triangle ABC , $AB = AC$. A circle is tangent internally to the circumcircle of the triangle and also to AB, AC at P, Q respectively. Prove that the midpoint of PQ is the center of the incircle of the triangle.
5. $\{a_k\}$ is a sequence of distinct positive integers. Prove that for all positive integers n , the sum from $k = 1$ to n of a_k/k^2 is greater than or equal to the sum from $k = 1$ to n of $1/k$.
6. An international society has its members from six different countries. The list of members has 1978 names, numbered $1, 2, \dots, 1978$. Prove that there is at least one member whose number is the sum of the numbers of two members from his own country, or twice the number of a member from his own country.

Kỳ thi IMO lần thứ 21 - 1979

1. Cho m, n là những số nguyên dương thỏa mãn:

$$\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}. \text{ Chứng minh rằng: } m \text{ chia hết cho } 1979.$$

2. Hình lăng trụ có các mặt trên và mặt đáy là các ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ và $B_1B_2B_3B_4B_5$. Mỗi cạnh của hai ngũ giác và của 25 đoạn A_iB_i được tô màu đỏ hoặc xanh. Mọi tam giác mà các đỉnh là đỉnh của hình lăng trụ, tất cả các cạnh của nó đều được tô màu sẽ có hai cạnh được tô màu khác nhau. Chứng minh rằng tất cả 10 cạnh của mặt trên và mặt dưới của hình lăng trụ được tô màu giống nhau.

3. Trong một mặt phẳng cho hai đường tròn giao nhau. A là một trong các giao điểm đó. Đồng thời bắt đầu từ A hai điểm di chuyển với tốc độ không đổi, mỗi một điểm di chuyển theo một đường tròn và cùng hướng. Hai điểm trở lại A cùng một lúc (tức là sau một vòng). Chứng minh rằng tồn tại một điểm cố định P trong mặt phẳng sao cho hai điểm chuyển động đó luôn cách đều P .

4. Cho mặt phẳng k , một điểm P trong k và một điểm Q ngoài k . Tìm tất cả các điểm R trong k sao cho tỷ số: $\frac{QP + PR}{QR}$ lớn nhất.

5. Tìm tất cả các số thực a sao cho tồn tại các số thực không âm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = a \\ x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 + 5^3x_5 = a^2 \\ x_1 + 2^5x_2 + 3^5x_3 + 4^5x_4 + 5^5x_5 = a^3 \end{cases}$$

6. Cho A và E là hai đỉnh đối diện của bát giác. Một con ếch bắt đầu nhảy tại đỉnh A . Từ một đỉnh bất kì (khác E) nó nhảy tới một trong hai đỉnh liền kề. Khi tới E thì nó dừng lại. Cho a_n là số đường đi khác nhau

sau n bước nhảy kết thúc tại E . Chứng minh rằng: $a_{2n-1} = 0, a_{2n} = \frac{(2 + \sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}} - \frac{(2 - \sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}$.

21st IMO 1979

1. Let m and n be positive integers such that:

$$\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}. \text{ Prove that } m \text{ is divisible by } 1979.$$

2. A prism with pentagons $A_1A_2A_3A_4A_5$ and $B_1B_2B_3B_4B_5$ as the top and bottom faces is given. Each side of the two pentagons and each of the 25 segments A_iB_j is colored red or green. Every triangle whose vertices are vertices of the prism and whose sides have all been colored has two sides of a different color. Prove that all 10 sides of the top and bottom faces have the same color.

3. Two circles in a plane intersect. A is one of the points of intersection. Starting simultaneously from A two points move with constant speed, each traveling along its own circle in the same sense. The two points return to A simultaneously after one revolution. Prove that there is a fixed point P in the plane such that the two points are always equidistant from P .

4. Given a plane k , a point P in the plane and a point Q not in the plane, find all points R in k such that the ratio $\frac{QP + PR}{QR}$ is a maximum.

5. Find all real numbers a for which there exist non-negative real numbers x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 satisfying:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = a \\ x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 + 5^3x_5 = a^2 \\ x_1 + 2^5x_2 + 3^5x_3 + 4^5x_4 + 5^5x_5 = a^3 \end{cases}$$

6. Let A and E be opposite vertices of an octagon. A frog starts at vertex A . From any vertex except E it jumps to one of the two adjacent vertices. When it reaches E it stops. Let a_n be the number of distinct paths

of exactly n jumps ending at E . Prove that: $a_{2n-1} = 0, a_{2n} = \frac{(2 + \sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}} - \frac{(2 - \sqrt{2})^{n-1}}{\sqrt{2}}$.

Kỳ thi IMO lần thứ 22 - 1981

1. Cho P là một điểm bên trong tam giác ABC. D, E, F là chân đường cao tương ứng hạ từ P xuống BC, CA, AB. Tìm tất cả các điểm P sao cho:

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

2. Lấy r sao cho $1 \leq r \leq n$, và xét tất cả các tập con gồm r phần tử của tập $\{1, 2, \dots, n\}$. Mỗi một tập con có một số nhỏ nhất. Gọi $F(n, r)$ là giá trị trung bình của các phần tử nhỏ nhất này. Chứng minh rằng:

$$F(n, r) = \frac{(n+1)}{(r+1)}$$

3. Cho m, n là các số nguyên dương trong đoạn $[1, 1981]$ thỏa mãn: $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$.
Xác định giá trị lớn nhất của $m^2 + n^2$

4. (a) Với giá trị nào của n ($n > 2$) thì tồn tại một tập n số nguyên dương liên tiếp mà số lớn nhất trong n số đó là ước số của bội số chung nhỏ nhất của (n - 1) số còn lại?

(b) Với giá trị nào của n ($n > 2$) thì có duy nhất một tập có tính chất như trên.

5. Ba đường tròn cùng một bán kính có chung một điểm O và nằm bên trong một tam giác đã cho. Mỗi một đường tròn tiếp xúc với hai cạnh của tam giác.

Chứng minh rằng: tâm của đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác và điểm O thẳng hàng.

6. Cho hàm $f(x, y)$ với mọi x, y là số nguyên không âm, thỏa mãn:

$$\begin{aligned} f(0, y) &= y + 1 \\ f(x + 1, 0) &= f(x, 1) \\ f(x + 1, y + 1) &= f(x, f(x + 1, y)) \end{aligned}$$

Tìm $f(4, 1981)$.

22nd IMO 1981

1. P is a point inside the triangle ABC. D, E, F are the feet of the perpendiculars from P to the lines BC, CA, AB respectively. Find all P which minimise:

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

2. Take r such that $1 \leq r \leq n$, and consider all subsets of r elements of the set $\{1, 2, \dots, n\}$. Each subset has a smallest element. Let $F(n, r)$ be the arithmetic mean of these smallest elements. Prove that:

$$F(n, r) = (n+1)/(r+1).$$

3. Determine the maximum value of $m^2 + n^2$, where m and n are integers in the range 1, 2, ..., 1981 satisfying $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$.

4. (a) For which $n > 2$ is there a set of n consecutive positive integers such that the largest number in the set is a divisor of the least common multiple of the remaining n - 1 numbers?

(b) For which $n > 2$ is there exactly one set having this property?

5. Three circles of equal radius have a common point O and lie inside a given triangle. Each circle touches a pair of sides of the triangle. Prove that the incenter and the circumcenter of the triangle are collinear with the point O.

6. The function $f(x, y)$ satisfies: $f(0, y) = y + 1$, $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$, $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$ for all non-negative integers x, y. Find $f(4, 1981)$.

Kỳ thi IMO lần thứ 23 - 1982

- Hàm $f(n)$ được xác định trên tập các số nguyên dương và nhận giá trị nguyên không âm. $f(2) = 0$, $f(3) > 0$, $f(9999) = 3333$ và với mọi m, n có: $f(m+n) - f(m) - f(n) = 0$ hoặc 1 . Xác định $f(1982)$.
- Tam giác không cân $A_1A_2A_3$ có các cạnh a_1, a_2, a_3 với a_i đối diện với A_i . M_i là trung điểm của cạnh a_i và T_i là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác với các cạnh a_i . Ký hiệu S_i là hình chiếu của T_i trên đường phân giác trong của góc A_i . Chứng minh rằng: M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 đồng quy.
- Xét một dãy vô hạn $\{x_n\}$ của các số thực dương sao cho: $1 = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots$

(a) Chứng minh rằng: với mọi dãy như thế tồn tại một số $n \geq 1$ sao cho: $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3.999$

(b) Tìm một dãy có tính chất như trên và thỏa mãn: $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4$ với mọi n .

4. Chứng minh rằng: Nếu n là một số nguyên dương sao cho phương trình: $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ có nghiệm (x, y) nguyên thì phương trình đó có ít nhất ba nghiệm nguyên.

Hãy chỉ ra rằng phương trình không có nghiệm nguyên với $n = 2891$.

5. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Trong đường chéo AC và CE lấy các điểm tương ứng M và N sao cho:

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$$

Xác định r nếu B, M và N thẳng hàng.

6. Cho S là một hình vuông với độ dài các cạnh là 100. L là một đường đi trong S và không cắt S gồm có các đoạn $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ với $A_0 \neq A_n$. Giả sử rằng với mọi điểm P trên biên của S tồn tại một điểm thuộc L sao cho khoảng cách từ P tới nó $\leq \frac{1}{2}$.

Chứng minh rằng: tồn tại 2 điểm X và Y thuộc L sao cho khoảng cách $XY \leq 1$, và độ dài đường đi từ X tới Y là không nhỏ hơn 198.

23rd IMO 1982

1. The function $f(n)$ is defined on the positive integers and takes non-negative integer values. $f(2) = 0$, $f(3) > 0$, $f(9999) = 3333$ and for all m, n :

$f(m+n) - f(m) - f(n) = 0$ or 1 . Determine $f(1982)$.

2. A non-isosceles triangle $A_1A_2A_3$ has sides a_1, a_2, a_3 with a_i opposite A_i . M_i is the midpoint of side a_i and T_i is the point where the incircle touches side a_i . Denote by S_i the reflection of T_i in the interior bisector of angle A_i . Prove that the lines M_1S_1, M_2S_2 and M_3S_3 are concurrent.

3. Consider infinite sequences $\{x_n\}$ of positive reals such that $x_0 = 1$ and $x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots$.

(a) Prove that for every such sequence there is an $n \geq 1$ such that: $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3.999$

(b) Find such a sequence for which: $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4$ for all n .

4. Prove that if n is a positive integer such that the equation: $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ has a solution in integers x, y , then it has at least three such solutions. Show that the equation has no solutions in integers for $n = 2891$.

5. The diagonals AC and CE of the regular hexagon $ABCDEF$ are divided by inner points M and N respectively, so that:

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$$

Determine r if B, M and N are collinear.

6. Let S be a square with sides length 100. Let L be a path within S which does not meet itself and which is composed of line segments $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ with $A_0 \neq A_n$. Suppose that for every point P on the boundary of S there is a point of L at a distance from P no greater than $1/2$. Prove that there are two points X and Y of L such that the distance between X and Y is not greater than 1 and the length of the part of L which lies between X and Y is not smaller than 198.

Kỳ thi IMO lần thứ 24 - 1983

1. Cho R^+ là tập các số thực dương, hàm $f: R^+ \rightarrow R^+$ thỏa mãn:

$$f(x(f(y))) = yf(x) \text{ với mọi } x, y \text{ và } f(x) \rightarrow 0 \text{ khi } x \rightarrow \infty.$$

Tìm tất cả các hàm f như vậy.

2. A là một trong hai giao điểm khác nhau của hai đường tròn C_1 và C_2 đồng phẳng và không bằng nhau có tâm tương ứng là O_1, O_2 . Một trong các tiếp tuyến chung của hai đường tròn tiếp xúc với C_1 tại P_1 và C_2 tại P_2 . Tiếp tuyến khác tiếp xúc với C_1 tại Q_1 và C_2 tại Q_2 . Gọi M_1, M_2 lần lượt là trung điểm của P_1Q_1, P_2Q_2 . Chứng minh rằng:

$$O_1AO_2 = M_1AM_2.$$

3. Cho a, b, c là các số nguyên dương, không có hai số nào có ước số chung lớn hơn 1.

Hãy chỉ ra rằng $2abc - ab - bc - ac$ là số nguyên lớn nhất không thể biểu diễn thành $xbc + yca + zab$, trong đó x, y, z là các số nguyên không âm.

4. Cho tam giác đều ABC. E là tập hợp tất cả các điểm trên ba cạnh AB, BC, và CA (kể cả A, B, C). Phân chia E ra thành hai tập con rời nhau. Hãy kiểm chứng khẳng định rằng luôn tồn tại một tập con (trong hai tập con đó) có chứa các đỉnh để tạo nên một tam giác vuông.

5. Có thể chọn được hay không 1983 số nguyên dương khác nhau mà tất cả các số đều nhỏ hơn hoặc bằng 10^5 và không có ba số nào trong đó là các số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

6. Cho a, b, c là độ dài của các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

24th IMO 1983

1. Find all functions f defined on the set of positive reals which take positive real values and satisfy:

$$f(x(f(y))) = yf(x) \text{ for all } x, y; \text{ and } f(x) \text{ tends to } 0 \text{ as } x \text{ tends to infinity.}$$

2. Let A be one of the two distinct points of intersection of two unequal coplanar circles C_1 and C_2 with centers O_1 and O_2 respectively. One of the common tangents to the circles touches C_1 at P_1 and C_2 at P_2 , while the other touches C_1 at Q_1 and C_2 at Q_2 . Let M_1 be the midpoint of P_1Q_1 and M_2 the midpoint of P_2Q_2 . Prove that angle $O_1AO_2 = \text{angle } M_1AM_2$.

3. Let a, b and c be positive integers, no two of which have a common divisor greater than 1. Show that $2abc - ab - bc - ca$ is the largest integer which cannot be expressed in the form $xbc + yca + zab$, where x, y, z are non-negative integers.

4. Let ABC be an equilateral triangle and E the set of all points contained in the three segments AB, BC and CA (including A, B and C). Determine whether, for every partition of E into two disjoint subsets, at least one of the two subsets contains the vertices of a right-angled triangle.

5. Is it possible to choose 1983 distinct positive integers, all less than or equal to 10^5 , no three of which are consecutive terms of an arithmetic progression?

6. Let a, b and c be the lengths of the sides of a triangle. Prove that

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Determine when equality occurs.

Kỳ thi IMO lần thứ 25 - 1984

1. Chứng minh rằng:

$$0 \leq yz + zx + xy - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

Trong đó: x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn: $x + y + z = 1$.

2. Tìm một cặp (a, b) các số nguyên dương thỏa mãn: $ab(a+b)$ không chia hết cho 7 nhưng $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ lại chia hết cho 7.

3. Cho hai điểm O và A trong một mặt phẳng. Mỗi điểm trong mặt phẳng sẽ được tô màu bởi một trong số hữu hạn màu. Lấy điểm X trong mặt phẳng, đường tròn $C(X)$ có tâm O và bán kính là $OX + \frac{AOX}{OX}$, trong đó AOX được

đo bằng radian trong đoạn $[0, 2\pi)$.

Chứng minh rằng: ta có thể tìm được điểm X không nằm trên OA sao cho màu của nó xuất hiện trên chu vi của đường tròn $C(X)$.

4. Cho tứ diện lồi $ABCD$ với CD tiếp xúc với đường tròn đường kính AB .

Chứng minh: AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD khi và chỉ khi BC song song với AD .

5. Cho d là tổng chiều dài của tất cả các đường chéo của một đa giác lồi với số đỉnh là $n > 3$. Gọi p là chu vi của đa giác đó. Chứng minh rằng:

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil - 2$$

Trong đó: $[x]$ biểu diễn số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

6. Cho a, b, c, d là các số nguyên lẻ thỏa mãn: $0 < a < b < c < d$ và $ad = bc$.

Chứng minh rằng: nếu $a + d = 2^k$ và $b + c = 2^m$ (với k, m là các số nguyên) thì $a = 1$.

25th IMO 1984

1. Prove that $0 \leq yz + zx + xy - 2xyz \leq \frac{7}{27}$, where x, y and z are non-negative real numbers satisfying

$x + y + z = 1$.

2. Find one pair of positive integers a, b such that $ab(a+b)$ is not divisible by 7, but $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ is divisible by 7^7 .

3. Given points O and A in the plane. Every point in the plane is colored with one of a finite number of colors. Given a point X in the plane, the circle $C(X)$ has center O and radius $OX + (\text{angle } AOX)/OX$, where angle AOX is measured in radians in the range $[0, 2\pi)$. Prove that we can find a point X , not on OA , such that its color appears on the circumference of the circle $C(X)$.

4. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral with the line CD tangent to the circle on diameter AB . Prove that the line AB is tangent to the circle on diameter CD if and only if BC and AD are parallel.

5. Let d be the sum of the lengths of all the diagonals of a plane convex polygon with $n > 3$ vertices. Let p be its perimeter. Prove that:

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil - 2$$

where $[x]$ denotes the greatest integer not exceeding x .

6. Let a, b, c, d be odd integers such that $0 < a < b < c < d$ and $ad = bc$. Prove that if $a + d = 2^k$ and $b + c = 2^m$ for some integers k and m , then $a = 1$.

Kỳ thi IMO lần thứ 26 - 1985

1. Đường tròn có tâm nằm trên cạnh AB của tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn. Ba cạnh còn lại tiếp xúc với đường tròn. Chứng minh rằng: $AD + BC = AB$.

2. Cho n, k là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, $k < n$. Mỗi số trong tập $M = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ được tô màu xanh hoặc trắng. Với mỗi i thuộc M , i và $n-i$ đều có chung một màu. Với mỗi i thuộc M ($i \neq k$), i và $|i-k|$ có chung một màu.

Chứng minh rằng tất cả các số thuộc M phải có chung một màu.

3. Cho đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ với các hệ số nguyên. Số lượng của các hệ số lẻ được biểu thị bởi $o(P)$. Với $i = 0, 1, 2, \dots$ đặt $Q_i(x) = (1+x)^i$.

Chứng minh rằng: nếu $i_1, i_2, \dots, i_n$ là các số nguyên thỏa mãn: $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$ thì:

$$o(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n}) \geq o(Q_{i_1}).$$

4. Cho tập M của 1985 số nguyên dương khác nhau, trong đó không có số nào có ước số nguyên tố lớn hơn 23. Chứng minh rằng: M chứa một tập con gồm 4 số mà tích của chúng là lũy thừa 4 của một số nguyên.

5. Đường tròn tâm O đi qua hai đỉnh A và C của tam giác ABC và giao với hai đoạn AB, BC tại hai điểm phân biệt lần lượt là K và N . Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, KBN giao nhau tại 2 điểm phân biệt B và M .

Chứng minh rằng: $\angle OMB = 90^\circ$.

6. Với mọi số thực x_1 , dãy $x_1, x_2, \dots$ được xây dựng bởi công thức sau:

$$x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right)$$

Chứng minh rằng: tồn tại duy nhất một giá trị của x_1 để $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ với mọi n .

26th IMO 1985

1. A circle has center on the side AB of the cyclic quadrilateral ABCD. The other three sides are tangent to the circle. Prove that $AD + BC = AB$.

2. Let n and k be relatively prime positive integers with $k < n$. Each number in the set $M = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ is colored either blue or white. For each i in M , both i and $n-i$ have the same color. For each i in M not equal to k , both i and $|i-k|$ have the same color. Prove that all numbers in M must have the same color.

3. For any polynomial $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ with integer coefficients, the number of odd coefficients is denoted by $o(P)$. For $i = 0, 1, 2, \dots$ let $Q_i(x) = (1+x)^i$. Prove that if $i_1, i_2, \dots, i_n$ are integers satisfying $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$, then:

$$o(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n}) \geq o(Q_{i_1}).$$

4. Given a set M of 1985 distinct positive integers, none of which has a prime divisor greater than 23, prove that M contains a subset of 4 elements whose product is the 4th power of an integer.

5. A circle center O passes through the vertices A and C of the triangle ABC and intersects the segments AB and BC again at distinct points K and N respectively. The circumcircles of ABC and KBN intersect at exactly two distinct points B and M . Prove that angle OMB is a right angle.

6. For every real number x_1 , construct the sequence $x_1, x_2, \dots$ by setting:

$$x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right)$$

Prove that there exists exactly one value of x_1 which gives $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ for all n .

Kỳ thi IMO lần thứ 27 - 1986

1. Cho d là một số nguyên dương bất kì không bằng 2, 5, hoặc 13. Hãy chỉ ra ta có thể tìm được hai số khác nhau a, b trong tập $\{2, 5, 13, d\}$ sao cho $ab - 1$ không là bình phương đúng.

2. Cho điểm P_0 trong mặt phẳng của tam giác $A_1A_2A_3$. Ta định nghĩa $A_s = A_{s-3}$ với mọi $s \geq 4$. Dựng một tập các điểm $P_1, P_2, P_3, \dots$ sao cho P_{k+1} là ảnh của P_k qua phép quay tâm A_{k+1} một góc 120° theo chiều kim đồng hồ, với $k = 0, 1, 2, \dots$

Chứng minh rằng: nếu $P_{1986} = P_0$ thì tam giác $A_1A_2A_3$ là tam giác đều.

3. Mỗi đỉnh của một ngũ giác đều được gán cho một số nguyên mà tổng của tất cả 5 số là dương. Nếu ba đỉnh liên tiếp tương ứng với ba số là x, y, z , với $y < 0$, thì phép toán sau cũng được chấp nhận: x, y, z được thay thế tương ứng bởi $x + y, -y, z + y$. Các phép toán này được thực hiện lặp đi lặp lại nhiều lần cho đến khi năm số có ít nhất một số là âm. Xác định có tồn tại hay không một qui trình sau hữu hạn bước kết thúc công việc trên.

4. Cho A, B là hai đỉnh kề nhau của một đa giác đều n cạnh ($n \geq 5$) có tâm O . Tam giác XYZ đồng dạng và ban đầu trùng khớp với tam giác OAB di chuyển trong mặt phẳng sao cho Y, Z chạy trên toàn bộ biên của đa giác, với X luôn nằm bên trong đa giác. Tìm quỹ tích các điểm X .

5. Tìm tất cả các hàm f được định nghĩa trên tập các số thực không âm và nhận giá trị thực không âm sao cho:

$$f(2) = 0$$

$$f(x) \neq 0, \text{ với } 0 \leq x < 2$$

$$f(xf(y))f(y) = f(x+y), \text{ với mọi } x, y.$$

6. Cho một tập hữu hạn các điểm có tọa độ nguyên trong mặt phẳng. Có thể luôn luôn tô màu được các điểm này được hay không với màu đỏ hoặc trắng để cho hiệu số (lấy giá trị tuyệt đối) giữa các số điểm có màu trắng và đỏ trên đường thẳng K không lớn hơn 1 (với L là một đường thẳng bất kì song song với một trục tọa độ)?

27th IMO 1986

1. Let d be any positive integer not equal to 2, 5 or 13. Show that one can find distinct a, b in the set $\{2, 5, 13, d\}$ such that $ab - 1$ is not a perfect square.

2. Given a point P_0 in the plane of the triangle $A_1A_2A_3$. Define $A_s = A_{s-3}$ for all $s \geq 4$. Construct a set of points $P_1, P_2, P_3, \dots$ such that P_{k+1} is the image of P_k under a rotation center A_{k+1} through an angle 120° clockwise for $k = 0, 1, 2, \dots$. Prove that if $P_{1986} = P_0$, then the triangle $A_1A_2A_3$ is equilateral.

3. To each vertex of a regular pentagon an integer is assigned, so that the sum of all five numbers is positive. If three consecutive vertices are assigned the numbers x, y, z respectively, and $y < 0$, then the following operation is allowed: x, y, z are replaced by $x + y, -y, z + y$ respectively. Such an operation is performed repeatedly as long as at least one of the five numbers is negative. Determine whether this procedure necessarily comes to an end after a finite number of steps.

4. Let A, B be adjacent vertices of a regular n -gon ($n \geq 5$) with center O . A triangle XYZ , which is congruent to and initially coincides with OAB , moves in the plane in such a way that Y and Z each trace out the whole boundary of the polygon, with X remaining inside the polygon. Find the locus of X .

5. Find all functions f defined on the non-negative reals and taking non-negative real values such that: $f(2) = 0$, $f(x) \neq 0$ for $0 \leq x < 2$, and $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$ for all x, y .

6. Given a finite set of points in the plane, each with integer coordinates, is it always possible to color the points red or white so that for any straight line L parallel to one of the coordinate axes the difference (in absolute value) between the numbers of white and red points on L is not greater than 1?

Kỳ thi IMO lần thứ 28 - 1987

1. Cho $p_n(k)$ là số phép hoán vị của tập $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ trong đó có k điểm cố định. Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n!$$

(Hoán vị f của tập S là ánh xạ $1-1: S \rightarrow S$. Phần tử i của S được gọi là cố định nếu $f(i) = i$.)

2. Cho tam giác nhọn ABC . Đường phân giác trong của góc A cắt BC tại L và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại N . Gọi K, M lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ L xuống AB, AC . Chứng minh rằng: diện tích của tứ giác $AKNM$ và diện tích của tam giác ABC là bằng nhau.

3. Cho $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ là các số thực thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$.

Chứng minh rằng: với mọi số nguyên $k \geq 2$ tồn tại các số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho $|a_i| \leq$

$$k-1 \text{ với mọi } i, \text{ và } |a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{(k^n - 1)}.$$

4. Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f: \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_1$ - là tập các số nguyên không âm, sao cho:

$$f(f(n)) = n + 1987 \text{ với mọi } n.$$

5. Cho n là một số nguyên ($n \geq 3$). Chứng minh rằng tồn tại một tập n điểm trong mặt phẳng sao cho khoảng cách giữa hai điểm bất kì là một số vô tỉ và mỗi tập gồm 3 điểm xác định một tam giác không suy thoái với diện tích là một số hữu tỉ.

6. Cho n là một số nguyên ($n \geq 2$). Chứng minh rằng: nếu $k^2 + k + n$ là một số nguyên tố với mọi số nguyên k thỏa

mãn $0 \leq k \leq \sqrt{\frac{n}{3}}$ thì $k^2 + k + n$ là một số nguyên tố với mọi $k: 0 \leq k \leq n-2$.

28th IMO 1987

1. Let $p_n(k)$ be the number of permutations of the set $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ which have exactly k fixed points. Prove that

$$\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n!$$

[A permutation f of a set S is a one-to-one mapping of S onto itself. An element i of S is called a fixed point if $f(i) = i$.]

2. In an acute-angled triangle ABC the interior bisector of angle A meets BC at L and meets the circumcircle of ABC again at N . From L perpendiculars are drawn to AB and AC , with feet K and M respectively. Prove that the quadrilateral $AKNM$ and the triangle ABC have equal areas.

3. Let $x_1, x_2, \dots, x_n$ be real numbers satisfying $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Prove that for every integer $k \geq 2$ there are integers $a_1, a_2, \dots, a_n$, not all zero, such that $|a_i| \leq k-1$ for all i , and $|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n| \leq$

$$\frac{(k-1)\sqrt{n}}{(k^n - 1)}.$$

4. Prove that there is no function f from the set of non-negative integers into itself such that $f(f(n)) = n + 1987$ for all n .

5. Let n be an integer greater than or equal to 3. Prove that there is a set of n points in the plane such that the distance between any two points is irrational and each set of 3 points determines a non-degenerate triangle with rational area.

6. Let n be an integer greater than or equal to 2. Prove that if $k^2 + k + n$ is prime for all integers k such

that $0 \leq k \leq \sqrt{\frac{n}{3}}$, then $k^2 + k + n$ is prime for all integers k such that $0 \leq k \leq n-2$.

Kỳ thi IMO lần thứ 29 - 1988

1. Xét hai đường tròn đồng phẳng và đồng tâm có bán kính $R > r$. Cho P là một điểm cố định trên đường tròn nhỏ và B là một điểm thay đổi trên đường tròn lớn. Đường thẳng BP cắt đường tròn lớn tại C . Đường vuông góc với BP kẻ từ P cắt đường tròn nhỏ tại A (nếu nó tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại P thì $A = P$).

(i) Tìm tập các giá trị của $AB^2 + BC^2 + CA^2$.

(ii) Tìm quỹ tích trung điểm của BC .

2. Cho n là một số nguyên dương và $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ là các tập con của tập B . Giả sử rằng:

(i) Mỗi tập A_i có chính xác $2n$ phần tử.

(ii) Giao của mọi hai tập khác nhau A_i chứa đúng một phần tử.

(iii) Mọi phần tử của B đều nằm trong ít nhất hai tập A_i .

Với giá trị nào của n người ta có thể gán tất cả các phần tử của tập B với số 0 hoặc 1 sao cho mỗi tập A_i có chính xác n phần tử tương ứng với số 0.

3. Hàm f được định nghĩa trên tập các số nguyên dương sao cho với mọi n nguyên dương ta có:

$$f(1) = 1; f(3) = 3; f(2n) = f(n); f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n); f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n)$$

Xác định số nguyên dương $n \leq 1988$ để: $f(n) = n$.

4. Hãy chỉ ra rằng tập của các số thực x thỏa mãn bất đẳng thức:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} + \dots + \frac{70}{x-70} \geq 54$$

là hợp của các khoảng rời nhau có tổng chiều dài toàn bộ là 1988.

5. Cho tam giác ABC vuông tại A , và D là chân đường cao hạ từ A xuống BC . Đường thẳng nối giữa tâm của hai đường tròn nội tiếp tam giác ABD và ACD lần lượt cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại K, L . Hãy chỉ ra: Diện tích của tam giác $ABC \geq 2$ lần diện tích tam giác AKL .

6. Cho a, b là hai số nguyên dương sao cho $a^2 + b^2$ chia hết cho $ab+1$.

Hãy chỉ ra rằng: $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ là một số chính phương.

29th IMO 1988

1. Consider two coplanar circles of radii $R > r$ with the same center. Let P be a fixed point on the smaller circle and B a variable point on the larger circle. The line BP meets the larger circle again at C . The perpendicular to BP at P meets the smaller circle again at A (if it is tangent to the circle at P , then $A = P$).

(i) Find the set of values of $AB^2 + BC^2 + CA^2$.

(ii) Find the locus of the midpoint of BC .

2. Let n be a positive integer and let $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ be subsets of a set B . Suppose that:

(i) Each A_i has exactly $2n$ elements,

(ii) The intersection of every two distinct A_i contains exactly one element, and

(iii) Every element of B belongs to at least two of the A_i .
For which values of n can one assign to every element of B one of the numbers 0 and 1 in such a way that each A_i has 0 assigned to exactly n of its elements?

3. A function f is defined on the positive integers by: $f(1) = 1; f(3) = 3; f(2n) = f(n), f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n)$, and $f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n)$ for all positive integers n . Determine the number of positive integers n less than or equal to 1988 for which $f(n) = n$.

4. Show that the set of real numbers x which satisfy the inequality:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} + \dots + \frac{70}{x-70} \geq 54$$

is a union of disjoint intervals, the sum of whose lengths is 1988.

5. ABC is a triangle, right-angled at A , and D is the foot of the altitude from A . The straight line joining the incenters of the triangles ABD and ACD intersects the sides AB, AC at K, L respectively. Show that the area of the triangle ABC is at least twice the area of the triangle AKL .

6. Let a and b be positive integers such that $ab + 1$ divides $a^2 + b^2$. Show that $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ is a perfect square.

Kỳ thi IMO lần thứ 30 - 1989

1. Chứng minh rằng tập $\{1, 2, 3, \dots, 1989\}$ có thể biểu diễn được thành hợp rời nhau của các tập con $A_1, A_2, \dots, A_{117}$ trong đó: mỗi tập con A_i bao gồm 17 phần tử và tổng của tất cả các phần tử trong mỗi tập A_i là như nhau.
2. Cho tam giác nhọn ABC . Đường phân giác trong của các góc A, B, C lần lượt gặp đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_1, B_1, C_1 . Gọi A_0 là giao điểm của đường thẳng AA_1 với đường phân giác ngoài của các góc B và C ; B_0 là giao điểm của đường thẳng BB_1 với đường phân giác ngoài của các góc A và C ; C_0 là giao điểm của đường thẳng CC_1 với đường phân giác ngoài của các góc A và B . Chứng minh rằng: Diện tích tam giác $A_0B_0C_0$ gấp 2 lần diện tích lục giác $AC_1BA_1CB_1$ và lớn hơn hoặc bằng 4 lần diện tích tam giác ABC .
3. Cho n, k là hai số nguyên dương. S là tập hợp của n điểm trong mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và với mọi P thuộc S tồn tại ít nhất k điểm thuộc S cách đều P .

Chứng minh rằng: $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

4. Cho tứ giác lồi $ABCD$ sao cho $AB = AD + BC$. Tồn tại một điểm P trong tứ giác có khoảng cách h so với CD sao cho $AP = h + AD$ và $BP = h + BC$. Hãy chỉ ra rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

5. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n tồn tại n số nguyên dương liên tiếp không phải là số nguyên tố hoặc không là lũy thừa của một số nguyên tố.
6. Một hoán vị $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ của tập $\{1, 2, \dots, 2n\}$, trong đó n là một số nguyên dương, được gọi là có tính chất P nếu: $|x_i - x_{i+1}| = n$ với ít nhất một i trong $\{1, 2, \dots, 2n - 1\}$. Hãy chỉ ra rằng với mỗi n số các hoán vị có tính chất P nhiều hơn số các hoán vị không có tính chất này.

30th IMO 1989

1. Prove that the set $\{1, 2, \dots, 1989\}$ can be expressed as the disjoint union of subsets $A_1, A_2, \dots, A_{117}$ in such a way that each A_i contains 17 elements and the sum of the elements in each A_i is the same.
2. In an acute-angled triangle ABC , the internal bisector of angle A meets the circumcircle again at A_1 . Points B_1 and C_1 are defined similarly. Let A_0 be the point of intersection of the line AA_1 with the external bisectors of angles B and C . Points B_0 and C_0 are defined similarly. Prove that the area of the triangle $A_0B_0C_0$ is twice the area of the hexagon $AC_1BA_1CB_1$ and at least four times the area of the triangle ABC .
3. Let n and k be positive integers, and let S be a set of n points in the plane such that no three points of S are collinear, and for any point P of S there are at least k points of S equidistant from P . Prove that

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

4. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral such that the sides AB, AD, BC satisfy $AB = AD + BC$. There exists a point P inside the quadrilateral at a distance h from the line CD such that $AP = h + AD$ and $BP = h + BC$. Show that:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

5. Prove that for each positive integer n there exist n consecutive positive integers none of which is a prime or a prime power.
6. A permutation $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ of the set $\{1, 2, \dots, 2n\}$ where n is a positive integer is said to have property P if $|x_i - x_{i+1}| = n$ for at least one i in $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$. Show that for each n there are more permutations with property P than without.

Kỳ thi IMO lần thứ 31 - 1990

1. Các dây cung AB và CD của một đường tròn cắt nhau tại một điểm E bên trong đường tròn. Gọi M là một điểm trong của đoạn thẳng EB. Đường tiếp tuyến tại E với đường tròn đi qua D, E, và M giao với đường thẳng BC và AC

tương ứng tại F và G. Tính tỉ số $\frac{EG}{EF}$ theo t với $t = \frac{AM}{AB}$.

2. Lấy $n \geq 3$ và xét một tập E gồm $2n - 1$ điểm khác nhau trên một đường tròn. Giả sử rằng chính xác trong đó có k điểm được tô màu đen. Cách tô màu được gọi là tốt nếu tồn tại ít nhất một cặp điểm đen sao cho bên trong một trong hai cung giữa chúng chứa chính xác n điểm thuộc E.

Tìm giá trị nhỏ nhất của k sao cho với mọi cách tô màu k điểm của E như thế sẽ là tốt.

3. Xác định tất cả các số nguyên lớn hơn 1 sao cho: $\frac{2^n + 1}{n^2}$ là một số nguyên.

4. Tìm hàm $f: \mathbb{H}^+ \rightarrow \mathbb{H}^+$, $\mathbb{H}^+$ - là tập hợp của các số hữu tỉ dương, sao cho $f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$ với mọi x, y.

5. Ban đầu cho một số nguyên $n_0 > 1$, hai người A và B chơi một trò chơi bằng cách chọn các số nguyên $n_1, n_2, n_3, \dots$ lần lượt theo các quy tắc sau: Biết n_{2k} , A chọn bất kì số nguyên n_{2k+1} sao cho $n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$. Biết n_{2k+1} , B chọn

bất kì số nguyên n_{2k+2} sao cho $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}} = p^r$, với p là một số nguyên tố và r là một số nguyên ≥ 1 .

Người A chơi thắng nếu chọn được số 1990, B chơi thắng nếu chọn được số 1.

Hỏi ban đầu phải cho n_0 thế nào để:

(a) A thắng cuộc.

(b) B thắng cuộc.

(c) Cả hai người đều không thắng.

6. Chứng minh rằng tồn tại một đa giác lồi 1990 đỉnh sao cho tất cả các góc của nó đều bằng nhau và độ dài các cạnh theo thứ tự nào đó sẽ là: $1^2, 2^2, \dots, 1990^2$.

31st IMO 1990

1. Chords AB and CD of a circle intersect at a point E inside the circle. Let M be an interior point of the segment EB. The tangent at E to the circle through D, E and M intersects the lines BC and AC at F and G respectively. Find EG/EF in terms of $t = AM/AB$.

2. Take $n \geq 3$ and consider a set E of $2n-1$ distinct points on a circle. Suppose that exactly k of these points are to be colored black. Such a coloring is "good" if there is at least one pair of black points such that the interior of one of the arcs between them contains exactly n points from E. Find the smallest value of k so that every such coloring of k points of E is good.

3. Determine all integers greater than 1 such that $\frac{2^n + 1}{n^2}$ is an integer.

4. Construct a function from the set of positive rational numbers into itself such that $f(x f(y)) = f(x)/y$ for all x, y.

5. Given an initial integer $n_0 > 1$, two players A and B choose integers $n_1, n_2, n_3, \dots$ alternately according to the following rules: Knowing n_{2k} , A chooses any integer n_{2k+1} such that $n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$.

Knowing n_{2k+1} , B chooses any integer n_{2k+2} such that $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}} = p^r$ for some prime p and integer $r \geq 1$.

Player A wins the game by choosing the number 1990; player B wins by choosing the number 1. For which n_0 does

(a) A have a winning strategy?

(b) B have a winning strategy?

(c) Neither player have a winning strategy?

6. Prove that there exists a convex 1990-gon such that all its angles are equal and the lengths of the sides are the numbers $1^2, 2^2, \dots, 1990^2$ in some order.

Kỳ thi IMO lần thứ 32 - 1991

1. Cho tam giác ABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Đường phân giác trong của các góc A, B, C lần lượt cắt các cạnh đối diện tương ứng tại A', B', C'.

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}$$

2. Cho số nguyên $n > 6$, $a_1, a_2, \dots, a_k$ là tất cả các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n . Nếu $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_k - a_{k-1} > 0$ thì hãy chứng minh rằng n hoặc phải là số nguyên tố hoặc phải là lũy thừa của 2.

3. Cho tập $S = \{1, 2, 3, \dots, 280\}$. Tìm số nguyên nhỏ nhất n sao cho mỗi tập con của S gồm n phần tử chứa 5 số từng đôi một nguyên tố cùng nhau.

4. Giả sử G là một đồ thị liên thông có k cạnh. Chứng minh rằng: có thể đánh nhãn được các cạnh $1, 2, 3, \dots, k$, theo cách mà mỗi đỉnh thuộc vào hai hoặc nhiều hơn hai cạnh, ước số chung lớn nhất của các số nguyên đánh nhãn các cạnh này là 1.

[Một đồ thị là tập hợp các điểm được gọi là các đỉnh, tập các cạnh được nối bởi một cặp đỉnh khác nhau. Mỗi một cặp đỉnh sẽ nằm trên nhiều nhất một cạnh. Đồ thị được gọi là liên thông nếu với mọi hai đỉnh phân biệt x, y tồn tại dãy đỉnh liên tiếp nào đó: $x = v_0, v_1, \dots, v_m = y$ sao cho với mọi cặp (v_i, v_{i+1}) , $(1 \leq i < m)$ đều được nối với nhau bởi một cạnh.]

5. Cho tam giác ABC và X là một điểm bên trong tam giác. Hãy chứng minh rằng có ít nhất một trong các góc XAB, XBC, XCA là $\leq 30^\circ$.

6. Cho một số thực bất kì $a > 1$. Hãy xây dựng một dãy số vô hạn bị chặn $x_0, x_1, x_2, \dots$ sao cho $|x_i - x_j| |i - j|^a \geq 1$ với mọi i, j ($i \neq j$).

[Dãy vô hạn các số thực $x_0, x_1, x_2, \dots$ được gọi là bị chặn nếu tồn tại một hằng số C sao cho $|x_i| < C$ với mọi i .]

32nd IMO 1991

1. Given a triangle ABC, let I be the incenter. The internal bisectors of angles A, B, C meet the opposite sides in A', B', C' respectively. Prove that:

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}$$

2. Let $n > 6$ be an integer and let $a_1, a_2, \dots, a_k$ be all the positive integers less than n and relatively prime to n . If

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_k - a_{k-1} > 0,$$

prove that n must be either a prime number or a power of 2.

3. Let $S = \{1, 2, 3, \dots, 280\}$. Find the smallest integer n such that each n -element subset of S contains five numbers which are pairwise relatively prime.

4. Suppose G is a connected graph with k edges. Prove that it is possible to label the edges $1, 2, \dots, k$ in such a way that at each vertex which belongs to two or more edges, the greatest common divisor of the integers labeling those edges is 1.

[A graph is a set of points, called vertices, together with a set of edges joining certain pairs of distinct vertices. Each pair of edges belongs to at most one edge. The graph is connected if for each pair of distinct vertices x, y there is some sequence of vertices $x = v_0, v_1, \dots, v_m = y$, such that each pair (v_i, v_{i+1}) ($0 \leq i < m$) is joined by an edge.]

5. Let ABC be a triangle and X an interior point of ABC. Show that at least one of the angles XAB, XBC, XCA is less than or equal to 30° .

6. Given any real number $a > 1$ construct a bounded infinite sequence $x_0, x_1, x_2, \dots$ such that $|x_i - x_j| |i - j|^a \geq 1$ for every pair of distinct i, j .

[An infinite sequence $x_0, x_1, x_2, \dots$ of real numbers is bounded if there is a constant C such that $|x_i| < C$ for all i .]

Kỳ thi IMO lần thứ 33 - 1992

1. Tìm tất cả các số nguyên a, b, c thỏa mãn $1 < a < b$ sao cho $(a-1)(b-1)(c-1)$ là ước số của $abc-1$.
2. Tìm tất cả các hàm f xác định trên tập tất cả các số thực và nhận giá trị thực sao cho $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$ với mọi x, y .
3. Xét 9 điểm trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Mỗi một cặp điểm được nối với nhau thành một đoạn thẳng và được tô màu hoặc là xanh hoặc là đỏ hoặc là không được tô màu. Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho nếu có đúng n cạnh được tô màu thì trong đó nhất thiết phải chứa một tam giác có tất cả các cạnh được tô cùng một màu.
4. L là một đường tiếp tuyến với đường tròn C và M là một điểm trên L . Tìm quỹ tích tất cả các điểm P sao cho tồn tại các điểm Q và R trên L cách đều M với C là vòng tròn nội tiếp tam giác PQR .
5. Cho S là tập hợp hữu hạn các điểm trong không gian ba chiều. Gọi S_x, S_y, S_z lần lượt là các tập bao gồm các điểm là hình chiếu của các điểm trong S lên các mặt phẳng yOz, zOx, xOy .
Chứng minh rằng:

$$|S|^2 \leq |S_x| |S_y| |S_z|$$

Trong đó, $|A|$ biểu diễn số điểm trong tập A .

[Hình chiếu của một điểm trên một mặt phẳng là chân đường vuông góc hạ từ điểm đó lên mặt phẳng].

6. Với mỗi số nguyên dương n , $S(n)$ được định nghĩa như là một số nguyên lớn nhất sao cho với mọi số nguyên dương $k \leq S(n)$, n^2 có thể được viết dưới dạng tổng các bình phương của k số nguyên dương.
(a) Chứng minh rằng: $S(n) \leq n^2 - 14$ với mỗi $n \geq 4$.
(b) Tìm một số nguyên n sao cho $S(n) = n^2 - 14$.
(c) Chứng minh rằng tồn tại vô số các số nguyên n sao cho $S(n) = n^2 - 14$.

33rd IMO 1992

1. Find all integers a, b, c satisfying $1 < a < b < c$ such that $(a-1)(b-1)(c-1)$ is a divisor of $abc-1$.
2. Find all functions f defined on the set of all real numbers with real values, such that $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$ for all x, y .
3. Consider 9 points in space, no 4 coplanar. Each pair of points is joined by a line segment which is colored either blue or red or left uncolored. Find the smallest value of n such that whenever exactly n edges are colored, the set of colored edges necessarily contains a triangle all of whose edges have the same color.
4. L is a tangent to the circle C and M is a point on L . Find the locus of all points P such that there exist points Q and R on L equidistant from M with C the incircle of the triangle PQR .
5. Let S be a finite set of points in three-dimensional space. Let S_x, S_y, S_z be the sets consisting of the orthogonal projections of the points of S onto the yz -plane, zx -plane, xy -plane respectively. Prove that:
 $|S|^2 \leq |S_x| |S_y| |S_z|$, where $|A|$ denotes the number of points in the set A .
[The orthogonal projection of a point onto a plane is the foot of the perpendicular from the point to the plane.]
6. For each positive integer n , $S(n)$ is defined as the greatest integer such that for every positive integer $k \leq S(n)$, n^2 can be written as the sum of k positive squares.
(a) Prove that $S(n) \leq n^2 - 14$ for each $n \geq 4$.
(b) Find an integer n such that $S(n) = n^2 - 14$.
(c) Prove that there are infinitely many integers n such that $S(n) = n^2 - 14$.

Kỳ thi IMO lần thứ 34 - 1993

1. Cho $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, trong đó n là một số nguyên > 1 . Chứng minh rằng $f(x)$ không thể biểu diễn thành tích của hai đa thức (khác hằng số) với các hệ số nguyên.
2. Cho D là một điểm bên trong tam giác nhọn ABC sao cho $\angle ADB = \angle ACB + 90^\circ$ và $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.
(a) Tính tỉ số: $\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$
(b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến kẻ từ C với đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACD và BCD vuông góc với nhau.
3. Trò chơi trên một bàn cờ ô vuông vô hạn theo quy luật sau: Đầu tiên có n^2 quân cờ được sắp xếp trong một khối hình vuông $n \times n$ của các ô vuông liên tiếp, mỗi quân trên một ô vuông. Nước đi trong trò chơi này là một quân cờ có thể nhảy qua một quân ở ô liền kề đến một ô trống tiếp theo chiều ngang hoặc chiều dọc. Quân cờ sau khi đã nhảy thì bị loại. Tìm giá trị của n để trò chơi có thể kết thúc chỉ với một quân cờ còn lại trên bàn cờ.
4. Cho ba điểm P, Q, R trong một mặt phẳng, gọi $m(PQR)$ là độ dài của đường cao nhỏ nhất của tam giác PQR (hoặc là bằng 0 nếu ba điểm P, Q, R thẳng hàng). Chứng minh rằng: với bất kì các điểm A, B, C, X ta luôn có: $m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$.
5. Hỏi có tồn tại hay không một hàm f từ tập số nguyên dương vào tập số nguyên dương sao cho: $f(1) = 2$, $f(f(n)) = f(n) + n$ với mọi n và $f(n) < f(n+1)$ với mọi n .
6. Có $n > 1$ cái đèn được kí hiệu là $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$ trong một đường tròn. Chúng ta có thể sử dụng L_{n+k} như là L_k . Mỗi đèn tại một thời điểm hoặc là được bật hoặc là tắt. Bắt đầu tất cả các đèn đều bật. Thực hiện các bước $s_0, s_1, \dots$ như sau: tại bước s_i nếu đèn L_{i-1} sáng thì ta chuyển L_i từ trạng thái bật thành tắt hoặc ngược lại chuyển từ tắt thành bật, các đèn khác ta không làm gì cả. Hãy chỉ ra rằng:
(a) Tồn tại một số nguyên dương $M(n)$ sao cho sau $M(n)$ bước thực hiện tất cả các đèn đều trở lại trạng thái ban đầu.
(b) Nếu $n = 2^k$ thì ta có thể lấy $M(n) = n^2 - 1$.
(c) Nếu $n = 2^k + 1$ thì ta có thể lấy $M(n) = n^2 - n + 1$.

34th IMO 1993

1. Let $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, where $n > 1$ is an integer. Prove that $f(x)$ cannot be expressed as the product of two non-constant polynomials with integer coefficients.
2. Let D be a point inside the acute-angled triangle ABC such that $\angle ADB = \angle ACB + 90^\circ$, and $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.
(a) Calculate the ratio $AB \cdot CD / (AC \cdot BD)$.
(b) Prove that the tangents at C to the circumcircles of ACD and BCD are perpendicular.
3. On an infinite chessboard a game is played as follows. At the start n^2 pieces are arranged in an $n \times n$ block of adjoining squares, one piece on each square. A move in the game is a jump in a horizontal or vertical direction over an adjacent occupied square to an unoccupied square immediately beyond. The piece which has been jumped over is removed. Find those values of n for which the game can end with only one piece remaining on the board.
4. For three points P, Q, R in the plane define $m(PQR)$ as the minimum length of the three altitudes of the triangle PQR (or zero if the points are collinear). Prove that for any points A, B, C, X :
$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$
5. Does there exist a function f from the positive integers to the positive integers such that $f(1) = 2$, $f(f(n)) = f(n) + n$ for all n , and $f(n) < f(n+1)$ for all n ?
6. There are $n > 1$ lamps $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$ in a circle. We use L_{n+k} to mean L_k . A lamp is at all times either on or off. Initially they are all on. Perform steps $s_0, s_1, \dots$ as follows: at step s_i , if L_{i-1} is lit, then switch L_i from on to off or vice versa, otherwise do nothing. Show that:
(a) There is a positive integer $M(n)$ such that after $M(n)$ steps all the lamps are on again;
(b) If $n = 2^k$, then we can take $M(n) = n^2 - 1$.
(c) If $n = 2^k + 1$, then we can take $M(n) = n^2 - n + 1$.

Kỳ thi IMO lần thứ 35 - 1994

1. Cho các số nguyên dương m, n . Gọi $a_1, a_2, \dots, a_m$ là các phần tử khác nhau của tập $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ sao cho với bất kì $a_i + a_j \leq n$ (với i, j nào đó, có thể $i = j$) ta có $a_i + a_j = a_k$ với k nào đó.
Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$$

2. Cho tam giác cân ABC với $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC và O là điểm trên AM sao cho $OB \perp AB$. Q là một điểm tùy ý trên BC (khác với B và C), E và F lần lượt là các điểm nằm trên AB và AC sao cho E, Q, F là các điểm khác nhau và thẳng hàng.

Chứng minh rằng: $OQ \perp EF$ khi và chỉ khi $QE = QF$.

3. Với bất kì số nguyên dương k gọi $f(k)$ là số các phần tử trong tập $\{k+1, k+2, \dots, 2k\}$ mà có đúng ba số 1 khi viết dưới dạng nhị phân. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương m tồn tại ít nhất một số k với $f(k) = m$, và xác định tất cả m để tồn tại duy nhất một số k như vậy.

4. Xác định tất cả các cặp theo thứ tự (m, n) của các số nguyên dương để $\frac{n^3+1}{mn-1}$ là một số nguyên.

5. Cho S là tập hợp tất cả các số thực lớn hơn -1 . Tìm tất cả các hàm $f: S \rightarrow S$ sao cho:

$f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ với mọi x, y và $\frac{f(x)}{x}$ là tăng chặt trên các khoảng $-1 < x < 0$ và $0 < x$.

6. Hãy chỉ ra rằng tồn tại một tập A các số nguyên dương có tính chất sau: với bất kì một tập S vô hạn các số nguyên tố, tồn tại hai số nguyên dương m thuộc A và n không thuộc A , mỗi số này là tích của k phần tử khác nhau của S (với $k \geq 2$).

35th IMO 1994

1. Let m and n be positive integers. Let $a_1, a_2, \dots, a_m$ be distinct elements of $\{1, 2, \dots, n\}$ such that whenever $a_i + a_j \leq n$ for some i, j (possibly the same) we have $a_i + a_j = a_k$ for some k . Prove that:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$$

2. ABC is an isosceles triangle with $AB = AC$. M is the midpoint of BC and O is the point on the line AM such that OB is perpendicular to AB . Q is an arbitrary point on BC different from B and C . E lies on the line AB and F lies on the line AC such that E, Q, F are distinct and collinear. Prove that OQ is perpendicular to EF if and only if $QE = QF$.

3. For any positive integer k , let $f(k)$ be the number of elements in the set $\{k+1, k+2, \dots, 2k\}$ which have exactly three 1s when written in base 2. Prove that for each positive integer m , there is at least one k with $f(k) = m$, and determine all m for which there is exactly one k .

4. Determine all ordered pairs (m, n) of positive integers for which $\frac{n^3+1}{mn-1}$ is an integer.

5. Let S be the set of all real numbers greater than -1 . Find all functions f from S into S such that $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ for all x and y , and $f(x)/x$ is strictly increasing on each of the intervals $-1 < x < 0$ and $0 < x$.

6. Show that there exists a set A of positive integers with the following property: for any infinite set S of primes, there exist two positive integers m in A and n not in A , each of which is a product of k distinct elements of S for some $k \geq 2$.

Kỳ thi IMO lần thứ 36 - 1995

1. Cho A, B, C, D là 4 điểm khác nhau trên một đường thẳng. Các đường tròn đường kính AC và BD cắt nhau tại X, và Y. XY cắt BC tại Z. Gọi P là điểm trên XY (khác với Z). Đường thẳng CP giao với đường tròn đường kính AC tại C và M. Đường thẳng BP giao với đường tròn đường kính BD tại B và N. Chứng minh rằng: các đường thẳng AM, DN, XY là đồng quy.

2. Cho a, b, c là các số thực dương với $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

3. Xác định tất cả các số nguyên $n > 3$ để tồn tại n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ trong mặt phẳng trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, và các số thực $r_1, r_2, \dots, r_n$ sao cho với bất kì i, j, k khác nhau diện tích của tam giác $A_i A_j A_k = r_i + r_j + r_k$.

4. Tìm giá trị lớn nhất của x_0 để tồn tại một dãy số thực dương $x_0, x_1, \dots, x_{1995}$ với $x_0 = x_{1995}$ sao cho:

$$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i} \text{ với } i = 1, \dots, 1995.$$

5. Cho ABCDEF là lục giác lồi với $AB = BC = CD$ và $DE = EF = FA$ sao cho $\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$.

Giả sử rằng: G và H là các điểm bên trong của lục giác sao cho: $\angle AGB = \angle DHF = 120^\circ$.

Chứng minh rằng: $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$.

6. Cho p là một số nguyên tố lẻ. Có bao nhiêu tập con gồm p phần tử của $\{1, 2, \dots, 2p\}$ mà tổng của tất cả các phần tử này chia hết cho p.

36th IMO 1995

1. Let A, B, C, D be four distinct points on a line, in that order. The circles with diameter AC and BD intersect at X and Y. The line XY meets BC at Z. Let P be a point on the line XY other than Z. The line CP intersects the circle with diameter AC at C and M, and the line BP intersects the circle with diameter BD at B and N. Prove that the lines AM, DN, XY are concurrent.

2. Let a, b, c be positive real numbers with $abc = 1$. Prove that:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

3. Determine all integers $n > 3$ for which there exist n points $A_1, \dots, A_n$ in the plane, no three collinear, and real numbers $r_1, \dots, r_n$ such that for any distinct i, j, k , the area of the triangle $A_i A_j A_k$ is $r_i + r_j + r_k$.

4. Find the maximum value of x_0 for which there exists a sequence $x_0, x_1, \dots, x_{1995}$ of positive reals with $x_0 = x_{1995}$ such that for $i = 1, \dots, 1995$:

$$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$$

5. Let ABCDEF be convex hexagon with $AB = BC = CD$ and $DE = EF = FA$, such that $\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$. Suppose that G and H are points in the interior of the hexagon such that $\angle AGB = \angle DHF = 120^\circ$. Prove that $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$.

6. Let p be an odd prime number. How many p-element subsets A of $\{1, 2, \dots, 2p\}$ are there, the sum of whose elements is divisible by p?

Kỳ thi IMO lần thứ 37 - 1996

1. Cho một số nguyên dương r và một tấm bảng hình chữ nhật được chia thành 20×12 ô vuông đơn vị. Các di chuyển sau được cho phép trên bảng: có thể di chuyển từ một ô vuông này đến ô vuông khác chỉ nếu khoảng cách tâm của hai ô vuông này là $\sqrt{r}$. Nhiệm vụ là tìm ra một cách di chuyển từ một ô góc của bảng đến ô góc khác của bảng cùng nằm trên cạnh dài của bảng.

- (a) Hãy chỉ ra là không làm được điều đó nếu r chia hết cho 2 hoặc 3.
- (b) Chứng minh rằng có thể làm được nếu $r = 73$.
- (c) Có thể làm được không nếu $r = 97$?

2. Cho P là một điểm trong tam giác ABC sao cho $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$. Gọi D, E lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác APB và APC . Hãy chỉ ra rằng AP, BD, CE cắt nhau tại một điểm.

3. Cho tập các số nguyên không âm S . Tìm tất cả các hàm $f: S \rightarrow S$ sao cho:

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n) \text{ với mọi } m, n.$$

4. Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn: $15a + 16b$ và $16a - 15b$ đều là bình phương của các số nguyên dương. Số nhỏ hơn trong hai số này sẽ nhận giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu.

5. Cho $ABCDEF$ là một lục giác lồi sao cho $AB \parallel DE, BC \parallel EF$ và $CD \parallel FA$. Gọi R_A, R_C, R_E là bán kính của đường tròn ngoại tiếp các tam giác FAB, BCD, DEF . Và gọi p là chu vi của lục giác.

Chứng minh rằng:

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}$$

6. Cho p, q, n là ba số nguyên dương với $p + q < n$.

Gọi $x_0, x_1, \dots, x_n$ là các số nguyên sao cho $x_0 = x_n = 0$ và với mỗi $1 \leq i \leq n$ có $x_i - x_{i-1} = p$ hoặc $-q$. Hãy chỉ ra rằng tồn tại chỉ số $i < j$ với cặp $(i, j) \neq (0, n)$ sao cho $x_i = x_j$.

37th IMO 1996

1. We are given a positive integer r and a rectangular board divided into 20×12 unit squares. The following moves are permitted on the board: one can move from one square to another only if the distance between the centers of the two squares is $\sqrt{r}$. The task is to find a sequence of moves leading between two adjacent corners of the board which lie on the long side.

- (a) Show that the task cannot be done if r is divisible by 2 or 3.
- (b) Prove that the task is possible for $r = 73$.
- (c) Can the task be done for $r = 97$?

2. Let P be a point inside the triangle ABC such that $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$. Let D, E be the incenters of triangles APB, APC respectively. Show that AP, BD, CE meet at a point.

3. Let S be the set of non-negative integers. Find all functions f from S to itself such that $f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$ for all m, n .

4. The positive integers a, b are such that $15a + 16b$ and $16a - 15b$ are both squares of positive integers. What is the least possible value that can be taken on by the smaller of these two squares?

5. Let $ABCDEF$ be a convex hexagon such that AB is parallel to DE , BC is parallel to EF , and CD is parallel to FA . Let R_A, R_C, R_E denote the circumradii of triangles FAB, BCD, DEF respectively, and let p denote the perimeter of the hexagon. Prove that:

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}$$

6. Let p, q, n be three positive integers with $p + q < n$. Let $x_0, x_1, \dots, x_n$ be integers such that $x_0 = x_n = 0$, and for each $1 \leq i \leq n$, $x_i - x_{i-1} = p$ or $-q$. Show that there exist indices $i < j$ with $(i, j) \neq (0, n)$ such that $x_i = x_j$.

Kỳ thi IMO lần thứ 38 - 1997

1. Trong mặt phẳng có các điểm với toạ độ nguyên là đỉnh của các hình vuông đơn vị. Các hình vuông này được tô màu xen kẽ trắng - đen giống như trên bàn cờ. Với bất kì cặp số nguyên dương (m, n) xét tam giác vuông có các đỉnh có toạ độ nguyên và hai cạnh bên có độ dài là m, n nằm dọc theo các cạnh của các hình vuông. Gọi S_1 là tổng diện tích phần đen của tam giác, và S_2 là tổng diện tích phần trắng. Và đặt $f(m, n) = |S_1 - S_2|$.

(a) Tính $f(m, n)$ với mọi số nguyên dương m, n mà hoặc là cả 2 đều chẵn hoặc là cả 2 đều lẻ.

(b) Chứng minh rằng: $f(m, n) \leq \frac{\max(m, n)}{2}$ với mọi m, n .

(c) Chỉ ra không tồn tại một hằng số C sao cho $f(m, n) < C$ với mọi m, n .

2. Cho tam giác ABC có góc A nhỏ nhất. Hai điểm B, C của tam giác chia đường tròn ngoại tiếp tam giác ra làm hai cung. Gọi U là một điểm nằm trong một cung giữa B và C (cung không chứa A). Đường trung trực của AB và AC cắt AU tương ứng tại V và W. Các đường thẳng BV và CW cắt nhau tại T. Hãy chứng minh: $AU = TB + TC$.

3. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực thoả mãn $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$ và $|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$ với mọi i .

Chứng minh rằng tồn tại một hoán vị y_i của x_i sao cho: $|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}$.

4. Ma trận $n \times n$ được tạo từ tập $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ được gọi là ma trận Silver nếu với mỗi $i = 1, 2, \dots, n$ tất cả các phần tử ở cột thứ i và hàng thứ i gộp lại chứa tất cả các phần tử của S . Hãy chứng minh rằng:

(a) Không tồn tại ma trận Silver với $n = 1997$.

(b) Tồn tại vô số ma trận Silver.

5. Tìm tất cả các cặp (a, b) của các số nguyên dương thoả mãn: $a^{b^2} = b^a$.

6. Với mỗi số nguyên dương n gọi $f(n)$ là số cách biểu diễn n theo tổng các lũy thừa của 2 với số mũ không âm (không xét sự hoán vị các số hạng). Ví dụ: $f(4) = 4$ vì 4 có thể biểu diễn thành: $4, 2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1$. Chứng minh rằng: với bất kì số nguyên $n \geq 3$ thì: $2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$.

38th IMO 1997

1. In the plane the points with integer coordinates are the vertices of unit squares. The squares are colored alternately black and white as on a chessboard. For any pair of positive integers m and n , consider a right-angled triangle whose vertices have integer coordinates and whose legs, of lengths m and n , lie along the edges of the squares. Let S_1 be the total area of the black part of the triangle, and S_2 be the total area of the white part. Let $f(m, n) = |S_1 - S_2|$.

(a) Calculate $f(m, n)$ for all positive integers m and n which are either both even or both odd.

(b) Prove that $f(m, n) \leq \frac{\max(m, n)}{2}$ for all m, n .

(c) Show that there is no constant C such that $f(m, n) < C$ for all m, n .

2. The angle at A is the smallest angle in the triangle ABC. The points B and C divide the circumcircle of the triangle into two arcs. Let U be an interior point of the arc between B and C which does not contain A. The perpendicular bisectors of AB and AC meet the line AU at V and W, respectively. The lines BV and CW meet at T. Show that $AU = TB + TC$.

3. Let $x_1, x_2, \dots, x_n$ be real numbers satisfying $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$ and $|x_i| \leq (n+1)/2$ for all i . Show that there exists a permutation y_i of x_i such that $|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq (n+1)/2$.

4. An $n \times n$ matrix whose entries come from the set $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ is called silver matrix if, for each $i = 1, 2, \dots, n$, the i th row and the i th column together contain all elements of S . Show that:

(a) there is no silver matrix for $n = 1997$;

(b) silver matrices exist for infinitely many values of n .

5. Find all pairs (a, b) of positive integers that satisfy $a^{b^2} = b^a$.

6. For each positive integer n , let $f(n)$ denote the number of ways of representing n as a sum of powers of 2 with non-negative integer exponents. Representations which differ only in the ordering of their summands are considered to be the same. For example, $f(4) = 4$, because 4 can be represented as $4, 2 + 2, 2 + 1 + 1$ or $1 + 1 + 1 + 1$. Prove that for any integer $n \geq 3$, $2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$.

Kỳ thi IMO lần thứ 39 - 1998

1. Cho tứ giác lồi ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau, và hai cạnh đối diện AB và CD không song song với nhau. P là giao điểm của hai đường trung trực của AB và CD là điểm nằm ở trong tứ giác. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là nội tiếp đường tròn nếu và chỉ nếu hai tam giác ABP và CDP có diện tích bằng nhau.

2. Trong một cuộc thi có a người dự thi và có b giám khảo, trong đó $b \geq 3$ là một số lẻ. Mỗi một giám khảo đánh giá cho thí sinh của mình hoặc là "đỗ" hoặc là "trượt". Giả sử k là số mà bất kì 2 giám khảo nào đều có chung sự đánh giá với nhiều nhất là k thí sinh.

Chứng minh rằng: $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

3. Với bất kì số nguyên dương n gọi $d(n)$ là số ước số dương của n (kể cả 1 và n). Xác định tất cả các số nguyên dương k sao cho: $d(n^2) = kd(n)$, với n nào đó.

4. Xác định tất cả các cặp (a, b) của các số nguyên dương sao cho $a^2b + a + b$ chia hết cho $ab^2 + b + 7$.

5. Cho I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC lần lượt tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại K, L, M. Đường thẳng đi qua B song song với MK cắt các đường thẳng LM, LK tương ứng tại R và S. Chứng minh rằng tam giác RIS là nhọn (tam giác nhọn là tam giác có cả ba góc đều nhọn).

6. Xét tất cả các hàm $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn: $f(t^2f(s)) = sf(t)^2$ với mọi s và t.

Trong đó: $\mathbb{Z}^+$ là tập tất cả các số nguyên dương.

Xác định giá trị nhỏ nhất có thể của $f(1998)$.

39th IMO 1998

1. In the convex quadrilateral ABCD, the diagonals AC and BD are perpendicular and the opposite sides AB and DC are not parallel. The point P, where the perpendicular bisectors of AB and DC meet, is inside ABCD. Prove that ABCD is cyclic if and only if the triangles ABP and CDP have equal areas.

2. In a competition there are a contestants and b judges, where $b \geq 3$ is an odd integer. Each judge rates each contestant as either "pass" or "fail". Suppose k is a number such that for any two judges their ratings coincide for at most k contestants. Prove $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

3. For any positive integer n, let $d(n)$ denote the number of positive divisors of n (including 1 and n). Determine all positive integers k such that $d(n^2) = kd(n)$ for some n.

4. Determine all pairs (a, b) of positive integers such that $ab^2 + b + 7$ divides $a^2b + a + b$.

5. Let I be the incenter of the triangle ABC. Let the incircle of ABC touch the sides BC, CA, AB at K, L, M respectively. The line through B parallel to MK meets the lines LM and LK at R and S respectively. Prove that the angle RIS is acute.

6. Consider all functions f from the set of all positive integers into itself satisfying $f(t^2f(s)) = sf(t)^2$ for all s and t. Determine the least possible value of $f(1998)$.

Kỳ thi IMO lần thứ 40 - 1999

1. Tìm tất cả các tập hữu hạn S có ít nhất 3 điểm trong mặt phẳng sao cho với mọi 2 điểm khác nhau A và B thuộc S , đường trung trực của AB là trục đối xứng của S .

2. Cho trước số nguyên $n \geq 2$. Tìm hằng số nhỏ nhất C sao cho với mọi số thực không âm $x_1, \dots, x_n$ ta có:

$$\sum_{i < j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum x_i \right)^4.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

3. Cho một bảng vuông $n \times n$ với n chẵn. Hai ô vuông khác nhau của bảng được gọi là kề nhau nếu chúng có chung một cạnh (nhưng một ô vuông không thể được gọi là kề với chính nó). Tìm số nhỏ nhất có thể các ô vuông được đánh dấu sao cho mỗi ô vuông (đánh dấu hoặc không) là kề với ít nhất một ô vuông đánh dấu.

4. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (n, p) sao cho: p là một số nguyên tố, $n \leq 2p$ và $(p-1)^n + 1$ chia hết cho n^{p-1} .

5. Hai đường tròn C_1 và C_2 nằm trong đường tròn C và tiếp xúc với đường tròn C tương ứng tại M và N . Đường tròn C_2 đi qua tâm của đường tròn C_1 . Dây cung chung của C_1 và C_2 kéo dài cắt đường tròn C tại A và B . Đường thẳng MA, MB cắt C_1 tại điểm thứ hai là E và F . Chứng minh rằng đường thẳng EF tiếp xúc với C_2 .

6. Xác định tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, ($\mathbb{R}$ - là tập các số thực).

40th IMO 1999

1. Find all finite sets S of at least three points in the plane such that for all distinct points A, B in S , the perpendicular bisector of AB is an axis of symmetry for S .

2. Let $n \geq 2$ be a fixed integer. Find the smallest constant C such that for all non-negative reals $x_1, \dots, x_n$:

$$\sum_{i < j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum x_i \right)^4$$

Determine when equality occurs.

3. Given an $n \times n$ square board, with n even. Two distinct squares of the board are said to be adjacent if they share a common side, but a square is not adjacent to itself. Find the minimum number of squares that can be marked so that every square (marked or not) is adjacent to at least one marked square.

4. Find all pairs (n, p) of positive integers, such that: p is prime; $n \leq 2p$; and $(p-1)^n + 1$ is divisible by n^{p-1} .

5. The circles C_1 and C_2 lie inside the circle C , and are tangent to it at M and N , respectively. C_1 passes through the center of C_2 . The common chord of C_1 and C_2 , when extended, meets C at A and B . The lines MA and MB meet C_1 again at E and F . Prove that the line EF is tangent to C_2 .

6. Determine all functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $f(x - f(y)) = f(f(y)) + x f(y) + f(x) - 1$ for all x, y in $\mathbb{R}$. [$\mathbb{R}$ is the reals.]

Kỳ thi IMO lần thứ 41 - 2000

1. AB là tiếp tuyến chung của hai đường tròn cắt nhau tại M và N (mỗi điểm A và B nằm trên một đường tròn). C là điểm nằm trên đường tròn chứa A và D là điểm nằm trên đường tròn chứa B sao cho AB song song với CD. Các dây cung NA và CM cắt nhau tại P; NB cắt MD tại Q. Các tia CA và DB cắt nhau tại E. Chứng minh rằng $PE = QE$.
2. Cho A, B, C là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$(A-1+\frac{1}{B})(B-1+\frac{1}{C})(C-1+\frac{1}{A}) \leq 1$$

3. Cho k là một số thực dương, N là một số nguyên lớn hơn 1. N điểm được đặt trên một đường thẳng, tất cả không được trùng nhau. Các di chuyển được tiến hành như sau: chọn bất kì hai điểm A, B không trùng nhau. Giả sử A nằm bên phải của B. Thay B bởi một điểm khác là B' nằm bên phải của A sao cho $BA = k AB'$. Với giá trị nào của k ta có thể di chuyển các điểm xa tùy ý về bên phải bằng các di chuyển được lặp đi lặp lại nhiều lần.
4. 100 lá bài được đánh số từ 1 đến 100 (mỗi số ứng với một lá bài) và được bỏ vào trong 3 hộp (mỗi một hộp có ít nhất 1 lá bài). Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các lá bài vào ba hộp để sao cho nếu chọn hai hộp bất kỳ và lấy ra từ mỗi hộp một lá bài thì biết được tổng của các lá bài này đủ để nhận biết được hộp thứ 3.
5. Có thể tìm được hay không số tự nhiên dương N thỏa mãn:
N chia hết cho đúng 2000 số nguyên tố khác nhau và $2^N + 1$ chia hết cho N ?
6. Cho tam giác nhọn $A_1A_2A_3$. Chân các đường cao của tam giác hạ từ A_i xuống các cạnh đối diện là H_i , và đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh đối diện với đỉnh A_i là T_i . Giả sử L_1, L_2, L_3 là đối xứng gương của các đường thẳng H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 qua các đường thẳng tương ứng T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 .
Chứng minh rằng các đường thẳng L_1, L_2, L_3 tạo thành một tam giác có các đỉnh nằm trên đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

41st IMO 2000

1. AB is tangent to the circles CAMN and NMBD. CD is parallel to AB. The chords NA and CM meet at P; the chords NB and MD meet at Q. The rays CA and DB meet at E. Prove that $PE = QE$.
2. A, B, C are positive reals with product 1. Prove that
$$(A - 1 + \frac{1}{B})(B - 1 + \frac{1}{C})(C - 1 + \frac{1}{A}) \leq 1$$
3. k is a positive real. N is an integer greater than 1. N points are placed on a line, not all coincident. A move is carried out as follows. Pick any two points A and B which are not coincident. Suppose that A lies to the right of B. Replace B by another point B' to the right of A such that $BA = k AB'$. For what values of k can we move the points arbitrarily far to the right by repeated moves?
4. 100 cards are numbered 1 to 100 (each card different) and placed in 3 boxes (at least one card in each box). How many ways can this be done so that if two boxes are selected and a card is taken from each, then the knowledge of their sum alone is always sufficient to identify the third box?
5. Can we find N divisible by just 2000 different primes, so that N divides $2^N + 1$? [N may be divisible by a prime power.]
6. $A_1A_2A_3$ is an acute-angled triangle. The foot of the altitude from A_i is H_i and the incircle touches the side opposite A_i at T_i . The line L_1 is reflected of the line H_2H_3 in the line T_1T_2 . Similarly, the line L_2 is reflected of the H_3H_1 in the line T_3T_1 and L_3 is reflected of the H_1H_2 in the line T_1T_2 . Show that the three new lines L_1, L_2, L_3 form a triangle with vertices on the incircle.

Kỳ thi IMO lần thứ 42 - 2001

1. Giả sử ABC là tam giác nhọn với tâm vòng tròn ngoại tiếp O . Giả sử P nằm trên BC là chân của đoạn thẳng kẻ từ A . Giả sử có $\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ$.

Hãy chứng minh $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$.

2. Hãy chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

với mọi số dương a, b và c .

3. Có 21 học sinh nữ và 21 học sinh nam tham gia vào một kỳ thi Toán.

- Mỗi thí sinh giải được ít nhất là 6 bài.
 - Với học sinh nữ và với mỗi học sinh nam tồn tại một bài toán giải được bởi cả hai học sinh này.
- Chứng minh rằng tồn tại một bài toán giải được bởi ít nhất là 3 học sinh nữ và 3 học sinh nam.

4. Giả sử n là một số tự nhiên lẻ lớn hơn 1, và giả sử $k_1, k_2, \dots, k_n$ là các số nguyên cho trước. Với mỗi hoán vị

trong số $n!$ hoán vị $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ của $1, 2, \dots, n$, giả sử: $S(a) = \sum_{i=1}^n k_i a_i$.

Chứng minh rằng tồn tại hai hoán vị b và c , với $b \neq c$ sao cho $n!$ là ước số của $S(b) - S(c)$.

5. Trong tam giác ABC , giả sử AP phân giác góc $\angle BAC$ với P trên BC , và giả sử BQ phân giác góc $\angle ABC$ với Q trên CA . Giả sử rằng $\angle BAC = 60^\circ$ và $AB + BP = AQ + QB$.

Khi đó các góc của tam giác ABC sẽ có thể nhận các giá trị nào?

6. Giả sử a, b, c, d là các số nguyên với $a > b > c > d > 0$. Giả sử thỏa mãn đẳng thức

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Chứng minh rằng $ab + cd$ không là số nguyên tố.

42st IMO 2001

1. Let ABC be an acute-angled triangle with circumcenter O . Let P on BC be the foot of the altitude from A . Suppose that $\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ$.

Prove that $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$.

2. Prove that

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

for all positive numbers a, b and c .

3. Twenty-one girls and twenty-one boys took part in a mathematical contest.

- Each contestant solved at most six problems.
- For each girl and each boy, at least one problem was solved by both of them.

Prove that there was a problem that was solved by at least three girls and at least three boys.

4. Let n be an odd integer greater than 1, and let $k_1, k_2, \dots, k_n$ be given integers. For each of the $n!$ permutations $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ of $1, 2, \dots, n$, let

$$S(a) = \sum_{i=1}^n k_i a_i.$$

Prove that there are two permutations b and c , with $b \neq c$ such that $n!$ is a divisor of $S(b) - S(c)$.

5. In a triangle ABC , let AP bisect $\angle BAC$, with P on BC , and let BQ bisect $\angle ABC$, with Q on CA . It is known that $\angle BAC = 60^\circ$ and that $AB + BP = AQ + QB$.

What are the possible angles of triangle ABC ?

6. Let a, b, c, d be integers with $a > b > c > d > 0$. Suppose that

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Prove that $ab + cd$ is not prime.

Còn một số đề thi sẽ bổ sung vào những lần in sau.