TRƯỜNG THPT CHUYÊN TIỀN GIANG

TỔ HÀNH CHÁNH

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

ĐỀ TÀI:

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC NÂNG CAO

Người thực hiện : NGUYỄN VŨ THANH

Năm học 2009-2010

MỤC LỤC

I. PHẦN MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài:

Từ khi tham dự các hội nghị Chuyên đề Bồi dưỡng học sinh giỏi THPT do trường Đại học Khoa học tự nhiên Hà nội tổ chức hàng năm từ 2002 đến nay,được học tập các chuyên đề do các giảng viên , các chuyên gia Toán của Bộ trình bày và được sự động viên của thầy Trương Thành Phú chuyên viên môn Toán của Sở Giáo dục và đào tạo Tiền Giang chúng tôi có một tâm huyết là sẽ cố gắng thực hiện hoàn chỉnh , cụ thể hoá các chuyên đề phù hợp với trình độ học sinh tỉnh nhà để đóng góp vào thành tích chung của Tỉnh trong các kỳ thi HSG cấp khu vực và cấp quốc gia.

Trong những năm gần đây bộ môn Toán của tỉnh Tiền Giang đã có những tiến bộ và đạt được một số thành tích đáng kể trong các kỳ thi HSG khu vực. Nhưng gần đây Bộ đã thay đổi mạnh về quy chế thi HSG cấp Quốc gia đó là không còn phân chia hai bảng A,B như trước mà chỉ có một bảng thống nhất chung toàn quốc. Đề thi khó hơn và số lượng giải ít hơn gây khó khăn cho cả Giáo viên và học sinh môn Toán tỉnh nhà.

Trong điều kiện khó khăn đó việc tìm tài liệu và viết các chuyên đề này là việc cần thiết trong tình hình hiện nay.Được sự ủng hộ của các thầy cô trong tổ Toán trường THPT Chuyên Tiền Giang chúng tôi thực hiện viết chuyên đề :” ***Một số Bất đẳng thức nâng cao***”.

2. Mục tiêu nghiên cứu:

Nhằm hệ thống và phân loại kiến thức các bài tập có sử dụng một số bất đẳng thức nâng cao mà chỉ học sinh chuyên Toán mới được học như: Bất đẳng thức Côsi mở rộng , Bất đẳng thức Bunhiacopxki mở rộng , Bất đẳng thức Jensen , Bất đẳng thức Tsêbưsep , Bất đẳng thức Schwarz ,… .Giúp cho học sinh có hệ thống kiến thức và biết vận dụng vào việc giải các bài toán đại số đồng thời định hướng suy nghĩ tư duy toán học và khả năng vận dụng sáng tạo trong các bài toán mới.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu:

Trình bày nội dung các bất đẳng thức nâng cao sau đó chứng minh và hướng dẫn giải các bài tập áp dụng

Tùy theo từng nội dung của Bất đẳng thức có sự liên hệ với các bất đẳng thức còn lại trong đó có sử dụng nhiều đến phương pháp đạo hàm để chứng minh bất đẳng thức mà trong các kỳ thi học sinh giỏi toán thường hay gặp.

Vì đây là chuyên đề nâng cao về bất đẳng thức nên chúng tôi không trình bày các phương pháp chứng minh bất đẳng thức , coi như học sinh chuyên Toán phải nắm để làm cơ sở cho việc học chuyên đề này.

Rèn luyện tư duy toán thông qua giải các bài tập về chứng minh bất đẳng thức và áp dụng tìm giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất đồng thời trao đổi và học tập kinh nghiệm với các thầy cô bộ môn Toán của tỉnh Tiền Giang.

4. Phương pháp nghiên cứu

-Dựa vào các chuyên đề đã học ở Hà Nội và các tài liệu trong tất cả các đợt bồi dưỡng để trình bày hệ thống các Bất đẳng thức nâng cao thường gặp trong các kỳ thi học sinh giỏi Toán.

-Hướng dẫn học sinh Đội tuyển tìm tài liệu có liên quan,phân loại bài tập,nhận xét cách giải, tạo tình huống có vấn đề để HS cùng trao đổi nghiên cứu.

-Hệ thống và sắp xếp các dạng bài tập từ dễ đến khó và có các lời giải cụ thể.

-Phương pháp phân tích:giúp học sinh nắm rõ bản chất vấn đề , lựa chọn phương pháp giải phù hợp đồng thời mở rộng và tương tự hoá bài toán.

5.Một số kết quả đạt được

Giúp cho học sinh đội tuyển có thêm phương pháp và tài liệu cần thiết để giải các bài tập về Bất đẳng thức và áp dụng tìm giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất .

Qua chuyên đề này giúp học sinh khắc sâu thêm kiến thức về Bất đẳng thức và đạo hàm.

Giúp cho học sinh có thêm phương pháp để viết các chuyên đề nâng cao khác.

II.NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

1.Các bài tập về Bất đẳng thức và áp dụng tìm giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất thường gặp trong các đề thi học sinh giỏi cấp Quốc Gia gần đây.Với mong muốn có một chuyên đề bất đẳng thức phong phú nên chúng tôi viết chuyên đề : ” ***Một số Bất đẳng thức nâng cao”*** để phục vụ giảng dạy cho học sinh Đội tuyển tỉnh nhà.

2. Đề tài được chia làm 8 chương:

Chương I: BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN

Chương II: BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

Chương III: BẤT ĐẲNG THỨC CHEBYSHEV(Tsêbưsep)

Chương IV: BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI MỞ RỘNG

Chương V: BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI MỞ RỘNG

Chương VI: BẤT ĐẲNG THỨC SCHWARZ (SVACXO)

Chương VII: MỘT MỞ RỘNG CỦA CÁC BẤT ĐẲNG THỨC SVACXO,TRÊBUSEP,BUNHIACOPSKI

Chương VIII: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT THỨ TỰ CỦA HAI DÃY BẤT ĐẲNG THỨC.

Trong mỗi chương sau phần trình bày Bất đẳng thức là phần chứng minh và các bài tập áp dụng.

Dù cố gắng nhiều nhưng đề tài không tránh khỏi sai sót , rất mong nhận được sự đóng góp từ các đồng nghiệp môn Toán của tỉnh nhà.

Sau đây và trình bày phần nội dung của đề tài.

Chương I: BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN

I.1.Định lý 1:

Cho hàm số y = f(x) có $f^{//}(x) > 0$ với $\forall x \in (a;b)$ (hàm số có đồ thị lõm trên (a;b))

Với $c \in (a;b)$ và $y = f^{/}(c)(x-c) + f(c)$ là phương trình tiếp tuyến của (C) tại M(c,f(c) thì $f(x) \geq f^{/}(c)(x-c) + f(c)$, $\forall x \in (a;b)$ (1)

(Đường cong (C) luôn ở phía trên mọi tiếp tuyến tại M với $c \in (a;b)$)

Chứng minh: Với $c \in (a;b)$

i/ Với x = c (1) xảy ra dấu bằng

ii/ Với x < c : Áp dụng định lí Lagrange : $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f^{/}(d)$, $d \in (x;c)$

$f^{/}$ tăng trên (a;b) nên $f^{/}(d) < f^{/}(c) \Rightarrow f(x) - f(c) > (x-c)f^{/}(c)$ (do x < c)

iii/Tương tự với x > c ta cũng có $f(x) - f(c) > (x-c)f^{/}(c)$

Vậy $f(x) \geq f^{/}(c)(x-c) + f(c)$, $\forall x \in (a;b)$

Chú ý : Nếu $f^{//}(x) < 0$ $\forall x \in (a;b)$ thì (1) đổi chiều (đồ thị (C) lồi trên (a;b))

I.2.Định lý 2:(BĐT Jensen)

Cho hàm số y=f(x) có đạo hàm cấp 2 trên (a ;b)

a/ Nếu $f^{//}(x) > 0$ với $\forall x \in (a;b)$ thì $\forall x_i \in (a;b)$,$i = 1,2,...,n$ và $\forall \alpha_i \in (0;1)$ thỏa $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ta có : $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n)$ (2)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$

b/ Nếu $f^{//}(x) < 0$ với $\forall x \in (a;b)$ thì (2) đổi chiều.

Chứng minh:

a/ Đặt $c=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \in (a;b)$ .Theo định lí 1 ta có $f(x)\ge f^{/}(c)(x-c)+f(c)$, $\forall x\in(a;b)$

Thay x= x_i :

$f(x_i)\ge f^{/}(c)(x_i-c)+f(c)$, $\forall x\in(a;b)\Rightarrow \alpha_i f(x_i)\ge f^{/}(c)\alpha_i x_i - cf^{/}(c)\alpha_i+\alpha_i f(c)$

Lấy tổng ta được: $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)\ge f^{/}(c)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i - cf^{/}(c)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i + f(c)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$

Vì $c=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ và $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ nên

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)\ge cf^{/}(c)-cf^{/}(c)+f(c)\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)\ge f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x_i = c hay $x_1=x_2=...=x_n$

b/ Chứng minh tương tự

Đặc biệt : Nếu $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=\frac{1}{n}$ thì BĐT (2) thành :

$$f(\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n})\le\frac{f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+...+f(\alpha_n)}{n} \quad (3)$$

Chú ý : Bằng quy nạp ta CM được nếu (3) đúng với n=2 thì (3) đúng với mọi n tự nhiên lớn hơn 2

I.3.BĐT Jensen dạng tổng quát ;

Cho hàm số y=f(x) có đạo hàm cấp 2 trên (a ;b)

a/ Nếu $f^{//}(x)>0$ với $\forall x\in(a;b)$ thì $\forall x_i\in(a;b)$,$i=1,2,...,n$ và $\forall\alpha_i>0$ ta có :

$$f(\frac{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n})\le\frac{\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+...+\alpha_nf(x_n)}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n} \quad (4)$$

b/ Nếu $f^{//}(x) < 0$ với $\forall x \in (a;b)$ thì (4) đổi chiều.

Chứng minh: Áp dụng BĐT Jensen với $\beta_i = \dfrac{\alpha_i}{\sum \alpha_k}$, $\forall i$

I.4. Chứng minh các BĐT cổ điển bằng cách áp dụng BĐT Jensen:

a/*BĐT CôSi* : Cho n số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ ta có $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

Chứng minh: Xét hàm số f(x)=lnx với x > 0

Ta có $f^{/}(x) = \dfrac{1}{x}$, $f^{//}(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0 \ \ \forall x > 0$.Áp dụng BĐT Jensen ta có :

$$\frac{f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n)}{n} \leq f\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right) \Rightarrow \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n}{n} \leq \ln \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

$$\Rightarrow \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \ln \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Vậy $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

b/BĐT Bunhiacopxki:

Xét hàm số $f(x) = x^2$ có $f^{//}(x) = 2 > 0$. Áp dụng BĐT Jensen dạng tổng quát (4) ta có:

$$\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}\right)^2 \leq \frac{\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + ... + \alpha_n x_n^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n\right)^2 \leq (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)(\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + ... + \alpha_n x_n^2)$$

Đặt $x_i = \dfrac{a_i}{b_i}$ và $\alpha_i = b_i^2$ ta có :

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$

c/BĐT Holder

Cho $a_i > 0; b_i > 0\ (i = 1,2,...,n)$; p > 0 , q > 0 và $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ .Ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi : $\dfrac{a_1^p}{b_1^q} = ... = \dfrac{a_n^p}{b_n^q}$

Chứng minh:

Ta có p > 1 .Xét hàm số $f(x) = x^p$ $, x > 0.$

Ta có $f^{//}(x) = p(p-1)x^{p-2}$ $, \forall x > 0.$

Áp dụng BĐT Jensen dạng tổng quát (4) ta có:

$$\left(\frac{\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + ... + \alpha_nx_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}\right)^p \le \frac{\alpha_1x_1^p + \alpha_2x_2^p + ... + \alpha_nx_n^p}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + ... + \alpha_nx_n \le (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)^{1-\frac{1}{p}}(\alpha_1x_1^p + \alpha_2x_2^p + ... + \alpha_nx_n^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Leftrightarrow \sum \alpha_ix_i \le \left(\sum \alpha_i\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum \alpha_ix_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Chọn $\alpha_i = b_i^q$; $x_i = a_i b_i^{1-q}$ Ta có $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$

I.5.Bài tập áp dụng :

Bài 1:Cho $x_i > 0, r > 1$.CMR: $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^r \le \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n}$

Hướng dẫn :Xét hàm số $f(x) = x^r \ , x > 0$ .Ta có $f^{//}(x) = r(r-1)x^{r-2} \ , \forall x > 0$

Áp dụng BĐT Jensen ta có : $f\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) \le \frac{\sum f(x_i)}{n} \Rightarrow \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^r \le \frac{\sum x_i^r}{n}$

Chú ý : Nếu 0 < r < 1 thì BĐT đổi chiều

Bài 2: Cho $x_i > 0$, $p \ge q > 0$; $p, q \in N$ .CMR: $\sqrt[q]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^q}{n}} \le \sqrt[p]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{n}}$

Hướng dẫn : Áp dụng bài 1 với $r = \frac{p}{q}$; $y_i = x_i^q$ ta có :

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right)^{\frac{p}{q}} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^{\frac{p}{q}}}{n} \Rightarrow \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^q}{n}\right)^{\frac{p}{q}} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{n} \Rightarrow \sqrt[q]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^q}{n}} \le \sqrt[p]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{n}}$$

Tổng quát : $x_i > 0\,, \alpha \ge \beta > 0: \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \le \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

Bài 3: Cho $a_i > 0$ .CMR: $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1+a_i} \ge \dfrac{n}{1+\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}}$ (1)

Hướng dẫn: Ta có $\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}} = e^{\frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n)}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum \frac{1}{1+e^{\ln a_i}} \ge \frac{1}{1+e^{\frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n)}} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum f(x_i) \ge f\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ và $x_i = \ln a_i > 0$

Bài 4: Cho $a, b, c > 0$ .CMR: $(b+c)^a (c+a)^b (a+b)^c \le \left[\dfrac{2}{3}(a+b+c)\right]^{a+b+c}$ (2)

Hướng dẫn : $(2) \Leftrightarrow \dfrac{a\ln(b+c) + b\ln(c+a) + c\ln(a+b)}{a+b+c} \le \ln[\dfrac{2}{3}(a+b+c)]$

Xét hàm số $f(x) = \ln(a+b+c-x)$. Áp dụng BĐT Jensen ta có:

$$\frac{a}{a+b+c} f(a) + \frac{b}{a+b+c} f(b) + \frac{c}{a+b+c} f(c) \le f\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a\ln(b+c) + b\ln(c+a) + c\ln(a+b)}{a+b+c} \le \ln\left(a+b+c - \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right) \le \ln[\frac{2}{3}(a+b+c)]$$

(vì $\dfrac{2ab+2bc+2ca}{a+b+c} \le \dfrac{2}{3}(a+b+c) \Leftrightarrow 3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2$)

Bài 5: Cho $a_i > 0\,, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\,, k \ge 1$.CMR: $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i^k} \ge n^{k+1}$

HD:Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^k}$, $x>0$

Bài 6:Cho $a,b,c>0, a+b+c=1$.CMR: $(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4\geq\dfrac{16}{27}$

HD: Xét hàm số $f(x)=(a+b+c-x)^4$, $x\in(0;1)$

Bài 7:Cho tam giác nhọn ABC.CMR:

$2(\sin A+\sin B+\sin C)+(\tan A+\tan B+\tan C)\geq 6\sqrt{3}$

HD: Xét hàm số $f(x)=2\sin x+\tan x$, $x\in(0;\pi)$

Bài 8:Cho tam giác ABC và $k\geq 2$.CMR: $\dfrac{\sin A}{k+\cos A}+\dfrac{\sin B}{k+\cos B}+\dfrac{\sin C}{k+\cos C}\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{2k+1}$

HD: $f(x)=\dfrac{\sin x}{k+\cos x}$, $x\in(0;\pi)$

Bài 9: Cho $a,b,c>0, a+b+c=\dfrac{9}{4}$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

S=$(a+\sqrt{a^2+1})^b(b+\sqrt{b^2+1})^c(c+\sqrt{c^2+1})^a$

Giải: $\ln S=b\ln(a+\sqrt{a^2+1})+c\ln(b+\sqrt{b^2+1})+a\ln(c+\sqrt{c^2+1})$

Xét hàm số $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $x>0$ có $f^{//}(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}<0$, $\forall x>0$

Áp dụng BĐT Jensen dạng tổng quát (4) ta có:

$$\frac{b}{a+b+c}f(a)+\frac{c}{a+b+c}f(b)+\frac{a}{a+b+c}f(c)\leq f\left(\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\ln S}{\frac{9}{4}}\leq f\left(\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right)\leq f\left(\frac{1}{3}(a+b+c)\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\ln 2\Rightarrow S\leq\sqrt[4]{2^9}$$

Vậy max S $=\sqrt[4]{2^9}$ khi a = b = c = ¾

Bài 10: Cho p , q dương và $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.CMR với mọi x , y dương ta có :

$xy\le\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$.Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^p=y^q$

HD: Xét hàm số $f(x)=\ln x$, $x>0$

Bài 11: Cho $a_i,b_i>0$ (i=1,2,…,n).CMR:

$$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2...b_n}\le\sqrt[n]{(a_1+b_1)...(a_n+b_n)}$$

HD:

$$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2...b_n}\le\sqrt[n]{(a_1+b_1)...(a_n+b_n)}\Leftrightarrow 1+\sqrt[n]{\frac{b_1b_2...b_n}{a_1a_2...a_n}}\le\sqrt[n]{\frac{a_1+b_1}{a_1}\frac{a_2+b_2}{a_2}...\frac{a_n+b_n}{a_n}}$$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt[n]{\frac{b_1b_2...b_n}{a_1a_2...a_n}}\le\sqrt[n]{(1+\frac{b_1}{a_1})(1+\frac{b_2}{a_2})...(1+\frac{b_n}{a_n})}$$

$$\Leftrightarrow\ln\left(1+\sqrt[n]{\frac{b_1b_2...b_n}{a_1a_2...a_n}}\right)\le\frac{1}{n}\left[\ln(1+\frac{b_1}{a_1})+\ln(1+\frac{b_2}{a_2})+...+\ln(1+\frac{b_n}{a_n})\right]$$

Xét hàm số $f(x)=\ln(1+e^x)$, $x>0$, $f\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)\le\frac{\sum f(x_i)}{n}$, $x_i=\ln\frac{b_i}{a_i}$

Chương II: BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

II.1.Định lí: Cho x > -1 và $\alpha\in R$ .Ta có:

a/ $(1+x)^\alpha\ge 1+\alpha x$, với mọi $\alpha<0$ hoặc $\alpha>1$

b/ $(1+x)^\alpha\le 1+\alpha x$, với mọi $0<\alpha<1$

Chứng minh:

Xét hàm số $f(x)=(1+x)^\alpha$ với x > -1

Ta có $f^{/}(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}; f^{//}(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

Phương trình tiếp tuyến với đường cong tại điểm M(0;1) là $y = \alpha x + 1$

a/ Nếu $\alpha < 0$ hoặc $\alpha > 1$ thì $f^{//}(x) > 0$ với mọi x > -1 $\Rightarrow (1+x)^{\alpha} \geq \alpha x + 1, \forall x > -1$

b/ Nếu $0 < \alpha < 1$ thì $f^{//}(x) < 0$ với mọi x > -1 $\Rightarrow (1+x)^{\alpha} \leq \alpha x + 1, \forall x > -1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x=0 hoặc $\alpha = 0, \alpha = 1$

II.2.Hệ quả:

Đặt t = x+1 > 0 và $\alpha > 1$ ta có $t^{\alpha} \geq \alpha t + 1 - \alpha$,dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi t = 1

II.3.Bài tập áp dụng:

Bài 1:CMR: $n^{n+3} + (n+1)^{n+3} < (n+2)^{n+3}, \forall n \in N$

Giải: Ta có : $n^{n+3} + (n+1)^{n+3} < (n+2)^{n+3} \Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+3} + 1 < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+3}$

Áp dụng BĐT Bernoulli ta có :

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+3} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+3} \geq 1 + \frac{n+3}{n+1} > 1 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+3}$$

Bài 2: Cho n > 1 .CMR: $\sqrt[n-1]{n} > \sqrt[n]{n+1}$

Giải : Ta có $\sqrt[n-1]{n} > \sqrt[n]{n+1} \Leftrightarrow n^{n} > (n+1)^{n-1} \Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} > \frac{1}{n+1}$

Áp dụng BĐT Bernoulli ta có : $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n} > 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Bài 3 : Cho a > 0 và n > m.CMR : $(1+na)^{m} < (1+ma)^{n}$

Giải: Áp dụng BĐT Bernoulli ta có : $(1+ma)^{\frac{n}{m}} > 1 + \frac{n}{m}ma = 1 + na \Rightarrow (1+na)^{m} < (1+ma)^{n}$

Bài 4 : Cho a,b,c là các số tự nhiên thỏa a < b < c .CMR với mọi số tự nhiên d > a ta có : $a^{d} + b^{d} < c^{d}$

Giải: Ta có $a^d + b^d < c^d \Leftrightarrow \left(\frac{c}{b}\right)^d > 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^d$ .Vì c > b nên $c \geq b+1$

Áp dụng BĐT Bernoulli ta có $\left(\frac{c}{b}\right)^d \geq \left(\frac{b+1}{b}\right)^d = \left(1+\frac{1}{b}\right)^d \geq 1+\frac{d}{b} > 1+\frac{a}{b} > 1+\left(\frac{a}{b}\right)^d$

(vì $0 < \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \left(\frac{a}{b}\right)^d$)

Bài 5:Cho $a,b,c,n \in N$ và $a \leq b < c \leq n$ .CMR: $a^n + b^n < c^n$

Giải : Áp dụng BĐT Bernoulli ta có : $\left(\frac{c}{b}\right)^n = \left(1+\frac{c-b}{b}\right)^n \geq 1+\frac{n(c-b)}{b} > 1+1 \geq 1+\frac{a^n}{b^n}$

Bài 6:Cho n là số nguyên dương .CMR : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

Giải : Ta có

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n}$$

$\Leftrightarrow \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1} > \frac{n}{n+1}$. Áp dụng BĐT Bernoulli ta có :

$$\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Bài 7:Cho $0 < a,b < 1$ .CMR: $a^b + b^a > 1$

Giải: Áp dụng BĐT Bernoulli ta có :

$$\frac{1}{a^b} = \left(\frac{1}{a}\right)^b = \left(1+\frac{1-a}{a}\right)^b < 1+\frac{b(1-a)}{a} = \frac{a+b-ab}{a} \Rightarrow a^b > \frac{a}{a+b-ab}$$

Tương tự : $b^a > \frac{b}{a+b-ab} \Rightarrow a^b + b^a > \frac{a+b}{a+b-ab} > 1$

Bài 8:Cho x , y > 0 và $\alpha \ge 2$.CMR: $x^{\alpha} + y^{\alpha} \ge 2^{1-\alpha}(x+y)^{\alpha}$

Giải: Ta có $x^{\alpha} + y^{\alpha} \ge 2^{1-\alpha}(x+y)^{\alpha} \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{x+y}\right)^{\alpha} + \left(\frac{2y}{x+y}\right)^{\alpha} \ge 2$

Áp dụng hệ quả BĐT Bernoulli ta có :

$$\left(\frac{2x}{x+y}\right)^{\alpha} \ge \alpha.\frac{2x}{x+y} + 1 - \alpha \;\; ; \;\; \left(\frac{2y}{x+y}\right)^{\alpha} \ge \alpha.\frac{2y}{x+y} + 1 - \alpha$$

Từ đó suy ra :

$$\left(\frac{2x}{x+y}\right)^{\alpha} + \left(\frac{2y}{x+y}\right)^{\alpha} \ge 2\alpha + 2 - 2\alpha = 2 \text{ (đpcm)}$$

Bài 9:Cho a,b,c,p > 0 và số nguyên dương n . CMR:
$a^{n+p} + b^{n+p} + c^{n+p} \ge 3^{1-(n+p)}(a+b+c)^{n+p}$ (1)

HD: $(1) \Leftrightarrow \left(\frac{3a}{a+b+c}\right)^{n+p} + \left(\frac{3b}{a+b+c}\right)^{n+p} + \left(\frac{3c}{a+b+c}\right)^{n+p} \ge 3$

Áp dụng hệ quả BĐT Bernoulli ta có : $\left(\frac{3a}{a+b+c}\right)^{n+p} \ge (n+p).\frac{3a}{a+b+c} + 1 - (n+p), \ldots$

Bài 10:Cho a, b,c > 0.CMR: $\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{b}{c+a}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{c}{a+b}\right)^{\sqrt{2}} \ge \frac{3}{2^{\sqrt{2}}}$ (2)

HD: $(2) \Leftrightarrow \left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{2b}{a+c}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\sqrt{2}} \ge 3$. Áp dụng hệ quả BĐT Bernoulli và BĐT: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$

Bài 11:Cho tam giác ABC.CMR: a/ $\sin^{\sqrt{2}}A + \sin^{\sqrt{2}}B + \sin^{\sqrt{2}}C \le 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ (3)

b/ $\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}}+\left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\ge 3^{1-\sqrt{2}}$

HD: a/ $(3)\Leftrightarrow\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin A\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin B\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin A\right)^{\sqrt{2}}\le 3$

Áp dụng $t^{\alpha}\ge\alpha t+1-\alpha$ với $\alpha=\frac{2}{\sqrt{2}};t=\sin^{\sqrt{2}}A$ và $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4}$

b/ Áp dụng: $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$

Chương III: BẤT ĐẲNG THỨC CHEBYSHEV(Tsêbưsep)

III.1.BĐT CHEBYSHEV

1/Cho hai dãy n số $a_1,a_2,...,a_n$ và $b_1,b_2,...,b_n$ đều tăng hoặc đều giảm tức là :

$\begin{cases}a_1\le a_2\le\ldots\le a_n\\ b_1\le b_2\le\ldots\le b_n\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n\\ b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_n\end{cases}$ thì ta có :

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}\ge\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1=a_2=\ldots=a_n$ hoặc $b_1=b_2=\ldots=b_n$

2/Cho hai dãy n số $a_1,a_2,...,a_n$ và $b_1,b_2,...,b_n$ có một dãy tăng hoặvà một dãy giảm tức là :

$\begin{cases}a_1\le a_2\le\ldots\le a_n\\ b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_n\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n\\ b_1\le b_2\le\ldots\le b_n\end{cases}$ thì ta có :

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}\le\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1=a_2=\ldots=a_n$ hoặc $b_1=b_2=\ldots=b_n$

Chứng minh:Ta CM cho trường hợp: $\begin{cases}a_1\le a_2\le\ldots\le a_n\\ b_1\le b_2\le\ldots\le b_n\end{cases}$

Gọi $a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ khi đó tồn tại k sao cho $a_1 \le ... \le a_k \le a \le a_{k+1} \le ... \le a_n$ (1)

Ứng với k ở trên lấy b sao cho $b_k \le b \le b_{k+1}$ khi đó ta có $b_1 \le ... \le b_k \le b \le b_{k+1} \le ... \le b_n$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(a_i - a)(b_i - b) \ge 0$ với mọi i=1,2,…,n hay $a_i b_i - ab_i - ba_i + ab \ge 0$ với mọi i. Cộng n BĐT lại ta được : $\sum a_i b_i - a\sum b_i - b\sum a_i + nab \ge 0$.

Vì $na = \sum a_i \Rightarrow nab = b\sum a_i \Rightarrow \sum a_i b_i \ge a\sum b_i = \frac{1}{n}\sum a_i \sum b_i$ .Từ đó suy ra đpcm

Dấu bằng chỉ xảy ra khi ta có $(a_i - a)(b_i - b) = 0$ với mọi i , nếu (a_i) không là dãy hằng thì $a_1 < a < a_n$ khi đó $b_1 = b = b_n$,tức $b_1 = b_2 = ... = b_n$

III.2.Bài tập áp dụng :

Bài 1:Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ tùy ý .CMR: $\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n} \ge \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^2$

HD: Giả sử $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ .Xét dãy $b_k = a_k$

Bài 2:Cho $a + b \ge 2$ .CMR: $a^n + b^n \le a^{n+1} + b^{n+1}$ với mọi số tự nhiên n

Bài 3:Cho x,y > 0.CMR: $(x + y)(x^3 + y^3)(x^7 + y^7) \le 4(x^{11} + y^{11})$

Bài 4:Cho m lẻ và $a_1 + a_2 + ... + a_n \ge n$ .CMR: $\sum_{k=1}^{n} a_k^m \le \sum_{k=1}^{n} a_k^{m+1}$

HD:Giả sử $a \ge b$ thì $a^n \ge b^n$

Bài 5:Cho n số $a_1, a_2, ..., a_n$ không âm .CMR với mọi số nguyên dương m ta có :

$$\frac{a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m}{n} \ge \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^m$$

HD: Giả sử $0 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ thì $0 \le a_1^m \le a_2^m \le ... \le a_n^m$ Áp dụng BĐT Tsêbưsep và quy nạp

Bài 6: Cho n số $a_1, a_2, ..., a_n$ dương .CMR với mọi số nguyên dương k,l ta có :

$$\frac{a_1^k+a_2^k+...+a_n^k}{n}.\frac{a_1^l+a_2^l+...+a_n^l}{n}\le\frac{a_1^{k+l}+a_2^{k+l}+...+a_n^{k+l}}{n}$$

HD:Áp dụng BĐT Tsêbưsep cho hai dãy $\begin{cases}a_1^k\le a_2^k\le...\le a_n^k\\ a_1^l\le a_2^l\le...\le a_n^l\end{cases}$

Bài 7:Cho tam giác ABC.CMR: $\dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c}\ge\dfrac{\pi}{3}$

Bài 8:Cho a,b không âm có tổng bằng 2.CMR: $a^3+b^3\ge a^4+b^4$

Bài 9:Cho a,b,c > 0 và số tự nhiên n.CMR:

a/ $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{a^n+b^n+c^n}\ge\dfrac{a+b+c}{3}$

b/ $a^ab^bc^c\ge(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.Hãy tổng quát bài toán

Bài 10: Cho a,b tùy ý ,m và n là hai số tự nhiên có cùng tính chẵn lẻ.CMR:

$$(a^m+b^m)(a^n+b^n)\le2(a^{m+n}+b^{m+n})$$

Bài 11:Cho tam giác ABC.CMR:

a/ $\dfrac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a+b+c}\le\dfrac{1}{2}$

b/ $\dfrac{A\sin A+B\sin B}{A+B}+\dfrac{B\sin B+C\sin C}{B+C}+\dfrac{C\sin C+A\sin A}{C+A}\ge\sin A+\sin B+\sin C$

Bài 12: a/ Cho a,b,c > 0 và $a^2+b^2+c^2\ge1$.CMR: $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{c+a}+\dfrac{c^3}{a+b}\ge\dfrac{1}{2}$

b/ Cho a,b,c,d > 0 và $a^2+b^2+c^2+d^2\ge1$.CMR:

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\ge\frac{1}{3}$$

c/Hãy chứng minh bài toán tổng quát

Bài 13:Cho $a_1,a_2,...,a_n$ là các cạnh của đa giác lồi n cạnh có chu vi là p.CMR:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{p-2a_i}\geq\frac{n}{n-2}$$

Chương IV: BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI MỞ RỘNG

IV.1.Chứng minh BĐT Côsi bằng phương pháp đạo hàm:

a/ Bằng cách lập bảng biến thiên hàm số f(x) = e^x - x-1 trên R ta chứng minh được BĐT: $e^x \geq x+1$ (1) với mọi $x \in R$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = 0

b/ **BĐT Côsi** :Cho các số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ .Ta có $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

Chứng minh:

Gọi $T = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.Áp dụng (1) ta có : $e^{\frac{a_k}{T}-1} \geq \frac{a_k}{T}$ $,k = 1,2,...,n$

Nhân n BĐT trên lại ta được $e^{\frac{\sum a_k}{T}-n} \geq \frac{\prod_1^n a_k}{T^n} \Rightarrow T^n \geq \prod a_k \Rightarrow T \geq \sqrt[n]{\prod a_k}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{T} = \frac{a_2}{T} = ... = \frac{a_n}{T} = 1 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$

c/ **BĐT Côsi mở rộng**: Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ và $p_1, p_2, ..., p_n > 0$ Ta có BĐT $x_1^{p_1}.x_2^{p_2}...x_n^{p_n} \leq \left(\frac{x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}\right)^{p_1+p_2+...+p_n}$ .Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$

Đặc biệt nếu $p_1 = p_2 = ... = p_n = 1$ thì ta được BĐT CôSi.

Chứng minh:

Đặt $T=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_kp_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}p_k}$. Áp dụng (1) ta có : $\dfrac{x_k}{T}\le e^{\frac{x_k}{T}-1}\Rightarrow x_k^{p_k}\le T^{p_k}.e^{(\frac{x_k}{T}-1)p_k}$

Nhân n BĐT trên lại ta được : $\prod\limits_{k=1}^{n}x_k^{p_k}\le T^{\sum\limits_1^n p_k}.e^{\frac{\sum\limits_1^n x_k}{T}-\sum\limits_1^n p_k}\Rightarrow\prod\limits_1^n x_k^{p_k}\le T^{\sum\limits_1^n p_k}$

IV.2.Bài tập áp dụng :

Bài 1:CMR với mọi số dương a , b ta có : $a^b b^a\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{a+b}$

Giải : Áp dụng BĐT CôSi mở rộng ta có:

$$a^{\frac{b}{a+b}}b^{\frac{a}{a+b}}\le\frac{ab}{a+b}+\frac{ab}{a+b}=\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$$

$\Rightarrow a^b b^a\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{a+b}$ .Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a=b

Bài 2:Với x > 0 .CMR: $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{x+1}$

Giải: Áp dụng BĐT CôSi mở rộng ta có: $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x.1^1\le\left(\dfrac{x(1+\frac{1}{x})+1.1}{x+1}\right)=\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x+1}=\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{x+1}$ .Vì $1+\dfrac{1}{x}\ne1$ nên dấu bằng không xảy ra.

Chú ý :Có thể chứng minh cách khác bằng cách áp dụng định lí Lagrange như sau:

Xét hàm số $f(x) = x\ln(1+\frac{1}{x}) = x\left(\ln(x+1) - \ln x\right)$

Ta có $f^{/}(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$

Hàm số g(t) = lnt liên tục trên [x ;x+1] có đạo hàm trên (x;x+1) nên $\exists x \in (x;x+1): \frac{\ln(x+1)-\ln x}{1} = g^{/}(c) = \frac{1}{c} > \frac{1}{x+1}$ suy ra f tăng trên $(0;+\infty)$

Vậy f(x) > f(x+1) từ đó suy ra đpcm.

Bài 3:Cho $x \in (0;2)$. $CMR: \left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}} < \frac{4}{9}$

Giải: Áp dụng BĐT CôSi mở rộng ta có:

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}.\frac{9}{4} = \left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}.\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2} \le \left(\frac{\frac{2}{x}(1-\frac{x}{2}) + 2(1+\frac{1}{2})}{\frac{2}{x}+2}\right)^{\frac{2}{x}+2} = 1$$

suy ra $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}} < \frac{4}{9}$ .Vì $1-\frac{x}{2} \ne 1+\frac{1}{2}$ nên dấu bằng không xảy ra.

Bài 4:Cho các số dương x_1, x_2, x_3 và các số y_1, y_2, y_3 thỏa hệ :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$ trong đó $a_{ij} > 0$ thỏa : $$\begin{cases} a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = 1 (i = 1,2,3) \\ a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} = 1 (j = 1,2,3) \end{cases}$$

CMR: $x_1x_2x_3 \le y_1y_2y_3$

Giải: Áp dụng BĐT CôSi mở rộng ta có: $x_1^{a_{i1}}.x_2^{a_{i2}}.x_3^{a_{i3}} \le \left(\dfrac{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3}{a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}}\right)^{a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = y_i$

với i =1,2,3

Nhân 3 BĐT trên lại ta được: $x_1^{a_{11}+a_{21}+a_{31}}.x_2^{a_{11}+a_{21}+a_{31}}.x_3^{a_{13}+a_{23}+a_{33}} \le y_1y_2y_3$

$\Rightarrow x_1x_2x_3 \le y_1y_2y_3$

Bài 5:Cho n số dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n}$ $(a_i > 0)$

Giải:Đặt $a = \sum_{k=1}^{n} a_k$; $b_k = \dfrac{a_k}{a}$ thì $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1$.Áp dụng BĐT CôSi mở rộng ta có:

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{b_1}.\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{b_2}...\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{b_n} \le \frac{b_1}{a_1}x_1 + \frac{b_2}{a_2}x_2 + ... + \frac{b_n}{a_n}x_n = \frac{1}{a}(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^{a_1}}{a_1^{a_1}}.\frac{x_2^{a_2}}{a_2^{a_2}}...\frac{x_1^{a_1}}{a_n^{a_n}} \le \frac{1}{a^a} \Rightarrow x_1^{a_1}.x_2^{a_2}...x_n^{a_n} \le \frac{a_1^{a_1}.a_2^{a_2}...a_n^{a_n}}{a^a}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \sum x_i = 1 \\ \dfrac{x_1}{a_1} = \dfrac{x_2}{a_2} = ... = \dfrac{x_n}{a_n} = \dfrac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow x_i = \dfrac{a_i}{a}$; $\forall i$

Vậy max $x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n} = \dfrac{a_1^{a_1}.a_2^{a_2}...a_n^{a_n}}{a^a}$ khi $x_i = \dfrac{a_i}{a}$; $\forall i$

Bài 6: Cho p , q dương và $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.CMR với mọi x , y dương ta có : $xy \le \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$.Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^p = y^q$

Giải : Áp dụng BĐT CôSi mở rộng ta có:

$$xy=(x^p)^{\frac{1}{p}}.(y^q)^{\frac{1}{q}} \le \left(\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^p = y^q$

Tổng quát : Với $p_1,p_2,...,p_n>0$ và $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}=1$ thì

$$x_1x_2...x_n=\left(x_1^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(x_2^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}...\left(x_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_n}} \le \frac{x_1^{p_1}}{p_1}+\frac{x_2^{p_2}}{p_2}+...+\frac{x_n^{p_n}}{p_n}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi : $x_1^{p_1}=x_2^{p_2}=...=x_n^{p_n}$

Bài 7:Cho p , q > 0 và p+q =1.CMR với mọi $x \in (0;\frac{\pi}{2})$ ta có $p\tan^{\frac{1}{p}}x+q\cot^{\frac{1}{q}}x \ge 1$

Hướng dẫn: Áp dụng bài 6

Bài 8 : (BĐT Holder)

Cho $x_i>0; y_i>0\ (i=1,2,...,n)$; p > 0 , q > 0 và $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ .Ta có :

$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi : $\frac{x_1^p}{y_1^q} = \ldots = \frac{x_n^p}{y_n^q}$

Chứng minh:Đặt $\mathrm{A} = \left(\sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$; $\mathrm{B} = \left(\sum y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$

Áp dụng bài 6 ta có :

$$\frac{x_i}{A}.\frac{y_i}{B} \le \frac{1}{p}.\left(\frac{x_i}{A}\right)^p + \frac{1}{q}.\left(\frac{y_i}{B}\right)^q \Rightarrow \sum \frac{x_i y_i}{AB} \le \frac{1}{p}.\frac{\sum x_i^p}{A^p} + \frac{1}{q}.\frac{\sum y_i^q}{B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Suy ra $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$

Chú ý :Nếu p = q =2 ta được BĐT Bunhiacopxki

Bài 9: (BĐT **Mincopxki**)

Cho các số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$ và p > 1 ta có BĐT:

$$\left[\sum (a_i + b_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Chứng minh:

Đặt $q = \frac{p}{p-1} > 1$ ta có $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.Áp dụng BĐT Holder ta có :

$$\sum (a_i+b_i)^p = \sum a_i(a_i+b_i)^{p-1} + \sum b_i(a_i+b_i)^{p-1}$$

$$\le \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \left[\left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left[\sum (a_i+b_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\Rightarrow \left[\sum (a_i+b_i)^p\right]^{1-\frac{p-1}{p}} \le \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \left[\sum (a_i+b_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Chương V: BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI MỞ RỘNG

V.1. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI MỞ RỘNG

Cho m dãy số thực không âm: $a_1,a_2,...,a_n;b_1,b_2,...,b_n;...;c_1,c_2,...,c_n$ Ta có:

$$\left(a_1.b_1...c_1 + a_2.b_2...c_2 + ... + a_n.b_n...c_n\right)^m \le (a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m)(b_1^m + b_2^m + ... + b_n^m)...(c_1^m + c_2^m + ... + c_n^m)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a_1 : b_1 : ... : c_1 = a_2 : b_2 : ... : c_2 = ... = a_n : b_n : ... : c_n$$

(Nếu m chẵn thì không vần giả thiết a_i,b_i,c_i không âm)

Chứng minh: Giả sử

$$A = \left(a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m\right)^{\frac{1}{m}} \ne 0\ ; B = \left(b_1^m + b_2^m + ... + b_n^m\right)^{\frac{1}{m}} \ne 0\ ; C = \left(c_1^m + c_2^m + ... + c_n^m\right)^{\frac{1}{m}} \ne 0$$

(Vì nếu một trong các số A,B,C bằng 0 thì BĐT đúng)

Đặt $x_i = \frac{a_i}{A}; y_i = \frac{b_i}{B};...; z_i = \frac{c_i}{C}$ ($i = 1,2,...,n$) .Khi đó $\sum_{i=1}^n x_i^m = \sum_{i=1}^n y_i^m = ... = \sum_{i=1}^n z_i^m = 1$

Theo BĐT Côsi cho m số không âm $x_i^m, y_i^m,..., z_i^m$ (i=1,2,…,n) ta có:

$$x_i y_i z_i \le \frac{x_i^m + y_i^m + z_i^m}{m} \quad (\text{ i=1,2,…,n})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ldots z_i \le \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^m + \sum_{i=1}^{n} y_i^m + \ldots + \sum_{i=1}^{n} z_i^m\right) = \frac{m}{m} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{A}\frac{b_1}{B}\ldots\frac{c_1}{C} + \frac{a_2}{A}\frac{b_2}{B}\ldots\frac{c_2}{C} + \ldots + \frac{a_n}{A}\frac{b_n}{B}\ldots\frac{c_n}{C} \le 1$$

$$\Rightarrow a_1 b_1 \ldots c_1 + a_2 b_2 \ldots c_2 + \ldots + a_n b_n \ldots c_n \le AB\ldots C$$

$$\Rightarrow (a_1 b_1 \ldots c_1 + a_2 b_2 \ldots c_2 + \ldots + a_n b_n \ldots c_n)^m \le (a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m)(b_1^m + b_2^m + \ldots + b_n^m)\ldots(c_1^m + c_2^m + \ldots + c_n^m)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = y_i = \ldots = z_i$ hay $a_i : b_i : \ldots : c_i = A : B : \ldots : C$ tức là $a_1 : b_1 : \ldots : c_1 = a_2 : b_2 : \ldots : c_2 = \ldots = a_n : b_n : \ldots : c_n$

V.2.BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1:CMR nếu x,y,z là 3 số không âm thì ta có :

$x^n y^m + y^n z^m + z^n x^m \le x^{n+m} + y^{n+m} + z^{n+m}$ với m , n là 2 số tự nhiên

Giải :

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki mở rộng ta có :

$$\left(x^n y^m + y^n z^m + z^n x^m\right)^{n+m} = \left(x\ldots x y\ldots y + y\ldots y z\ldots z + z\ldots z x\ldots x\right)^{n+m} \le \left(x^{n+m} + y^{n+m} + z^{n+m}\right)\ldots\left(y^{n+m} + z^{n+m} + x^{n+m}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x^n y^m + y^n z^m + z^n x^m\right)^{n+m} \le \left(x^{n+m} + y^{n+m} + z^{n+m}\right)^{n+m}$$

Suy ra $x^n y^m + y^n z^m + z^n x^m \le x^{n+m} + y^{n+m} + z^{n+m}$

Bài 2 : Cho các số dương x,y,z và a,b,c thỏa $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$.CMR:

a/ $x^2 + y^2 + z^2 \ge \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2}\right)^3$

b/ $x^n + y^n + z^n \ge \left(\sqrt[n+1]{a^n} + \sqrt[n+1]{b^n} + \sqrt[n+1]{c^n}\right)^{n+1}$

Giải : Áp dụng BĐT Bunhiacopxki mở rộng ta có :

a/

$$\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}\right)^3=\left(\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{\frac{a}{x}}\sqrt[3]{\frac{a}{x}}+\sqrt[3]{y^2}\sqrt[3]{\frac{b}{y}}\sqrt[3]{\frac{b}{y}}+\sqrt[3]{z^2}\sqrt[3]{\frac{c}{z}}\sqrt[3]{\frac{c}{z}}\right)^3$$

$$\le (x^2+y^2+z^2)(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z})(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z})=x^2+y^2+z^2$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi : $\frac{a}{x}:x^2=\frac{b}{y}:y^2=\frac{c}{z}:z^2\Rightarrow\frac{1}{y}=\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{a}{b}},\frac{1}{z}=\frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{a}{c}}$

$$1=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\frac{c}{x}\sqrt[3]{\frac{a}{c}}=\frac{1}{x}(a+\sqrt[3]{ab^2}+\sqrt[3]{ac^2})$$

Khi đó : $\begin{cases} x=\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}) \\ y=\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}) \\ z=\sqrt[3]{c}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}) \end{cases}$

b/

$$\left(\sqrt[n+1]{a^n}+\sqrt[n+1]{b^n}+\sqrt[n+1]{c^n}\right)^{n+1}=$$

$$\left(\sqrt[n+1]{x^n}\sqrt[n+1]{\frac{a}{x}}\ldots\sqrt[n+1]{\frac{a}{x}}+\sqrt[n+1]{y^n}\sqrt[n+1]{\frac{b}{y}}\ldots\sqrt[n+1]{\frac{b}{y}}+\sqrt[n+1]{z^n}\sqrt[n+1]{\frac{c}{z}}\ldots\sqrt[n+1]{\frac{c}{z}}\right)^{n+1}$$

$$\le (x^n+y^n+z^n)(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z})^n=x^n+y^n+z^n$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi : $\frac{a}{x}:x^n=\frac{b}{y}:y^n=\frac{c}{z}:z^n\Rightarrow\frac{1}{y}=\frac{1}{x}\sqrt[n+1]{\frac{a}{b}},\frac{1}{z}=\frac{1}{x}\sqrt[n+1]{\frac{a}{c}}$

Khi đó : $\begin{cases} x = \sqrt[n+1]{a^n}\,(\sqrt[n+1]{a^n} + \sqrt[n+1]{b^n} + \sqrt[n+1]{c^n}) \\ y = \sqrt[n+1]{b^n}\,(\sqrt[n+1]{a^n} + \sqrt[n+1]{b^n} + \sqrt[n+1]{c^n}) \\ z = \sqrt[n+1]{c^n}\,(\sqrt[n+1]{a^n} + \sqrt[n+1]{b^n} + \sqrt[n+1]{c^n}) \end{cases}$

Bài 3:Cho các số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$.CMR:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^k \le \frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}$$

Giải: Áp dụng BĐT Bunhiacopxki mở rộng ta có :

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^k = \left(a_1 1\ldots 1 + a_2 1\ldots 1 + \ldots + a_n 1\ldots 1\right)^k$$
$$\le \left(a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k\right)\left(1^k + 1^k + \ldots + 1^k\right)^{k-1} \le n^{k-1}\left(a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^k \le \frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Bài 4:Cho các số dương p , q , x , y , z .CMR với mọi số nguyên dương n ta có :

$$\frac{x^n}{py + qz} + \frac{y^n}{pz + qx} + \frac{z^n}{px + qy} \ge \frac{x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1}}{p + q}$$

Giải:

- Với n = 1 Áp dụng BĐT Svacxo ta có:

$$\frac{x}{py + qz} + \frac{y}{pz + qx} + \frac{z}{px + qy}$$
$$= \frac{x^2}{pxy + qxz} + \frac{y^2}{pyz + qyx} + \frac{z^2}{pzx + qzy} \ge \frac{(x + y + z)^2}{(p + q)(xy + yz + zx)} \ge \frac{3}{p + q}$$

- Với n > 1 Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có :

$$\left(x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1}\right)^2$$

$$=\left[\sqrt{x^{n-2}(py+qz)}\sqrt{\frac{x^n}{py+qz}}+\sqrt{y^{n-2}(pz+qx)}\sqrt{\frac{y^n}{pz+qx}}+\sqrt{z^{n-2}(px+qy)}\sqrt{\frac{z^n}{px+qy}}\right]^2$$

$$\le\left[x^{n-2}(py+qz)+y^{n-2}(pz+qx)+z^{n-2}(px+qy)\right]\left[\frac{x^n}{py+qz}+\frac{y^n}{pz+qx}+\frac{z^n}{px+qy}\right]$$

$$\Rightarrow\left(x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1}\right)^2$$

$$\le\left[p(x^{n-2}y+y^{n-2}z+z^{n-2}x)+q(x^{n-2}z+y^{n-2}x+z^{n-2}y)\right]\left(\frac{x^n}{py+qz}+\frac{y^n}{pz+qx}+\frac{z^n}{px+qy}\right)$$

$$\le(p+q)(x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1})\left(\frac{x^n}{py+qz}+\frac{y^n}{pz+qx}+\frac{z^n}{px+qy}\right)$$

Áp dụng bài 1 ta có

$$x^{n-2}y+y^{n-2}z+z^{n-2}x\le x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1}$$

$$x^{n-2}z+y^{n-2}x+z^{n-2}y\le x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1}$$

Do đó : $\dfrac{x^n}{py+qz}+\dfrac{y^n}{pz+qx}+\dfrac{z^n}{px+qy}\ge\dfrac{x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1}}{p+q}$

Bài 5:CMR nếu a,b,c là ba số dương và n là số nguyên dương thì ta có :

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\ge\frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}$$

Giải:

- Với n =1 Áp dụng BĐT Svacxo ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\ge\frac{3}{2}$$

- Với $n\ge 2$. Áp dụng BĐT Bunhiacopxki mở rộng ta có :

$$(a+b+c)^n =$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt[n]{b+c}}.\sqrt[n]{b+c}.1...1+\frac{b}{\sqrt[n]{c+a}}.\sqrt[n]{c+a}.1...1+\frac{c}{\sqrt[n]{a+b}}.\sqrt[n]{a+b}.1...1\right)^n$$

$$\leq\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\right)\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right](1^n+1^n+1^n)^{n-2}$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^{n-1}\leq 2\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\right)3^{n-2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}(\frac{a+b+c}{3})^{n-1}\leq \frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}$$

Bài 6: a/Cho $a_i, b_i > 0$ .CMR:

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}\geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2...b_n}$$

b/Cho $a_i > 0$ .CMR: $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\geq\left(1+\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\right)^n$

c/Cho $a_i > 0$ .CMR: $(1+\frac{a_1}{na_2})(1+\frac{a_2}{na_3})...(1+\frac{a_n}{na_1})\geq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Hướng dẫn:

a/ Áp dụng BĐT Bunhiacopxki mở rộng ta có :

$$(\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2...b_n})^n=(\sqrt[n]{a_1}\sqrt[n]{a_2}...\sqrt[n]{a_n}+\sqrt[n]{b_1}\sqrt[n]{b_2}...\sqrt[n]{b_n})^n$$

$$\leq\left[(\sqrt[n]{a_1})^n+(\sqrt[n]{b_1})^n\right]\left[(\sqrt[n]{a_2})^n+(\sqrt[n]{b_2})^n\right]...\left[(\sqrt[n]{a_n})^n+(\sqrt[n]{b_n})^n\right]$$

$$\leq (a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)\Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}\geq\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2...b_n}$$

b/Áp dụng a/ bằng cách thay $b_1 = b_2 = ... = b_n = 1$

c/ Áp dụng b/

Bài 7:Cho a,b,c,x,y,z > 0 và ax+by+cz = 1.CMR:

$$x^n + y^n + z^n \geq \left(\sqrt[n-1]{a^n} + \sqrt[n-1]{b^n} + \sqrt[n-1]{c^n}\right)^{1-n} \quad ; \forall n \geq 2$$

Giải: Ta có: $1 = (ax + by + cz)^n =$

$$\left(\sqrt[n-1]{a}\sqrt[n-1]{a}...\sqrt[n-1]{a}.x + \sqrt[n-1]{b}\sqrt[n-1]{b}...\sqrt[n-1]{b}.y + \sqrt[n-1]{c}\sqrt[n-1]{c}...\sqrt[n-1]{c}.z\right)^n$$

$$\leq \left(\sqrt[n-1]{a^n} + \sqrt[n-1]{b^n} + \sqrt[n-1]{c^n}\right)^{n-1}\left(x^n + y^n + z^n\right)$$

$$\Rightarrow x^n + y^n + z^n \geq \left(\sqrt[n-1]{a^n} + \sqrt[n-1]{b^n} + \sqrt[n-1]{c^n}\right)^{1-n} \quad ; \forall n \geq 2$$

Bài 8 :Cho các số dương a,b,c,p,q,r,d,x,y,z thỏa điều kiện $ax^n + by^n + cz^n = d$ .CMR:

$$\frac{p}{x^m} + \frac{q}{y^m} + \frac{r}{z^m} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{d^m}}\left(\sqrt[n+m]{a^m p^n} + \sqrt[n+m]{b^m q^n} + \sqrt[n+m]{c^m r^n}\right)^{1+\frac{m}{n}}$$ với m , n nguyên dương

Giải:a/

$$\sqrt[n+m]{a^m p^n} = \sqrt[n+m]{ax^n}...\sqrt[n+m]{ax^n}.\sqrt[n+m]{\frac{p}{x^m}}...\sqrt[n+m]{\frac{p}{x^m}}$$

$$\sqrt[n+m]{b^m q^n} = \sqrt[n+m]{by^n}...\sqrt[n+m]{by^n}.\sqrt[n+m]{\frac{q}{y^m}}...\sqrt[n+m]{\frac{q}{y^m}}$$

$$\sqrt[n+m]{c^m r^n} = \sqrt[n+m]{cz^n}...\sqrt[n+m]{cz^n}.\sqrt[n+m]{\frac{r}{z^m}}...\sqrt[n+m]{\frac{r}{z^m}}$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki mở rộng ta có :

$$\left(\sqrt[n+m]{a^m p^n}+\sqrt[n+m]{b^m q^n}+\sqrt[n+m]{c^m r^n}\right)^{n+m}\le\left(ax^n+by^n+cz^n\right)^m\left(\frac{p}{x^m}+\frac{q}{y^m}+\frac{r}{z^m}\right)^n$$

$$\le d^m\left(\frac{p}{x^m}+\frac{q}{y^m}+\frac{r}{z^m}\right)^n$$

$$\Rightarrow\frac{p}{x^m}+\frac{q}{y^m}+\frac{r}{z^m}\ge\frac{1}{\sqrt[n]{d^m}}\left(\sqrt[n+m]{a^m p^n}+\sqrt[n+m]{b^m q^n}+\sqrt[n+m]{c^m r^n}\right)^{1+\frac{m}{n}}$$

Chương VI: BẤT ĐẲNG THỨC SCHWARZ (SVACXO)

VI.1. BẤT ĐẲNG THỨC SCHWARZ (SVACXO)

Cho $b_1,b_2,...,b_n>0$,ta có BĐT : $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\ge\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}b_i}$.Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a_i}{b_i}=\frac{a_j}{b_j}\quad i,j\in\{1,2,...,n\}$$

Chứng minh:Áp dụng BĐT Bunhiacopxi cho hai dãy $\sqrt{b_1},\sqrt{b_2},...,\sqrt{b_n}$ và $\frac{a_1}{\sqrt{b_1}},\frac{a_2}{\sqrt{b_2}},...,\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}$ ta có:

$$\left(\sum\sqrt{b_i}.\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}\right)^2\le\sum b_i.\sum\frac{a_i^2}{b_i}\Rightarrow\sum\frac{a_i^2}{b_i}\ge\frac{\left(\sum a_i\right)^2}{\sum b_i}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_i}{b_i}=\frac{a_j}{b_j}\quad i,j\in\{1,2,...,n\}$

VI.2.Bài tập áp dụng

Bài 1:a/Cho $a_1,a_2,...,a_n>0$ .CMR: $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\ge\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i}$

b/ Cho $\left(b_i\right)$ là một hoán vị của $\left(a_i\right)$.CMR: $\sum \frac{a_i^2}{b_i} \geq \sum a_i$

Bài 2:Cho a,b,c là ba cạnh tam giác .CMR :

a/ $\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{a+c-b}+\frac{c^2}{a+b-c} \geq a+b+c$

b/ $\frac{a^2}{pb+qc}+\frac{b^2}{pc+qa}+\frac{c^2}{pa+qb} \geq \frac{a+b+c}{p+q}$ với p,q> 0

c/ $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c} \geq 3$

d/ $\frac{a}{2b+2c-a}+\frac{b}{2a+2c-b}+\frac{c}{2a+2b-c} \geq 1$

HD : c/VT= $\frac{a^2}{a(b+c-a)}+\frac{b^2}{b(a+c-b)}+\frac{c^2}{c(a+b-c)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2} \geq 3$

d/ Tương tự c/

Bài 3:Cho các số dương a,b,c,d.CMR:

a/ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

b/ $\frac{a}{pb+qc}+\frac{b}{pc+qa}+\frac{c}{pa+qb} \geq \frac{3}{p+q}$ (với p,q >0)

c/ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geq 2$

HD: Viết $\frac{a}{b+c}=\frac{a^2}{a(b+c)},\ldots$

Bài 4:Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh tại M,N,P.

CMR: $S_{MNP} \leq \frac{1}{4} S_{ABC}$

HD: $S_{MNP} \le \frac{1}{4} S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{S_{APN}}{S_{ABC}} + \frac{S_{APN}}{S_{BPM}} + \frac{S_{APN}}{S_{CMN}} \ge \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{(p-a)^2}{bc} + \frac{(p-b)^2}{ac} + \frac{(p-c)^2}{ab} \ge \frac{3}{4}$

Mà $\frac{(p-a)^2}{bc} + \frac{(p-b)^2}{ac} + \frac{(p-c)^2}{ab} \ge \frac{(3p-2p)^2}{ab+bc+ca} \ge \frac{1}{4}\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \ge \frac{3}{4}$

Bài 6:Cho a,b,c,d dương.CMR:

a/ $\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

b/ $\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \ge \frac{2}{3}$

c/ $\frac{a+b}{b+c+d} + \frac{b+c}{c+d+a} + \frac{c+d}{d+a+b} + \frac{d+a}{a+b+c} \ge \frac{8}{3}$

HD: a/ Viết $\frac{a^3}{a+2b} = \frac{a^4}{a(a+2b)}, \ldots$

b/ Viết $\frac{a}{b+2c+3d} = \frac{a^2}{a(b+2c+3d)}, \ldots$

c/ Viết $\frac{a+b}{b+c+d} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(b+c+d)}, \ldots$

Bài 7:Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ và $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}$ là hoán vị của (x_i) .CMR :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{x_{i_k}}} \ge \frac{1}{\sqrt{n}} (\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k})$$

HD: $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{x_{i_k}} \ge \frac{(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_{i_k}} = \sum_{k=1}^{n} x_k \ge \frac{1}{n} (\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k})^2$ (theo BĐT Bunhiacopxki)

Bài 8:a/ Cho x,y,z > 0 và xy+yz+zx = 1 . CMR: $\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y} \ge \frac{1}{2}$

b/ Cho x,y,z,t > 0 và xy+yz+zt+tx = 1 . CMR:

$$\frac{x^3}{y+z+t}+\frac{y^3}{z+x+t}+\frac{z^3}{t+x+y}+\frac{t^3}{x+y+z}\ge\frac{1}{3}$$

c/ Cho $x_i > 0$ và $x_1x_2+x_2x_3+...+x_nx_1=1$, $S=\sum_{i=1}^{n}x_i$

CMR: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^3}{S-a_i}\ge\frac{1}{n-1}$

HD:a/ Viết $\dfrac{x^3}{y+z}=\dfrac{x^4}{x(y+z)}$,… và $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$

b/ Viết $\dfrac{x^3}{y+z+t}=\dfrac{x^4}{x(y+z+t)}$,… và

$3(x^2+y^2+z^2+t^2)\ge 2(xy+xz+xt+yz+yt+zt)$

c/ $VT=\sum\dfrac{a_i^4}{a_i(S-a_i)}\ge\dfrac{(\sum a_i^2)^2}{S^2-\sum a_i^2}$ Mà $\sum S^2\le n\sum a_i^2\Rightarrow S^2-\sum a_i^2\le(n-1)\sum a_i^2$

$\Rightarrow VT\ge\dfrac{1}{n-1}\sum a_i^2\ge\dfrac{1}{n-1}$ (vì $\sum a_i^2\ge 1$)

Bài 9:Cho a,b,c > 1.CMR:

a/ $\dfrac{a^2}{b-1}+\dfrac{b^2}{a-1}\ge 8$

b/ $\dfrac{\log_b a^2}{a+b}+\dfrac{\log_c b^2}{c+b}+\dfrac{\log_a c^2}{a+c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}$

HD: $\sqrt{\log_b a}+\sqrt{\log_c b}+\sqrt{\log_a c}\ge 3$ (BĐT Côsi)

Bài 10:Cho a,b,c > 0 và abc=1.CMR: $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}\ge\dfrac{3}{2}$

HD:Đặt $x=\dfrac{1}{a},y=\dfrac{1}{b},z=\dfrac{1}{c}$ và $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}\ge\dfrac{x+y+z}{2}\ge\dfrac{3}{2}$

Bài 11: Cho n số dương $a_1,a_2,...,a_n$ và $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.CMR: $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2-a_i} \ge \frac{n}{2n-1}$

HD: $VT = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{2a_i - a_i^2} \ge \frac{(\sum a_i)^2}{2\sum a_i - \sum a_i^2} = \frac{1}{2-\sum a_i^2} \ge \frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{n}{2n-1}$

(Vì $\frac{1}{n}\sum a_i^2 \ge 1 \Rightarrow \sum a_i^2 \ge n$)

Bài 12:Cho tam giác ABC.CMR: $\frac{h_a^2}{bc}+\frac{h_b^2}{ca}+\frac{h_c^2}{ab} \ge \frac{9r^2}{R^2}$

HD: $\frac{h_a^2}{bc}+\frac{h_b^2}{ca}+\frac{h_c^2}{ab} \ge \frac{(h_a+h_b+h_c)^2}{ab+bc+ca} \ge \frac{(9r)^2}{a^2+b^2+c^2} \ge \frac{9r^2}{R^2}$

(Vì $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ và $a^2+b^2+c^2 = 4R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$)

Bài 13:Cho hình hộp chữ nhật có α,β,γ là góc của đường chéo với các cạnh có kích thước a,b,c.CMR: $\frac{\cos^4\alpha}{a}+\frac{\cos^4\beta}{b}+\frac{\cos^4\gamma}{c} \ge \frac{1}{a+b+c}$

HD: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$

Bài 14: $a_1,a_2,...,a_n$ là các cạnh của một đa giác n cạnh chu vi là p.CMR:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{p-2a_i} \ge \frac{n}{n-2}$$

HD:Viết $\frac{a_i}{p-2a_i} = \frac{a_i^2}{a_i(p-2a_i)}$ và $\sum a_i^2 \ge \frac{1}{n}\sum a_i = \frac{p}{n}$

Bài 15:Cho ba số dương a,b,c có abc=1.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{bc}{a^2b+a^2c}+\frac{ca}{b^2a+b^2c}+\frac{ab}{c^2a+c^2b}$$

HD: Đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$

Bài 16: Cho ba số dương a,b,c có $a^2+b^2+c^2=1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A=\frac{a^3}{a+2b+3c}+\frac{b^3}{b+2c+3a}+\frac{c^3}{c+2a+3b}$$

HD:Viết $\frac{a^3}{a+2b+3c}=\frac{a^4}{a(a+2b+3c)},\ldots$

Bài 17: Cho $a_1,a_2,...,a_n\in(0;1)$ và $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$.CMR: $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-a_i}\le\sqrt{n(n-1)}$

HD: $n-1=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-a_i}{1}\ge\frac{(\sum\sqrt{1-a_i})^2}{n}$

Bài 18:Cho $x_1,x_2,...,x_n$ dương và $S=\sum x_i$, a là số thực tùy ý .CMR :

$$\frac{x_1}{a+x_2+x_3+...+x_n}+\frac{x_2}{a+x_1+x_3+...+x_n}+...+\frac{x_n}{a+x_1+x_2+...+x_{n-1}}\ge\frac{nS}{n(S+a)-S}$$

HD: Viết $\frac{x_1}{a+x_2+x_3+...+x_n}=\frac{x_1^2}{x_1(a+S-x_1)},\ldots$

Bài 19:Cho tam giác ABC.CMR: $\frac{\tan^3\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}+\frac{\tan^3\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}}+\frac{\tan^3\frac{C}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}\ge\frac{1}{2}$

HD:Áp dụng $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

Bài 20:Cho tam giác ABC .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$M=\frac{1}{2+\cos 2A}+\frac{1}{2+\cos 2B}+\frac{1}{2-\cos 2C}$$

HD: $M\ge\frac{9}{6+\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C}\ge\frac{9}{7+\frac{1}{2}\cos^2(A-B)-2\left[\cos C+\frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2}\ge\frac{6}{5}$

Bài 21:Cho tam giác ABC .CMR:

a/ $ab+bc+ca\ge 4\sqrt{3}S$ b/ $36r^2\le ab+bc+ca\le 9R^2$

c/ $2(l_a+l_b+l_c)\le\sqrt{3}(a+b+c)$ d/ $\dfrac{2}{R}\le\dfrac{1}{l_a}+\dfrac{1}{l_b}+\dfrac{1}{l_c}\le\dfrac{1}{r}$

HD: a/ $ab=\dfrac{2S}{\sin C}$ b/

$$ab+bc+ca=4R^2(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)=4R^2\sin A\sin B\sin C(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C})$$

$$\ge 4R^2\frac{9\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}=4R^2.18\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

và $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

c/ Áp dụng $l_a=\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}=\dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}\le\sqrt{p(p-a)}$

d/Áp dụng $\dfrac{1}{l_a}+\dfrac{1}{l_b}+\dfrac{1}{l_c}\ge\dfrac{9}{l_a+l_b+l_c}$ và $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r}$

Bài 23:Tam giác ABC nhọn có đặc điểm gì nếu nó thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{\tan^2 A}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\tan^2 B}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\tan^2 C}{\sin\frac{C}{2}}=18$$

HD:Áp dụng $\tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt{3}$;$\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}\le\dfrac{3}{2}$

Bài 24:Cho tam giác ABC có diện tích là S .CMR: $\dfrac{a^8}{\cos^2\frac{A}{2}}+\dfrac{b^8}{\cos^2\frac{B}{2}}+\dfrac{c^8}{\cos^2\frac{C}{2}}\ge\dfrac{4^5}{9}.S^4$

HD:Áp dụng $a^4+b^4+c^4\ge 16S^2$ và $\cos^2\dfrac{A}{2}+\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}\le\dfrac{9}{4}$

Bài 25: Cho a,b,c > 0 và ax+by=c.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}$

Bài 26:Cho a,b,c > 0 và a+b+c=1 Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$M=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

HD:Viết $M=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{9ab}+\frac{9}{9bc}+\frac{9}{9ca}$

Bài 27:Cho $a_1,a_2,...,a_n$ dương .CMR:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+...+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geq\frac{a_1+a_2+...+a_n}{2(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)}$$

HD:Viết $\frac{a_1}{a_2+a_3}=\frac{a_1^2}{a_1(a_2+a_3)},\ldots$

Bài 28:Cho tam giác ABC .Gọi O_1,O_2,O_3 lần lượt là tâm các đường tròn bang tiếp góc A,B,C .Gọi S_1,S_2,S_3 lần lượt là diện tích các tam giác O_1BC,O_2CA,O_3AB .CMR:
$S_1+S_2+S_3\geq 3S$

HD:Áp dụng $r_a=\frac{S}{p-a};2(S_1+S_2+S_3)=ar_a+br_b+cr_c$

Chương VII: MỘT MỞ RỘNG CỦA CÁC BẤT ĐẲNG THỨC SVACXO,TRÊBUSEP,BUNHIACOPSKI

VII.1.Nội dung BĐT:

Cho $c_1,c_2,...,c_n>0;\frac{a_1}{c_1}\geq\frac{a_2}{c_2}\geq...\geq\frac{a_n}{c_n};\frac{b_1}{c_1}\geq\frac{b_2}{c_2}\geq...\geq\frac{b_n}{c_n}$.Ta có BĐT:

$$\frac{a_1b_1}{c_1}+\frac{a_2b_2}{c_2}+...+\frac{a_nb_n}{c_n}\geq\frac{(a_1+a_2+...+a_n)(b_1+b_2+...+b_n)}{c_1+c_2+...+c_n}\ (1)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{c_1}=\frac{a_2}{c_2}=...=\frac{a_n}{c_n}$ hoặc $\frac{b_1}{c_1}=\frac{b_2}{c_2}=...=\frac{b_n}{c_n}$

CM: Trước hết ta CMR nếu $c_1, c_2, ..., c_n > 0$; $\frac{a_1}{c_1} \geq \frac{a_2}{c_2} \geq ... \geq \frac{a_n}{c_n}$ thì

$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{c_1 + c_2 + ... + c_k} \geq \frac{a_n}{c_n}$ (2) với mọi k=1,2,…,n

Thật vậy đặt $\frac{a_n}{c_n} = m$ ta có $a_i \geq mc_i \Rightarrow \sum a_i \geq m \sum c_i \Rightarrow \frac{\sum a_i}{\sum c_i} \geq m$

Ta CM (1) bằng quy nạp .Với n=2

$\frac{a_1 b_1}{c_1} + \frac{a_2 b_2}{c_2} \geq \frac{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}{c_1 + c_2} \Leftrightarrow (a_1 c_2 - a_2 c_1)(b_1 c_2 - b_2 c_1) \geq 0$ (BĐT đúng)Giả sử (1) đúng

với n=k khi đó $c_1, c_2, ..., c_n > 0; \frac{a_1}{c_1} \geq \frac{a_2}{c_2} \geq ... \geq \frac{a_{k+1}}{c_{k+1}}; \frac{b_1}{c_1} \geq \frac{b_2}{c_2} \geq ... \geq \frac{b_{k+1}}{c_{k+1}}$.

Ta có $\frac{a_1 b_1}{c_1} + \frac{a_2 b_2}{c_2} + ... + \frac{a_{k+1} b_{k+1}}{c_{k+1}} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_k)(b_1 + b_2 + ... + b_k)}{c_1 + c_2 + ... + c_k} + \frac{a_{k+1} b_{k+1}}{c_{k+1}}$

Theo (2) ta có $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{c_1 + c_2 + ... + c_k} \geq \frac{a_{k+1}}{c_{k+1}}$ và $\frac{b_1 + b_2 + ... + b_k}{c_1 + c_2 + ... + c_k} \geq \frac{b_{k+1}}{c_{k+1}}$ (3)

Vì (1) đúng với n=2 nên từ (3) ta có $\frac{(\sum_{i=1}^{k} a_i)(\sum_{i=1}^{k} b_i)}{\sum_{i=1}^{k} c_i} + \frac{a_{k+1} b_{k+1}}{c_{k+1}} \geq \frac{(\sum_{i=1}^{k+1} a_i)(\sum_{i=1}^{k+1} b_i)}{\sum_{i=1}^{k+1} c_i}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = ... = \frac{a_n}{c_n}$ hoặc $\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2} = ... = \frac{b_n}{c_n}$

VII.2..Một số BĐT được suy ra từ (1)

VII.2.1.BĐT Svacxo:

Với $a_i = b_i \; \forall i$ thì ta có BĐT Svacxo : $\sum \frac{a_i^2}{c_i} \geq \frac{(\sum a_i)^2}{\sum c_i}$ (4)

VII.2.2.BĐT Bunhiacopxki

Nếu đặt $x_i = \frac{a_i}{\sqrt{c_i}}; y_i = \sqrt{c_i}$ thì (4) thành $\sum x_i^2 \sum y_i^2 \geq (\sum x_i y_i)^2$

VII.2.3.Với $a_i = b_i$ và $c_i = n$ ta có BĐT : $\frac{1}{n}\sum a_i^2 \geq \left(\frac{1}{n}\sum a_i\right)^2$

VII.2.4. BĐT Trebusep

Với $c_i = 1$ ta có $\sum a_i b_i \geq \frac{1}{n}\sum a_i \sum b_i$

VII.3.Bài tập áp dụng

Bài 1:Cho a,b,c > 0.CMR : $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$

HD:Viết $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} = \frac{a^4}{a(a^2+ab+b^2)},\ldots$

Bài 2: Cho M ở trong tam giác ABC.Kẻ MA_1,MB_1,MC_1 lần lượt vuông góc với BC,CA,AB.Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \frac{BC}{MA_1}+\frac{CA}{MB_1}+\frac{AB}{MC_1}$

HD:Viết $\frac{BC}{MA_1} = \frac{BC^2}{BC.MA_1}$

Bài 3:Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ dương và $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$ .CMR: $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i} \geq \frac{n}{n-1}$

HD:Viết $\frac{a_i}{S-a_i} = \frac{a_i^2}{a_i(S-a_i)},\ldots$

Bài 4:Cho G là trọng tâm tam giác ABC.GA,GB,GC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai A_1,B_1,C_1.CMR: $GA+GB+GC \leq GA_1+GB_1+GC_1$

HD:*Cách 1*:Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB .Ta có

$MA.MA_1 = MB.MC = \frac{a^2}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{3}{2}GA(GA_1 - \dfrac{1}{2}GA) = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow GA_1 = \dfrac{1}{2}GA + \dfrac{a^2}{6GA}$.BĐT cần CM tương đương với:

$$\Rightarrow \frac{a^2}{3GA} + \frac{b^2}{3GB} + \frac{c^2}{3GC} \geq GA + GB + GC$$

Giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow GA \leq GB \leq GC$

Xét hai dãy:

$$\frac{a^2}{GA} \geq \frac{b^2}{GB} \geq \frac{c^2}{GC} \ ; \ \frac{\frac{1}{3}}{GA} \geq \frac{\frac{1}{3}}{GB} \geq \frac{\frac{1}{3}}{GC}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{3GA} + \frac{b^2}{3GB} + \frac{c^2}{3GC} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{GA + GB + GC} = \frac{3(GA^2 + GB^2 + GC^2)}{GA + GB + GC} \geq GA + GB + GC$$

Cách 2 (Áp dụng BĐT Trêbưsep)Ta CM: $\dfrac{a^2}{GA} + \dfrac{b^2}{GB} + \dfrac{c^2}{GC} \geq 3(GA + GB + GC)$

Áp dụng hai dãy cùng chiều $\begin{cases} a^2 \leq b^2 \leq c^2 \\ \dfrac{1}{GA} \leq \dfrac{1}{GB} \leq \dfrac{1}{GC} \end{cases}$ Ta có :

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC}}{3} \leq \frac{\frac{a^2}{GA} + \frac{b^2}{GB} + \frac{c^2}{GC}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{GA} + \frac{b^2}{GB} + \frac{c^2}{GC} \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)(\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC}) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2).\frac{1}{GA + GB + GC}$$

Mà $\dfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) = GA^2 + GB^2 + GC^2 \geq \dfrac{1}{3}(GA + GB + GC)^2$

Bài 5:Cho $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$; $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_n$;...; $0 \leq z_1 \leq z_2 \leq ... \leq z_n$ .CMR:

$$(\frac{1}{n}\sum x_k)(\frac{1}{n}\sum y_k)...(\frac{1}{n}\sum z_k) \leq \frac{1}{n}(\sum x_k y_k ... z_k)$$

Bài 6 : Cho tam giác ABC .CMR: $\dfrac{a}{h_b + h_c} + \dfrac{b}{h_c + h_a} + \dfrac{c}{h_a + h_b} \leq \dfrac{R\sqrt{3}}{2r}$

HD: Áp dụng BĐT Trêbưsep cho hai dãy $\begin{cases} a \le b \le c \\ \dfrac{1}{h_b + h_c} \ge \dfrac{1}{h_c + h_a} \ge \dfrac{1}{h_a + h_b} \end{cases}$ Ta có:

$$\frac{a}{h_b + h_c} + \frac{b}{h_c + h_a} + \frac{c}{h_a + h_b} \le \frac{1}{3}(a+b+c)(\frac{1}{h_b + h_c} + \frac{1}{h_c + h_a} + \frac{1}{h_a + h_b})$$

Áp dung $a.h_a = b.h_b = c.h_c = 2S$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$ $(x, y > 0)$ và $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Bài 7:Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thỏa $\sum x_i^2 \ge 1$ và $S = \sum x_i$ .CMR: $\sum \frac{x_i^3}{S - x_i} \ge \frac{1}{n-1}$

HD:Viết $\frac{x_i^3}{S - x_i} = \frac{x_i^4}{x_i(S - x_i)}$

Chương VIII: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT THỨ TỰ CỦA HAI DÃY BẤT ĐẲNG THỨC

VIII.1.Tính chất thứ tự của hai dãy bất đẳng thức:

VIII.1.1.Cho hai dãy cùng chiều $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ và $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$

Ta có BĐT : $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \ge \sum_{k=1}^{n} a_k b_{i_k} \ge \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$ trong đó $i_1, i_2, ..., i_n$ là hoán vị của 1,2,…,n

Chứng minh :Dùng quy nạp ta CM $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \ge \sum_{k=1}^{n} a_k b_{i_k}$ (1).

Với n=2 ta có : $a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1(b_1 - b_2) - a_2(b_1 - b_2) = (a_1 - a_1)(b_1 - b_1) \ge 0$

$\Rightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 \ge a_1 b_2 + a_2 b_1$

Giả sử (1) đúng với n-1 ta CM (1) đúng với n.Giả sử $1 \ne i_1$ và $i_k = 1$ .Ta có :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{i_k} = (a_1 b_{i_1} + a_k b_1) + (a_2 b_{i_2} + ... + a_n b_{i_n})$$

Mà $a_1 \le a_k$; $b_1 \le b_{i_1} \Rightarrow a_1 b_{i_1} + a_k b_1 \le a_1 b_1 + a_k b_{i_1}$ do đó

$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{i_k} \le a_1 b_1 + (a_k b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + ... + a_n b_{i_n}) \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ (theo giả thiết quy nạp)

Áp dụng (1) cho hai dãy $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ và $-b_n \le -b_{n-1} \le ... \le -b_1$ ta có

$-\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} \ge -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{i_k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k b_{i_k} \ge \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$ (2).Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Tổng quát :Hai dãy (a_n) và (b_n) có sắp thứ tự giống nhau nếu $a_i \le a_j \Leftrightarrow b_i \le b_j$;$\forall i, j$ thì ta cũng có $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \ge \sum_{k=1}^{n} a_k b_{i_k} \ge \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$

VIII.1.2.Cho hai dãy ngược chiều $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ và $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$

Ta có BĐT : $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_{i_k} \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$ trong đó $i_1, i_2, ..., i_n$ là hoán vị của 1,2,…,n

Tổng quát :Hai dãy (a_n) và (b_n) có sắp thứ tự ngược nhau nếu $a_i \le a_j \Leftrightarrow b_i \ge b_j$;$\forall i, j$ thì ta cũng có: $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_{i_k} \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$

VIII.2.Bài tập áp dụng

Bài 1: Cho a, b, c tùy ý .CMR : a/ $a^4 + b^4 \ge a^3 b + a\ b^3$

b/ $a^4 + b^4 + c^4 \ge ab^3 + bc^3 + ca^3$

HD:Xét hai dãy thứ tự giống nhau (a, b, c) và (a^3, b^3, c^3)

Bài 2:Cho a,b,c >0 .CMR: $a^3 b + b^3 c + c^3 a \ge a^2 bc + b^2 ca + c^2 ab$

HD: Xét hai dãy thứ tự ngược nhau (a^2, b^2, c^2) và $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$

Bài 3: Cho a,b,c >0 CMR: $a + b + c \le \frac{1}{2}(\frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b}) \le \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}$

HD: Giả sử $0 < a \le b \le c$ Xét hai dãy cùng chiều $a^2 \le b^2 \le c^2$ và $\frac{1}{c} \le \frac{1}{b} \le \frac{1}{a}$ ta có

$a + b + c \le \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}$ (1) và $a + b + c \le \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$ (2)

Cộng (1) và (2) rồi chia cho 2 ta được $a + b + c \le \frac{1}{2}(\frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b})$ (3)

Xét hai dãy cùng chiều $a^3 \le b^3 \le c^3$ và $\frac{1}{bc} \le \frac{1}{ac} \le \frac{1}{ab}$ ta có

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \ge \frac{a^3}{ab} + \frac{b^3}{bc} + \frac{c^3}{ac} = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^3}{a} \text{ (4) và}$$
$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \ge \frac{a^3}{ac} + \frac{b^3}{ab} + \frac{c^3}{bc} = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^3}{b} \text{ (5)}$$

Từ (4) và (5) suy ra

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \ge \frac{1}{2}(\frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b}) \text{ (6).}$$

Từ (3) và (6) suy ra đpcm.

Bài 4: Cho a,b,c > 0 .CMR: $\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

HD:BĐT cần CM tương đương với : $\frac{a^5}{b^3 c^3} + \frac{b^5}{a^3 c^3} + \frac{c^5}{a^3 b^3} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Xét hai dãy $a^5 \le b^5 \le c^5$ và $\frac{1}{b^3 c^3} \le \frac{1}{a^3 c^3} \le \frac{1}{a^3 b^3}$ ta có $\frac{a^5}{b^3 c^3} + \frac{b^5}{a^3 c^3} + \frac{c^5}{a^3 b^3} \ge \frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3}$ (1)

Lại áp dụng BĐT dãy thứ tự với hai dãy $a^2 \le b^2 \le c^2$ và $\frac{1}{c^3} \le \frac{1}{b^3} \le \frac{1}{a^3}$ ta được

$\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (2) .Từ (1) và (2) suy ra đpcm

Bài 5 :Cho a,b,c > 0.CMR: $\frac{a^2}{c^3}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}\ge\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}$

HD: Xét hai dãy thứ tự ngược nhau (a^2,b^2,c^2) và $(\frac{1}{a^3},\frac{1}{b^3},\frac{1}{c^3})$ ta có

$$\frac{a^2}{c^3}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

Bài 6 : Cho tam giác ABC có h_a,h_b,h_c,r là độ dài các đường cao và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác .CMR: $\frac{h_b^2}{h_a^3}+\frac{h_c^2}{h_b^3}+\frac{h_a^2}{h_c^3}\ge\frac{1}{r}$

HD:Áp dụng $h_a=\frac{2S}{a}$; $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$ BĐT cần CM tương đương với

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge a+b+c$$

Áp dụng hai dãy thứ tự ngược nhau (a^3,b^3,c^3) và $(\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2})$ ta có đpcm

Bài 7: Cho tam giác ABC có m_a,m_b,m_c , R là độ dài các đường trung tuyến và bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác.CMR: $\frac{m_b}{m_a^2}+\frac{m_c}{m_b^2}+\frac{m_a}{m_c^2}\ge\frac{2}{R}$

HD:Áp dụng $\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\ge\frac{9}{m_a+m_b+m_c}$ và $m_a+m_b+m_c\le\frac{9R}{2}$

Bài 8 :Cho ba số dương a,b,c .CMR: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2}(\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a})$

HD : Áp dụng hai dãy thứ tự giống nhau (a^2,b^2,c^2) và $(\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b})$

Bài 9:Cho tam giác ABC có các cạnh a,b,c và p là nửa chu vi.CMR:

$$\frac{ab}{p-c}+\frac{bc}{p-a}+\frac{ac}{p-b}\ge 4p$$

HD:Đặt x=a+b-c , y=b+c-a , z=c+a-b (x,y,z > 0)

BĐT cần CM tương đương với :

$$\frac{(x+y)(x+z)}{x}+\frac{(y+z)(y+x)}{y}+\frac{(z+x)(z+y)}{z}\ge 4(x+y+z)$$

$\Leftrightarrow \frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\ge x+y+z$ .Giả sử $x\ge y\ge z>0$ .Xét hai dãy $\frac{1}{x}\le\frac{1}{y}\le\frac{1}{z}$ và $yz\le zx\le xy$

Bài 10:Cho n số dương $a_1,a_2,...,a_n$ tùy ý .CMR:

$a_1^{a_1}a_2^{a_2}...a_n^{a_n}\ge a_1^{a2}a_2^{a_3}...a_n^{a_1}\ge a_1^{a_n}a_2^{a_{n-1}}...a_n^{a_1}$

HD: Áp dụng hai dãy thứ tự giống nhau (a_k) và $(\ln a_k)$

Bài 11: Giả sử $x_1\ge x_2\ge...\ge x_n$ và $y_1\ge y_2\ge...\ge y_n$ .CMR nếu $z_1,z_2,...,z_n$ là một hoán vị bất kì của các số $y_1,y_2,...,y_n$ thì $\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\le\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2$ (Thi Quốc tế lần 17)

HD:Áp dụng BĐT dãy thứ tự ta có $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\ge\sum_{i=1}^{n}x_iz_i$ .Ta có $\sum_{i=1}^{n}y_i^2\ge\sum_{i=1}^{n}z_i^2$ do đó

$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\le\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n}x_iz_i+\sum_{i=1}^{n}z_i^2\ \le\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2$ (đpcm)

Bài 12: Cho (a_k) là một dãy số nguyên dương phân biệt (k=1,2,…,n).CMR với mọi n nguyên dương ta có:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ \text{(Thi Quốc tế lần 20)}$$

HD:Giả sử $(i_1,i_2,...,i_n)$ là hoán vị của (1,2,…,n) sao cho $a_{i_1}<a_{i_2}<...<a_{i_n}$ .Xét hai dãy thứ tự ngược nhau $a_{i_1}<a_{i_2}<...<a_{i_n}$ và $\frac{1}{1^2}>\frac{1}{2^2}>...>\frac{1}{n^2}$ ta có: $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{i_k}}{k^2}$

Bằng quy nạp ta CM được $a_{i_k}\ge k$ với mọi $k\in\{1,2,...,n\}$ .Vậy $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{i_k}}{k^2}\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_k = k$ với mọi k.

Bài 13:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác .CMR:

$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$ (Thi QT lần 24)

HD:Xét hai dãy có thứ tự ngược nhau (bc,ac,ab) và (a^2+bc,b^2+ac,c^2+ab) ta được:

$$bc(a^2+bc)+ac(b^2+ac)+ab(c^2+ab)\le bc(b^2+ac)+ac(c^2+ab)+ab(a^2+bc)$$

$$\Leftrightarrow a^2bc+b^2c^2+ab^2c+a^2c^2+abc^2+a^2b^2\le b^3c+abc^2+ac^3+a^2bc+a^3b+ab^2c$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le a^3b+b^3c+c^3a\Leftrightarrow a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$$

Bài 14: Tồn tại hay không 4 hoán vị $(a_i);(b_i);(c_i);(d_i)$ của $\{1,2,...,50\}$ sao cho

$$\sum_{k=1}^{50} a_ib_i=2\sum_{k=1}^{50} c_id_i$$

HD:Đối với hai hoán vị bất kì $(a_i);(b_i)$ của $\{1,2,...,50\}$ tổng $\sum_{k=1}^{50} a_ib_i$ có giá trị lớn nhất là $\sum_{k=1}^{50} k^2=42925$ và giá trị nhỏ nhất là $\sum_{k=1}^{50} k(50-k)=22100$, mà 2x22100 > 42925.Vậy không tồn tại.

Bài 15:Cho a,b,c > 0 và m,n là hai số nguyên dương.CMR:

$$a^mb^n+b^mc^n+c^ma^n\le a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}$$

HD: Xét hai dãy có thứ tự giống nhau (a^m,b^m,c^m) và (a^n,b^n,c^n)

Bài 16:Cho n số dương $a_1,a_2,...,a_k$ và hai số nguyên dương m,n tùy ý .CMR:

$$a_1{}^m a_2{}^n+a_2{}^m a_3{}^n+...+a_k{}^m a_1{}^n\le a_1{}^{m+n}+a_2{}^{m+n}+...+a_k{}^{m+n}$$

HD: Xét hai dãy có thứ tự giống nhau $(a_1{}^m,a_2{}^m,...,a_k{}^m)$ và $(a_1{}^n,a_2{}^n,...,a_k{}^n)$

Bài 17: p,q là hai số dương tùy ý , $a_1,a_2,...,a_n$ là n số dương tùy ý .CMR với mọi số tự nhiên $k\ge 2$ ta luôn có :

$$\frac{a_1^k}{pa_2+qa_3}+\frac{a_2^k}{pa_3+qa_4}+...+\frac{a_{n-1}^k}{pa_n+qa_1}+\frac{a_n^k}{pa_1+qa_2}\ge\frac{a_1^{k-1}+a_2^{k-1}+...+a_n^{k-1}}{p+q}$$

HD: Gọi S là vế trái của BĐT trên.Ta có $a_1^{k-1} = \sqrt{\frac{a_1^k}{pa_2 + qa_3}}.\sqrt{a_1^{k-2}(pa_2 + qa_3)},...$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki cho hai bộ số ta được :

$(a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + ... + a_n^{k-1})^2 \le S\left[a_1^{k-2}(pa_2 + qa_3) + a_2^{k-2}(pa_3 + qa_4) + ... + a_n^{k-2}(pa_1 + qa_2)\right](1)$

Vế phải của (1) bằng $p(a_1^{k-2}a_2 + a_2^{k-2}a_3 + ...a_n^{k-2}a_1) + q(a_1^{k-2}a_3 + a_2^{k-2}a_4 + ... + a_4^{k-2}a_2)$

Áp dụng kết quả bài 16 ta được $a_1^{k-2}a_2 + a_2^{k-2}a_3 + ...a_n^{k-2}a_1 \le a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + ... + a_n^{k-1}$ và

$a_1^{k-2}a_3 + a_2^{k-2}a_4 + ... + a_4^{k-2}a_2 \le a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + ... + a_n^{k-1}$

Từ (1) suy ra $(a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + ... + a_n^{k-1})^2 \le S(p+q)(a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + ... + a_n^{k-1})$ suy ra đpcm.

Bài 18: a,b,c,d là bốn số dương tùy ý. CMR với mọi số nguyên dương n ta đều có:

$$\frac{a^n}{b+c+d} + \frac{b^n}{a+c+d} + \frac{c^n}{a+b+d} + \frac{d^n}{a+b+c} \ge \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} + d^{n-1}}{3}$$

HD:Giải tương tự bài 17

Bài 19:Cho n số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ và gọi s=$a_1 + a_2 + ... + a_n$. CMR với mọi số nguyên dương k ta đều có : $\frac{a_1^k}{s - a_1} + \frac{a_2^k}{s - a_2} + ... + \frac{a_n^k}{s - a_n} \ge \frac{a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + ... + a_n^{k-1}}{n-1}$

HD: Giải tương tự bài 17