BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

Võ Quốc Thành

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA DÃY SINH BỞI HÀM SỐ VÀ ÁP DỤNG

Luận văn thạc sĩ toán học

Chuyên ngành : Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số : 60 46 40

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu

QUY NHƠN, NĂM 2008

Mục lục

Mở đầu

Chuyên đề dãy số và các vấn đề liên quan đến dãy số là một phần quan trọng của đại số và giải tích toán học. Có nhiều dạng toán loại khó liên quan đến chuyên đề này. Đối với học sinh phổ thông, những khái niệm dãy số thường khó hình dung về cấu trúc đại số trên tập các dãy số, đặc biệt là các phép tính đối với các dãy có chứa tham số, các phép biến đổi dãy và đại số các dãy,...

Dãy số có vị trí đặc biệt trong toán học không chỉ như là những đối tượng để nghiên cứu mà còn đóng vai trò như là một công cụ đắc lực của giải tích toán học.

Trong nhiều kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, thi Olympíc toán quốc tế, các bài toán liên quan đến dãy số cũng hay được đề cập và thường thuộc loại rất khó. Các bài toán về ước lượng và tính giá trị các tổng, tích cũng như các bài toán cực trị và xác định giới hạn của một biểu thức cho trước thường có mối quan hệ ít nhiều đến các đặc trưng của dãy tương ứng. Các bài toán về dãy số đã được đề cập ở các giáo trình cơ bản về giải tích toán học và một số tài liệu bồi dưỡng giáo viên và học sinh chuyên toán bậc trung học phổ thông.

Luân văn *Một số tính chất của dãy sinh bởi hàm số và áp dụng* nhằm cung cấp một số kiến thức cơ bản về dãy số và một số vấn đề liên quan đến dãy số. Đồng thời cũng cho phân loại một số dạng toán về dãy số theo dạng cũng như phương pháp giải.

Trong quá trình hoàn thành luận văn , tác giả đã không ngừng nỗ lực để học hỏi, tìm tòi và khảo sát một số bài toán về dãy số.

Luận văn gồm phần mở đầu và ba chương.

Chương 1: Một số tính chất cơ bản của dãy số.
Nội dung của chương này nhằm trình bày định nghĩa các dãy số đặc biệt và các tính chất liên quan. Đồng thời trình bày một số bài toán áp dụng liên quan đến cấp số cộng, cấp số nhân và các tính chất đặc biệt của chúng. Nêu một số tính chất cơ bản

của dãy số và các bài toán xác định các dãy số liên quan đến các hàm sơ cấp ở phổ thông.

Chương 2: Hàm chuyển đổi một số dãy số đặc biệt.
Chương này nhằm giới thiệu một số lớp hàm bảo toàn các dãy số đặc biệt nêu ở chương 1 và nêu các mối liên hệ giữa các hàm đã cho. Đồng thời nêu xét các dãy tuần hoàn và phản tuần hoàn và khảo sát một số tính chất của các hàm chuyển đổi các dãy số đặc biệt

Chương 3 nhằm khảo sát một số tính chất và tính toán trên dãy số.

Mặc dù bản thân đã có những cố gắng vượt bậc, nhưng sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết, rất mong sự góp ý của quý Thầy Cô và những bạn đọc quan tâm đến luận văn.

Chương 1

Một số tính chất cơ bản của dãy số

Ta nhắc lại một số định nghĩa trong chương trình toán bậc phổ thông.

1.1 Cấp số

1.1.1 Cấp số cộng

Định nghĩa 1.1. *Dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn điều kiện*

$$u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = \cdots = u_{n+1} - u_n$$

được gọi là một cấp số cộng.

Khi dãy số $\{u_n\}$ lập thành một cấp số cộng thì hiệu $d = u_1 - u_0$ được gọi là công sai của cấp số cộng đã cho.

Nhận xét 1.1. *Nếu có một dãy số có hữu hạn các phần tử*

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

thỏa mãn tính chất

$$u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = \cdots = u_n - u_{n-1} \tag{1.1}$$

thì dãy số u_n được gọi là một cấp số cộng với $d = u_1 - u_0$ được gọi là công sai. Dãy số $\{u_n\}$ là một cấp số cộng với công sai $d = 0$ thì $u_n = u_{n+1}$ với mọi n, khi đó ta gọi $\{u_n\}$ là dãy hằng (dãy không đổi).

Kí hiệu

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

S_n được gọi là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng.
u_n được gọi là số hạng tổng quát của cấp số cộng $\{u_n\}$.

Nhận xét 1.2. *Cho $\{u_n\}$ là một cấp số cộng công sai d, ta có*

$$u_n = u_{n-1} + d = u_1 + (n-1)d,$$

$$2u_k = u_{k-1} + u_{k+1}, k \geqslant 2,$$

và

$$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2} = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}.$$

Bài toán 1.1. *Cho $\{u_n\}$ là một cấp số cộng mà các số hạng đều là các số nguyên dương. Giả sử trong dãy có một số chính phương. Chứng minh rằng dãy đã cho có vô hạn số chính phương là bình phương của các số nguyên dương.*

Giải. Giả sử dãy $\{u_n\}$ có công sai $d > 0$ và x là một số chính phương trong dãy, và $x = m^2$. Khi đó

$$(m + kd)^2 = m^2 + 2mkd + k^2d^2 = x + d(2mk + k^2d),$$

điều này chứng tỏ dãy đã cho có vô hạn số chính phương là bình phương của các số nguyên dương.

Bài toán 1.2. *Cho các số dương $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tạo thành một cấp số cộng, công sai $d > 0$. Chứng minh rằng*

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}}$$

Giải. Nhận xét rằng

$$\frac{1}{\sqrt{u_k} + \sqrt{u_{k+1}}} = \frac{\sqrt{u_{k+1}} - \sqrt{u_k}}{d}.$$

Lần lượt cho $k = 1, 2, \ldots, n$ vào trong đẳng thức trên và thực hiện cộng theo vế, ta thu được

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{1}{d}\left[(\sqrt{u_2} - \sqrt{u_1}) + (\sqrt{u_3} - \sqrt{u_2}) + \cdots + (\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}})\right] \\ &= \frac{1}{d}(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_1}) = \frac{1}{d}\frac{u_n - u_1}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_1}} = \frac{n-1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}} \end{aligned}$$

Vậy nên

$$t_n = \frac{n-1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}}.$$

Bài toán 1.3. *Cho các số dương $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tạo thành một cấp số cộng, công sai $d > 0$. Tính tổng*

$$S = \frac{1}{u_1.u_2} + \frac{1}{u_2.u_3} + \cdots + \frac{1}{u_{n-1}.u_n}$$

Giải. Nhận xét rằng

$$\frac{1}{u_k.u_{k+1}} = \frac{1}{d}\Big(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}\Big).$$

Lần lượt cho $k = 1, 2, \ldots, n$ vào trong đẳng thức trên và thực hiện cộng theo vế ta thu được

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{d}\left[\Big(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\Big) + \Big(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_n}\Big)\right] \\ &= \frac{1}{d}\Big(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_n}\Big) = \frac{n-1}{u_1.u_n} \end{aligned}$$

Vậy nên

$$S = \frac{n-1}{u_1.u_n}.$$

1.1.2 Cấp số nhân

Định nghĩa 1.2. *Dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn điều kiện*

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = \cdots = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

được gọi là một cấp số nhân.

Khi dãy số $\{u_n\}$ lập thành một cấp số nhân thì thương $q = \dfrac{u_1}{u_0}$ được gọi là một công bội của cấp số đã cho.

Nhận xét 1.3. *Theo định nghĩa 1.2, nếu một dãy số hữu hạn các phần tử*

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

(với mỗi phần tử trong dãy khác không) thỏa mãn tính chất

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = \cdots = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

thì dãy số $u_1, u_2, \ldots, u_n$ được gọi là một cấp số nhân với công bội q= $\dfrac{u_1}{u_0}$ được gọi là một cấp số nhân

Nhận xét 1.4. *Cho $\{u_n\}$ là một cấp số nhân công bội $q \neq 1$, ta có*
$u_n = q.u_{n-1} = u_1.q^{n-1},\ \ n = 1, 2, \ldots$
$u_k^2 = u_{k-1}u_{k+1}, k \geqslant 2.$
$S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}$

1.1.3 Cấp số điều hoà

Định nghĩa 1.3. *Dãy số $\{u_n\}$,($u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$) thỏa mãn điều kiện*

$$u_n = \frac{2u_{n-1}u_{n+1}}{u_{n-1} + u_{n+1}}$$

được gọi là cấp số điều hòa.

Bài toán 1.4. *Chứng minh rằng dãy số $\{u_n\}$ lập thành một dãy số điều hòa khi và chỉ khi dãy đã cho thỏa mãn điều kiện.*

$$u_{n+1} = \frac{1}{\dfrac{2}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n-1}}}.$$

Giải. Ta có

$$u_{n+1} = \frac{1}{\dfrac{2}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n-1}}} \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{u_n u_{n-1}}{2u_{n-1} - u_n}$$

$$\Leftrightarrow u_n(u_{n-1} + u_{n+1}) = 2u_{n-1}u_{n+1} \Leftrightarrow u_n = \frac{2u_{n-1}u_{n+1}}{u_{n-1} + u_{n+1}}.$$

Vậy dãy số (u_n) lập thành một cấp số điều hòa.

1.2 Dãy tuần hoàn và phản tuần hoàn

Trong phần nầy ta quan tâm đến hai loại dãy tuần hoàn cơ bản là tuần hoàn cộng tính và tuần hoàn nhân tính.

1.2.1 Dãy tuần hoàn và phản tuần hoàn cộng tính

Định nghĩa 1.4. *Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là dãy tuần hoàn cộng tính nếu tồn tại số nguyên dương l sao cho*

$$u_{n+l} = u_n,\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

Số nguyên dương l bé nhất để dãy $\{u_n\}$ thoả mãn điều kiện (1.2) được gọi là chu kì cơ sở của dãy.

Định nghĩa 1.5. *Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là dãy tuần phản hoàn cộng tính nếu tồn tại số nguyên dương l sao cho*

$$u_{n+l} = -u_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

Nhận xét 1.5. *Dãy tuần hoàn chu kỳ 1 khi và chỉ khi dãy đã cho là một dãy hằng.*

Nhận xét 1.6. *Dãy tuần hoàn (cộng tính) chu kỳ 2 khi và chỉ khi dãy có dạng*

$$u_n = \frac{1}{2}\left[\alpha + \beta + (\alpha - \beta)(-1)^{n+1}\right], \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1.2.2 Dãy tuần hoàn và phản tuần hoàn nhân tính

Định nghĩa 1.6. *Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là dãy tuần hoàn nhân tính nếu tồn tại số nguyên dương $s(s > 1)$sao cho*

$$u_{sn} = u_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

Số nguyên dương s bé nhất để dãy $\{u_n\}$ thoả mãn điều kiện (1.4) được gọi là chu kì cơ sở của dãy.

Nhận xét 1.7. *Một dãy phản tuần hoàn cộng tính chu kì r thì sẽ tuần hoàn cộng tính chu kì $2r$*

Định nghĩa 1.7. *Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là dãy phản tuần hoàn nhân tính nếu tồn tại số nguyên dương $s(s > 1)$ sao cho*

$$u_{sn} = -u_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nhận xét 1.8. *Mọi dãy $\{u_n\}$ phản tuần hoàn chu kỳ r đều có dạng $u_n = \frac{1}{2}(v_n - v_{n+r})$, với $v_{n+2r} = v_n$.*

1.3 Dãy tuyến tính và phân tuyến tính

Trong phần này ta trình bày một số phương trình sai phân cơ bản có nghiệm là các số thực và cách giải chúng.

1.3.1 Phương trình sai phân tuyến tính với hệ số hằng số

Trước hết, ta xét phương trình sai phân tuyến tính cấp một dạng

$$x_1 = \alpha,\ \ ax_{n+1} + bx_n = f(n),\ n \in \mathbb{N}^*,$$

trong đó a, b, α là các hằng số $(a \neq 0)$ và $f(n)$ là biểu thức của n cho trước.

Nhận xét rằng các cấp số cơ bản là những dạng đặc biệt của phương trình sai phân tuyến tính.

Bài toán 1.5. *Xác định số hạng tổng quát của một cấp số nhân biết rằng số hạng đầu tiên bằng 9 và công bội bằng 3.*

Giải. Ta có

$$x_{n+1} = 3x_n,\ \ x_1 = 9.$$

Phương trình đặc trưng có nghiệm $\lambda = 3$. Do đó $x_n = c.3^n$. Do $x_1 = 9$ suy ra $c = 3$. Vậy $x_n = 3^{n+1}$.

Bài toán 1.6. *Cho a, b, α là các số thực cho trước $(a \neq 0)$ và dãy $\{x_n\}$ xác định như sau*

$$x_0 = \alpha,\ \ ax_{n+1} + bx_n = 0,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy

Giải. Nếu $b = 0$ thì dãy $x_n = 0,\ \ n = 1, 2, \ldots$
Nếu $b \neq 0$, phương trình đặc trưng $a\lambda + b = 0$ có nghiệm $\lambda = -\dfrac{b}{a}$. Do đó $x_n = c\Big(-\dfrac{b}{a}\Big)^n$.
Vì $x_0 = \alpha$ nên $c = \alpha$. Vậy

$$x_n = \alpha.\Big(-\frac{b}{a}\Big)^n.$$

Xét tiếp phương trình sai phân tuyến tính cấp hai dạng

$$x_1 = \alpha, x_2 = \mu,\ \ ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} = A(n),\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

trong đó a, b, c, α, μ là các hằng số, $a \geqslant 0$ và $A(n)$ là biểu thức theo n cho trước.

Bài toán 1.7. *Tìm dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn điều kiện*

$$x_1 = \alpha, x_2 = \beta,\ \ ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} = 0,\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Giải phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, tìm λ.
a. Nếu λ_1, λ_2 là các nghiệm thực khác nhau thì $x_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$, trong đó A, B được xác định khi biết x_1, x_2.
b. Nếu λ_1, λ_2 là các nghiệm thực và $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ thì $x_n = (A + Bn)\lambda^n$, trong đó A, B được xác định khi biết x_1, x_2.

Bài toán 1.8. *Tìm dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn điều kiện*

$$x_1 = \alpha, x_2 = \beta, \;\; ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} = A(n), \;\; n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}^*.$$

trong đó $a \neq 0$, $A(n)$ là đa thức theo n cho trước.

Giải. Giải phương trình đặc trưng $a\lambda^2+b\lambda+c = 0$ xác định các giá trị của λ. Nghiệm của phương trình có dạng $x_n = x'_n + x^*_n$, trong đó x'_n là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} = 0$ và x^*_n là nghiệm riêng của phương trình $ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} = A(n)$, trong đó $A(n) \neq 0$. Ta tìm nghiệm x'_n của phương trình thuần nhất $ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} = 0$ theo bài toán 1.7 với các hệ số A, B chưa được xác định. Nghiệm x^*_n được xác định :
a. Nếu $\lambda \neq 1$ thì x^*_n là đa thức cùng bậc với $A(n)$.
b. Nếu $\lambda = 1$ thì $x^*_n = n.f(n)$, trong đó $f(n)$ là đa thức cùng bậc với $A(n)$.
c. Nếu $\lambda = 1$ là nghiệm bội thì $x^*_n = n^2.f(n)$, trong đó $f(n)$ là đa thức cùng bậc với $A(n)$.
Thay x^*_n vào phương trình, đồng nhất các hệ số ta tìm được x^*_n. Từ hệ thức $x_n = x'_n+x^*_n$ và các giá trị x_1, x_2 ta tìm được các hệ số A, B.

Bài toán 1.9. *Tìm dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn điều kiện*

$$x_1 = \alpha, x_2 = \beta, \;\; ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} = \gamma.\eta^n, \;\; n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Giải phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, ta tìm được λ . Nghiệm phương trình có dạng $x_n = x'_n + x^*_n$, với x'_n được tìm như trong bài toán 1.7 , các hệ số A, B chưa xác định. x^*_n được xác định như sau
i. Nếu $\lambda \neq \eta$ thì $x^*_n = k.\eta^n$.
ii. Nếu phương trình có nghiệm đơn $\lambda = \eta$ thì $x^*_n = kn.\eta^n$.
iii. Nếu phương trình có nghiệm kép $\lambda = \eta$ thì $x^*_n = kn^2.\eta^n$.
Thay x^*_n vào phương trình, sử dụng phương pháp đồng nhất các hệ số ta tìm được k.
Từ các giá trị x_1, x_2 và $x_n = x'_n + x^*_n$ ta tìm được các hệ số A, B.

Tiếp theo, ta xét phương trình sai phân tuyến tính cấp ba là phương trình sai phân có dạng

$$x_1 = \alpha, x_2 = \beta, x_3 = \gamma,\ \ ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} + dx_{n-2} = A(n),\ \ n \geqslant 3.$$

Bài toán 1.10. *Tìm dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn*

$$x_1 = \alpha, x_2 = \beta, x_3 = \gamma,\ \ ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} + dx_{n-2} = A(n),\ \ n \geqslant 3.$$

trong đó $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ là các hằng số cho trước, $A(n)$ là biểu thức cho trước.

Giải. Trong dạng nầy ta chỉ xét phương trình đặc trưng có nghiệm thực.
Nghiệm tổng quát phương trình sai phân tuyến tính cấp ba có dạng $x_n = x'_n + x^*_n$, trong đó x'_n là nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất, và x^*_n là nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất.
Phương trình đặc trưng

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$$

i. Phương trình có ba nghiệm thực λ_1, λ_2, λ_3 phân biệt. Khi đó

$$x'_n = a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n + a_3\lambda_3^n$$

ii. Phương trình có một nghiệm thực bội 2 và một nghiệm đơn $(\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3)$ thì

$$x'_n = (a_1 + a_2 n)\lambda_1^n + a_3\lambda_3^n$$

iii. Nếu phương trình có nghiệm bội $3(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3)$ thì

$$x'_n = (a_1 + a_2 n + a_3 n^2)\lambda_1^n$$

Gọi x^*_n là một nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất.
a) Xét $A(n)$ là một đa thức theo n. Ta có
+) Nếu $\lambda \neq 1$ thì x^*_n là đa thức cùng bậc với $A(n)$.
+) Nếu $\lambda = 1$ là nghiệm đơn thì $x^*_n = n.B(n)$ trong đó $B(n)$ là đa thức cùng bậc với đa thức $A(n)$
+) Nếu $\lambda = 1$ là nghiệm bội 2 thì $x^*_n = n^2.B(n)$ trong đó $B(n)$ là đa thức cùng bậc với đa thức $A(n)$
+) Nếu $\lambda = 1$ là nghiệm bội 3 thì $x^*_n = n^3.B(n)$ trong đó $B(n)$ là đa thức cùng bậc với đa thức $A(n)$.
b) Trường hợp $A(n) = \chi\eta^n$. Ta có

+) Nếu $\lambda \neq \eta$ thì $x_n^* = k.n.\eta^n$

+) Nếu $\lambda = \eta$ là nghiệm đơn thì $x_n^* = k.\eta^n$,

+) Nếu $\lambda = \eta$ là nghiệm bội 2 thì $x_n^* = k.n^2\eta^n$,

+) Nếu $\lambda = \eta$ là nghiệm bội 3 thì $x_n^* = kn^3.\eta^n$.

1.3.2 Dãy phân thức

Bài toán 1.11. *Tìm dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn các điều kiện*

$$x_1 = a, \;\; x_{n+1} = \frac{x_n^2 + d}{2x_n}, \;\; d \geqslant 0. \tag{1.5}$$

Giải. Khi $d = 0$ ta có $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$, suy ra $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a$.
Xét trường hợp $d > 0$. Nhận xét rằng nếu u_n, v_n là các nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + dv_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_nv_n, \;\; u_1 = 1, v_1 = 1 \end{cases}$$

thì $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ là nghiệm của phương trình (1.5). Thật vậy, ta chứng minh bằng quy nạp như sau, khi $n = 1$ ta có

$$x_1 = \frac{u_1}{v_1} = a$$

Giả sử $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ là nghiệm của (1.5). Khi đó

$$x_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{u_n^2 + dv_n^2}{2u_nv_n} = \frac{\frac{u_n^2}{v_n^2} + d}{2\frac{u_n}{v_n}} = \frac{x_n^2 + d}{2x_n}$$

cũng là nghiệm của (1.5). Như vậy để tìm nghiệm của (1.5) ta giải hệ

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + dv_n^2 \\ 2v_{n+1} = 2du_nv_n, \;\; u_1 = a, v_1 = 1 \end{cases}$$

Thực hiện cộng theo vế các phương trình trong hệ ta thu được:

$$u_{n+1} + 2v_{n+1} = (u_n + \sqrt{d}v_n)^2$$

Do đó

$$u_{n+1} + 2v_{n+1} = (u_n + \sqrt{d}v_n)^2 = \cdots = (u_1 + \sqrt{d}v_1)^{2^n} = (a + \sqrt{d})^{2^n}$$

Tương tự, trừ vế với vế các phương trình trong hệ ta cũng có:

$$u_{n+1} - 2v_{n+1} = (u_n - \sqrt{d}v_n)^2 = \cdots = (u_1 - \sqrt{d}v_1)^{2^n} = (a - \sqrt{d})^{2^n}$$

Do đó

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big[(a+\sqrt{d})^{2^n} + (a-\sqrt{d})^{2^n}\Big] \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{d}}\Big[(a+\sqrt{d})^{2^n} - (a-\sqrt{d})^{2^n}\Big] \end{cases}$$

Do $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ suy ra

$$x_n = \frac{\sqrt{d}\Big[(a+\sqrt{d})^{2^{n-1}} + (a-\sqrt{d})^{2^{n-1}}\Big]}{(a+\sqrt{d})^{2^{n-1}} - (a-\sqrt{d})^{2^{n-1}}}$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được kết quả x_n thoả mãn bài toán đã cho.

Bài toán 1.12. *Tìm dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn các điều kiện*

$$x_1 = a, \ \ x_{n+1} = \frac{2x_n}{1 + dx_n^2}, \ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Trường hợp $d = 0$. Khi đó $x_{n+1} = 2x_n$ và $x_n = 2^{n-1}a$.
Trường hợp $d > 0$. Giả sử u_n, v_n là một nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + dv_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_nv_n, \ \ u_1 = 1, v_1 = a. \end{cases}$$

thì $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ là một nghiệm của phương trình (chứng minh bằng quy nạp). Ta có

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + dv_n^2 \\ \sqrt{d}v_{n+1} = 2\sqrt{d}u_nv_n, \ \ u_1 = 1, v_1 = a. \end{cases}$$

Thực hiện cộng vế theo vế của các phương trình ta thu được

$$u_{n+1} + \sqrt{d}v_{n+1} = (u_n + \sqrt{d}v_n)^2$$

Như vậy

$$u_{n+1} + \sqrt{d}v_{n+1} = (u_n + \sqrt{d}v_n)^2 = \cdots = (u_1 + \sqrt{d}v_1)^{2^n} = (1 + a\sqrt{d})^{2^n}$$

Thực hiện trừ vế theo vế của các phương trình ta thu được

$$u_{n+1} - \sqrt{d}v_{n+1} = (u_n - \sqrt{d}v_n)^2$$

Như vậy

$$u_{n+1}-\sqrt{d}v_{n+1}=(u_n-\sqrt{d}v_n)^2=\cdots=(u_1-\sqrt{d}v_1)^{2^n}=(1-a\sqrt{d})^{2^n}$$

Suy ra

$$\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left[\left(1+a\sqrt{d}\right)^{2^n}+\left(1-a\sqrt{d}\right)^{2^n}\right] \\ v_{n+1}=\dfrac{1}{2\sqrt{d}}\left[\left(1+a\sqrt{d}\right)^{2^n}-\left(1-a\sqrt{d}\right)^{2^n}\right] \end{cases}$$

Vì $x_n=\dfrac{u_n}{v_n}$ nên

$$x_n=\frac{\sqrt{d}\left[\left(1+a\sqrt{d}\right)^{2^{n-1}}+\left(1-a\sqrt{d}\right)^{2^{n-1}}\right]}{\left(1+a\sqrt{d}\right)^{2^{n-1}}-\left(1-a\sqrt{d}\right)^{2^{n-1}}}$$

Trường hợp $d<0$. Đặt $d=-k, k>0$. Giả sử u_n,v_n là một nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} u_{n+1}=u_n^2-kv_n^2 \\ v_{n+1}=2u_nv_n,\ \ u_1=1,v_1=a. \end{cases}$$

thì $x_n=\dfrac{u_n}{v_n}$ là nghiệm của phương trình đã cho. Tương tự trường hợp $d>0$, ta có

$$\begin{aligned} &\begin{cases} u_{n+1}=u_n^2-kv_n^2 \\ v_{n+1}=2u_nv_n,\ \ u_1=1,v_1=a. \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} u_{n+1}=u_n^2-kv_n^2 \\ i\sqrt{k}v_{n+1}=2i\sqrt{k}u_nv_n,\ \ u_1=1,v_1=a. \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} u_{n+1}+i\sqrt{k}v_{n+1}=(u_n+i\sqrt{k}v_n)^2=(u_1+i\sqrt{k}v_1)^{2^n} \\ u_{n+1}-i\sqrt{k}v_{n+1}=(u_n-i\sqrt{k}v_n)^2=(u_1-i\sqrt{k}v_1)^{2^n} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{2}\left[(1+ai\sqrt{k})^{2^n}+(1-ai\sqrt{k})^{2^n}\right] \\ v_{n+1}=\frac{1}{2i\sqrt{k}}\left[(1+ai\sqrt{k})^{2^n}-(1-ai\sqrt{k})^{2^n}\right] \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy

$$x_n=\frac{i\sqrt{k}\left[(1+ai\sqrt{k})^{2^{n-1}}+(1-ai\sqrt{k})^{2^{n-1}}\right]}{(1+ai\sqrt{k})^{2^{n-1}}-(1-ai\sqrt{k})^{2^{n-1}}}$$

Bài toán 1.13. *Tìm dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn các điều kiện*

$$x_1=4,\ \ x_{n+1}=\frac{x_n^2+9}{2x_n}, \tag{1.6}$$

Giải. Nhận xét rằng nếu u_n, v_n là các nghiệm của hệ phương trình (1.6)

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 9v_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_nv_n, \quad u_1 = 4, v_1 = 1 \end{cases}$$

thì $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ là nghiệm của phương trình (1.6). Thật vậy, ta chứng minh bằng quy nạp như sau, khi $n = 1$ ta có

$$x_1 = \frac{u_1}{v_1} = 4$$

Giả sử $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ là nghiệm của phương trình. Khi đó

$$x_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{u_n^2 + 9v_n^2}{2u_nv_n} = \frac{\frac{u_n^2}{v_n^2} + 9}{2\frac{u_n}{v_n}} = \frac{x_n^2 + 9}{2x_n}$$

cũng là nghiệm của (1.6).

Như vậy để tìm nghiệm của (1.6), ta giải hệ

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 9v_n^2 \\ 3v_{n+1} = 6u_nv_n, \quad u_1 = 4, v_1 = 1 \end{cases}$$

Lần lượt cộng và trừ theo vế các đẳng thức của hệ trên ta thu được:

$$\begin{cases} u_{n+1} + 3v_{n+1} = (u_n + 3v_n)^2 = (u_1 + 3v_1)^{2^n} = 7^{2^n} \\ u_{n+1} - 3v_{n+1} = (u_n - 3v_n)^2 = (u_1 - 3v_1)^{2^n} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+1} = \frac{7^{2^n}+1}{2} \\ v_{n+1} = \frac{7^{2^n}-1}{6} \end{cases}$$

Vậy

$$x_n = \frac{3\left(7^{2^{n-1}} + 1\right)}{7^{2^{n-1}} - 1}$$

1.4 Một số bài toán áp dụng

Bài toán 1.14. *Tìm x_n biết rằng*

$$x_0 = 1, x_1 = 4, \quad x_{n+2} = 2(2n+3)^2x_{n+1} - 4(n+1)^2(2n+1)(2n+3)x_n, \quad n \geqslant 0.$$

Giải. Đặt dãy số phụ $y_n = \dfrac{x_n}{(2n)!}$. Từ công thức

$$x_{n+2} = 2(2n+3)^2x_{n+1} - 4(n+1)^2(2n+1)(2n+3)x_n,$$

suy ra

$$\begin{aligned}&(2n+4)!y_{n+2} = 2(2n+3)^2.(2n+2)!y_{n+1} - 4(n+1)^2(2n+1)(2n+3).(2n)!y_n\\ \Leftrightarrow&(n+2)y_{n+2} = (2n+3)y_{n+1} - (n+1)y_n\\ \Leftrightarrow&(n+2)(y_{n+2} - y_{n+1} = (n+1)(y_{n+1} - y_n) = \cdots = y_1 - y_0\end{aligned}$$

Như vậy

$$\begin{aligned}y_{n+2} &= y_{n+1} + \frac{y_1 - y_0}{n+2} = y_{n+1} + (y_1 - y_0)\frac{1}{n+2}\\ &= \cdots = y_0 + (y_1 - y_0)\Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+2}\Big).\end{aligned}$$

Suy ra $y_n = y_0 + (y_1 - y_0)\Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\Big)$. Vậy nên

$$\begin{aligned}x_n &= (2n)!\left[x_0 + \Big(\frac{x_1}{2} - x_0\Big)\Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\Big)\right]\\ &= 2.(2n)!\Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\Big)\end{aligned}$$

Bài toán 1.15. *Tìm x_n biết rằng*

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3, \ \ x_n + 11x_{n-2} = 7x_{n-1} + 5x_{n-3}, \ \ n \geqslant 4.$$

Giải. Phương trình đặc trưng $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda + 5 = 0$ hay

$$(\lambda - 1)^2(\lambda - 5) = 0,$$

có nghiệm $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \ \ \lambda_3 = 5$. Suy ra

$$x_n = (a_1 + a_2 n).1^n + a_3.5^n = a_1 + a_2 n + a_3.5^n$$

Theo giả thiết $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$, ta có hệ

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 5a_3 = 0\\ a_1 + 2a_2 + 25a_3 = 1\\ a_1 + 3a_2 + 125a_3 = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{1}{16}\\ a_2 = \frac{3}{4}\\ a_3 = \frac{1}{16}\end{cases}$$

Vậy

$$x_n = \frac{5^{n-1}}{16} + \frac{3n}{4} - \frac{13}{16}.$$

Bài toán 1.16. *Tìm dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn*

$$x_1 = 14, x_2 = 28, \ \ x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 4.3^n, \ \ n \geqslant 3.$$

Giải. Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ có nghiệm kép $\lambda = 1$. Nghiệm phương trình có dạng $x_n = x'_n + x^*_n$, trong đó $x'_n = (A + nB).1^n = (A + nB)$ và $x^*_n = k.3^n$. Thế x^*_n vào trong phương trình, ta được

$$k.3^{n+1} - 2k.3^n + k.3^{n-1} = 4.3^n \Leftrightarrow k = 3$$

Suy ra $x^*_n = 3.3^n$.
Ta có $x_n = A + Bn + 3.3^n$. Từ $x_1 = 10, x_2 = 28$ suy ra $A + B + 9 = 14$ và

$$A + 2B + 27 = 28 \Leftrightarrow A = 9, B = -4.$$

Vậy nên

$$x_n = 9 - 4n + 3.3^n.$$

Bài toán 1.17. *Cho dãy số* $\{x_n\}$ *xác định bởi các điều kiện sau*
i. $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 0$
ii. Với mọi $n \geqslant 1$,

$$x_{n+3} + \frac{n+1}{n}x_n = \frac{(n^2+n+1)(n+1)}{n}x_{n+2} + (n^2+n+1).$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ *gồm toàn các số chính phương với mọi* n.

Giải. Ta xét dãy y_n như sau:

$$y_0 = 0, y_1 = 1, \;\; y_{n+2} = ny_{n+1} + y_n, \;\; n \geqslant 0.$$

Theo cách xác định dãy suy ra dãy y_n gồm toàn các số nguyên và

$$\begin{aligned} y_{n+3} &= (n+1)y_{n+2} + y_{n+1}, \\ y_n &= y_{n+2} - ny_{n+1}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} ny^2_{n+3} &= n(n+1)^2y^2_{n+2} + 2n(n+1)y_{n+2}y_{n+1} + ny^2_{n+1} \\ (n+1)y^2_n &= (n+1)y^2_{n+2} - 2n(n+1)y_{n+1}y_{n+2} + (n+1)n^2y^2_{n+1} \end{aligned}$$

Thực hiện cộng theo vế và chia hai vế cho n, ta thu được

$$y^2_{n+3} + \frac{n+1}{n}y^2_n = \frac{(n^2+n+1)(n+1)}{n}y^2_{n+2} + (n^2+n+1).$$

Nhận xét rằng dãy $\{y^2_n\}$ thoả mãn điều kiện như dãy $\{x_n\}$, do vậy các phần tử của hai dãy trùng nhau, tức là

$$x_n = y^2_n.$$

Vậy dãy $\{x_n\}$ gồm toàn các số chính phương.

Bài toán 1.18. *Xác định dãy số x_n biết rằng :*

$$x_1 = 1, \;\; , x_2 = 0, \;\; x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = n + 1, \;\; n \geqslant 2.$$

Giải. Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ có nghiệm $\lambda = 1$. Nghiệm của phương trình có dạng $x_n = x'_n + x^*_n$, trong đó $x'_n = (A + Bn).1^n = A + Bn$ và $x^*_n = n^2(an + b)$. Thế x^*_n vào phương trình, ta thu được

$$(n+1)^2[a(n+1) + b] - 2n^2(an + b) + (n-1)^2[a(n-1) + b] = n + 1.$$

Lần lượt thay $n = 1, n = 2$, ta thu được hệ

$$\begin{cases} 4(2a + b) - 2(a + b) = 2 \\ 9(3a + b) - 8(2a + b) + (a + b) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 1 \\ 12a + 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{6} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra

$$x^*_n = n^2\Big(\frac{n}{6} + \frac{1}{2}\Big).$$

Từ đó

$$x_n = x'_n + x^*_n = A + Bn + n^2\Big(\frac{n}{6} + \frac{1}{2}\Big).$$

Từ $x_1 = 1, x_2 = 0$, ta suy ra hệ

$$\begin{cases} A + B + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} = 1 \\ A + 2B + 4.\Big(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}\Big) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 3 \\ A + 2B = -\frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -\dfrac{11}{3} \end{cases}$$

Vậy

$$x_n = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} - \frac{11n}{3} + 4.$$

Bài toán 1.19. *Tìm x_n biết*

$$x_1 = 1, \;\; x_{n+1} = 2x_n + n^2 + 2.2^n, \;\; n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Phương trình đặc trưng $\lambda - 2 = 0$ có nghiệm $\lambda = 2$. Ta có $x_n = x'_n + x^*_n + x^{**}_n$, trong đó $x'_n = c.2^n, x^*_n = an^2 + bn + c, x^{**}_n = An.2^n$. Thay x^*_n vào trong phương trình $x_{n+1} = 2x_n + n^2$, ta thu được

$$a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 2an^2 + 2bn + 2c + n^2$$

Lần lượt thay $n = 1, n = 2, n = 3$ vào trong phương trình trên ta thu được hệ

$$\begin{cases} 2a - c = 1 \\ a - b - c = 4 \\ 2a + 2b + c = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$$

Vậy $x_n^* = -n^2 - 2n - 3$.

Thay x_n^{**} vào trong phương trình $x_{n+1} = 2x_n + 2.2^n$, ta được

$$A.(n+1)2^n = 2An.2^n + 2.2^n \Leftrightarrow A = \frac{3}{2}.$$

Suy ra

$$x_n^{**} = \frac{3}{2}n.2^n = 3n.2^{n-1}.$$

Do đó $x_n = c.2^n + (-n^2 - 2n - 3) + 3n.2^{n-1}$. Ta có $x_1 = 1$, nên $1 = 2c - 2 + 3 \Rightarrow c = 0$. Vậy

$$x_n = 3n.2^n - n^2 - 2n - 3.$$

Bài toán 1.20. *Tìm dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn điều kiện*

$$x_1 = 1,\ \ x_{n+1} = 3x_n + 2^n,\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Phương trình đặc trưng $\lambda - 3 = 0$ có nghiệm $\lambda = 3$. Ta có $x_n = x_n' + x_n^*$, trong đó $x_n' = c.3^n$ và $x_n^* = A.2^n$.

Thay $x_n^* = A.2^n$ vào trong phương trình, ta thu được

$$A.2^{n+1} = 3A.2^n + 2^n \Leftrightarrow 2A = 3A + 1 \Leftrightarrow A = -1.$$

Suy ra $x_n = -2^n$. Do đó $x_n = c.3^n - 2n$. Vì $x_1 = 1$ nên $c = 1$. Vậy $x_n = 3^n - 2^n$.

Bài toán 1.21. *Tìm số hạng tổng quát của x_n thoả mãn điều kiện*

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = 0,\ \ x_{n+1} - x_n + x_{n-1} = 0,\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ có các nghiệm phức

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có

$$r = |\lambda| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1,\ \ \tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3},\ \ \varphi \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Vậy

$$\lambda = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

Suy ra

$$x_n = A\cos\frac{n\pi}{3} + \sin\frac{n\pi}{3}$$

Ta có

$$x_1 = 1 \Rightarrow A\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} = 1 \Rightarrow A + B\sqrt{3} = 2$$
$$x_2 = 0 \Rightarrow A\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = 1 \Rightarrow -A + B\sqrt{3} = 0$$

Suy ra

$$A = 1, B = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $x_n = \cos\dfrac{n\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{n\pi}{3}$

Bài toán 1.22. *Tìm x_n thoả mãn điều kiện*

$$x_1 = 2,\ \ x_{n+1} = x_n + 3n^2 + 3n - 3,\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Phương trình đặc trưng có nghiệm $\lambda = 1$. Ta có $x_n = x'_n + x^*_n$, trong đó

$$x'_n = c.1^n = c,\ \ x^*_n = n(An^2 + Bn + C).$$

Thay x^*_n vào trong phương trình ta được

$$(n+1)[A(n+1)^2 + B(n+1) + C] = n(An^2 + Bn + C) + 3n^2 + 3n - 3.$$

Thực hiện khai triển và đồng nhất các hệ số ta tìm được $A = 1, B = 0, C = -4$. Ta có $x_n = x'_n + x^*_n = c + n^3 - 4n$. Vì $x_1 = -2$ nên $-2 = c + 1 - 4 \Leftrightarrow c = 1$.
Vậy $x_n = n^3 - 4n + 1$.

Bài toán 1.23. *Tìm x_n thoả mãn điều kiện*

$$x_1 = 2,\ \ x_{n+1} = x_n + 2n,\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Phương trình đặc trưng có nghiệm $\lambda = 1$. Ta có $x_n = x'_n + x^*_n$, trong đó

$$x'_n = c.1^n = c,\ \ x^*_n = n(an + b).$$

Thay x^*_n vào trong phương trình ta được

$$(n+1)[a(n+1) + b] = n(an + b) + 2n.$$

Với $n = 1$ ta được $3a + b = 2$. Với $n = 2$, ta được $5a + b = 4$. suy ra $a = 1, b = -1$. Do đó $x_n = n(n-1)$.

Ta có $x_n = x'_n + x^*_n = c + n(n-1)$. Vì $x_1 = 2$ nên $2 = c + 1(1-1) \Leftrightarrow c = 2$. Vậy $x_n = n^2 - n + 2$.

Bài toán 1.24. *Cho dãy số $\{y_n\}$ xác định bởi các điều kiện :*

i. $y_2 = y_3 = 1$,

ii. $(n+1)(n-2)y_{n+1} = n(n^2 - n - 1)y_n - (n-1)^3 y_{n-1}$.

Tìm số hạng tổng quát của dãy $\{y_n\}$, từ đó tìm tất cả các giá trị của n để y_n là các số nguyên.

Giải. Đặt $x_n = ny_n, n \geqslant 2$. Thế x_n vào phương trình ta được

$$(n-2)x_{n+1} = (n^2 - n - 1)x_n - (n-1)^2 x_{n-1},\ n \geqslant 3.$$

Suy ra

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{n-1} = (n-1)\frac{x_n - x_{n-1}}{n-1}.$$

Đặt

$$z_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{n-1}.$$

Suy ra $z_n = (n-1)z_{n-1}$. Bằng quy nạp ta chứng minh được rằng $z_n = (n-1)!$. Như vậy

$$x_n + 1 - x_n = (n-1).(n_1)! = n! - (n-1)!$$

Ta có

$$x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_3 - x_2) + x_2 = (n-1)! + 1.$$

Do đó

$$y_n = \frac{x_n}{n} = \frac{(n-1)! + 1}{n}.$$

Vậy y_n là số nguyên khi và chỉ khi $n = 1$ hoặc n là số nguyên tố.

Bài toán 1.25. *Cho hàm số $f(x) = e^x$. chứng minh rằng nếu dãy số $\{u_n\}$ lập thành một cấp số cộng thì dãy số $(f(x_n))$ lập thành một cấp số nhân.*

Giải. Giả sử dãy số (x_n) lập thành một cấp số cộng với công sai d. Khi đó ta có $x_n - x_{n-1} = d$. Khi đó

$$\frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})} = \frac{e^{x_n}}{e^{x_{n-1}}}. = e^{x_n - x_{n-1}} = e^d = q.$$

Vậy dãy số (f(x_n)) lập thành một cấp số nhân.

Bài toán 1.26. *Cho hàm số* $f(x) = \ln x,\ \ x > 0$. *chứng minh rằng nếu dãy số* (x_n) *lập thành một cấp số nhân và* $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ *thì dãy số* $(f(x_n))$ *lập thành một cấp số cộng.*

Giải. Giả sử dãy số (x_n) và $x_n{>}0, \forall n \in \mathbb{N}$ lập thành một cấp số nhân với công bội $q > 0$. Khi đó, ta có

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = \ln x_n - \ln x_{n-1} = \ln \frac{x_n}{x_{n-1}} = \ln q, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số (f(x_n)) lập thành một cấp số cộng.

Nhận xét 1.9. . *Ta có hàm số* $y = a^x,\ \ a > 0,\ 0 < a \neq 1$, *là hàm số chuyển đổi phép toán cộng thành phép toán nhân trong tập số thực, và hàm số* $y = \log_a x$ *với* $0 < a \neq 1$ *là hàm số chuyển đổi phép toán nhân thành phép toán cộng trong tập số thực. Ta có bài toán tổng quát sau.*

Bài toán 1.27. *(i) Nếu dãy số* (u_n) *lập thành một cấp số cộng thì dãy số* v_n *lập thành một cấp số nhân, trong đó* $v_n = a^{u_n}$, $0 < a \neq 1$.
(ii) Nếu dãy số (u_n) $(u_n > 0,\ \ \forall n \in \mathbb{N})$ *lập thành một cấp số nhân thì dãy số* v_n *lập thành một cấp số cộng, trong đó* $v_n = \log_a u_n$, $0 < a \neq 1$.

Giải.

(i). Giả sử dãy số (u_n) lập thành một cấp số cộng với công sai d. Khi đó ta có $u_n - u_{n-1} = d$. Suy ra

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{a^{u_n}}{a^{u_{n-1}}} = a^{u_n - u_{n-1}} = a^d.$$

Vậy dãy số v_n lập thành một cấp số nhân, trong đó $v_n = a^{u_n},\ \ 0 < a \neq 1$.

(ii) Giả sử dãy số (u_n) $(u_n > 0,\ \ \forall n \in \mathbb{N})$ lập thành một cấp số nhân với công bội $q > 0$. Khi đó ta có $\dfrac{v_n}{v_{n-1}} = q$. Khi đó

$$v_n - v_{n-1} = \log_a u_n - \log_a u_{n-1} = \log_a \left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) = \log_a q.$$

Vậy dãy số v_n lập thành một cấp số cộng.

Bài toán 1.28. *Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để dãy số* $\{u_n\}$ *lập thành một cấp số cộng là dãy đã cho phải thỏa mãn hệ thức*

$$2a_{m+n} = a_{2m} + a_{2n}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Giải. *Điều kiện cần.* Giả sử dãy a_n là một cấp số cộng với công sai là d. Khi đó ta có

$$a_n = a_0 + (n-1)d,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do vậy

$$a_{2m} + a_{2n} = 2a_0 + (2m + 2n - 2)d$$

$$\Leftrightarrow a_{2m} + a_{2n} = 2[a_0 + (m + n - 1)d].$$

Mà ta lại có

$$2a_{m+n} = 2[a_0 + (m + n - 1)d].$$

Do vậy

$$a_{m+n} = a_{2m} + a_{2n}.$$

Điều kiện đủ. Giả sử dãy số (u_n)thỏa mãn hệ thức $2a_{m+n} = a_{2m} + a_{2n}, \forall m, n \in \mathbb{N}$. Ta cần chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng.

Vì biểu thức đúng với mọi m, n nên chọn $m = 0$, ta có hệ thức $2a_n = a_0 + a_{2n}$. Suy ra

$$a_{2n} = 2a_n - a_0.$$

Theo giả thiết ta có $2a_{m+n} = a_{2m} + a_{2n}$. Suy ra $2a_{m+n} = 2a_m + 2a_n - 2a_0$.

Do đó $a_{m+n} = a_m + a_n - a_0$. Chọn $m = 1$, ta có

$$a_{n+1} = a_n + a_1 - a_0 \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = a_1 - a_0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vậy dãy số (u_n) là một cấp số cộng.

Bài toán 1.29. *Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để dãy các số dương $\{u_n\}$ lập thành một cấp số nhân là dãy đã cho phải thỏa mãn hệ thức*

$${u^2}_{m+n} = u_{2m}u_{2n}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Giải. Đặt $\ln u_n = v_n, \forall m, n \in \mathbb{N}$. Khi đó $u_n = e^{v_n}$. Từ đẳng thức

$${u^2}_{m+n} = u_{2m}u_{2n}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra

$$e^{2v_{m+n}} = e^{v_{2m}}e^{v_{2n}} = e^{v_{2m}+v_{2n}},\ \forall m, n \in \mathbb{N},$$

hay

$$2v_{m+n} = v_{2m} + v_{2n}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra $\{v_n\}$ lập thành một cấp số cộng với công sai $d = v_1 - v_0$. Do đó dãy $\{u_n\}$ lập thành một cấp số nhân với công bội $q = e^d$.

Bài toán 1.30. *Cho một dãy số nguyên dương được đánh theo thứ tự từ* 1 *đến* 2000*. Ta tạo ra một tam giác bằng cách như sau kể từ hàng thứ* $k \geqslant 2$ *mỗi phần tử trong tam giác bằng tổng của hai phần tử trên nó. Tìm số đứng ở đỉnh của tam giác.*

$$\begin{array}{lllll} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & \\ 8 & 12 & 16 & & \\ 20 & 28 & & & \\ 48 & & & & \end{array}$$

Giải. Gọi p là số số nguyên dương được viết trên dòng đầu tiên. Gọi a_n là số hạng đầu tiên của dòng thứ n. Bằng quy nạp ta chứng minh được rằng các số hạng ở dòng thứ n là

$$a_n, a_n + 2^{n-1}, a_n + 2.2^{n-1}, \ldots, a_n + (p-n)2^{n-1}.$$

Suy ra $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n-1}$. Vì $a_1 = 1$ nên $a_n = (n+1)2^{n-2}$. Vậy

$$a_{2000} = 2001.2^{1998}.$$

Bài toán 1.31. *Cho* $\{x_n\}, x_1 = a > 0$ *là một cấp số cộng công sai* $d > 0$ *được viết trên một dòng theo thứ tự từ bé đến lớn. Ta tạo ra một tam giác bằng cách như sau kể từ hàng thứ* $k \geqslant 2$ *mỗi phần tử trong tam giác bằng tổng của hai phần tử trên nó. Tìm số đứng ở đỉnh của tam giác.*

$$\begin{array}{lllll} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 + x_2 & x_2 + x_3 & x_3 + x_4 & x_4 + x_5 & \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & x_2 + 2x_3 + x_4 & x_3 + 2x_4 + x_5 & & \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 & x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 & & & \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 & & & & \end{array}$$

Giải. Gọi p là số phần tử của dãy được sắp xếp theo thứ tự của chỉ số tăng dần được viết trên dòng đầu tiên. Bằng quy nạp ta chứng minh được rằng các số hạng ở dòng thứ $k \geqslant 2$ là

$$2^{k-1}x_1 + (k-1).2^{k-2}.d, 2^{k-1}x_2 + (k-1).2^{k-2}.d, \ldots$$

Suy ra phần tử đứng ở đỉnh của tam giác có giá trị bằng

$$2^{p-1}x_1 + (p-1).2^{p-2}.d.$$

Vậy phần tử đứng ở đỉnh của tam giác có giá trị bằng $2^{p-1}a + (p-1).2^{p-2}.d$

Bài toán 1.32. *Cho $\{x_n\}$, $x_1 = a > 0$ là một cấp số nhân công bội q được viết trên một dòng theo thứ tự từ bé đến lớn. Ta tạo ra một tam giác bằng cách như sau: kể từ hàng thứ k ($\geqslant 2$), mỗi phần tử trong tam giác bằng tổng của hai phần tử trên nó. Tìm số đứng ở đỉnh của tam giác.*

$$\begin{array}{l}
x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \\
x_1 + x_2 \quad x_2 + x_3 \quad x_3 + x_4 \quad x_4 + x_5 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 \quad x_2 + 2x_3 + x_4 \quad x_3 + 2x_4 + x_5 \\
x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 \quad x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 \\
x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5
\end{array}$$

Giải. Gọi p là số phần tử của dãy được sắp xếp theo thứ tự của chỉ số tăng dần được viết trên dòng đầu tiên. Bằng quy nạp ta chứng minh được rằng các số hạng ở dòng thứ $k \geqslant 2$ là

$$x_1(1+q)^{k-1}, x_2(1+q)^{k-1}, x_3(1+q)^{k-1}, x_4(1+q)^{k-1}, \ldots$$

Suy ra phần tử đứng ở đỉnh của tam giác có giá trị bằng

$$x_1(1+q)^{k-1}.$$

Vậy phần tử đứng ở đỉnh của tam giác có giá trị bằng $a(1+q)^{p-1}$.

Nhận xét 1.10. . *Trong các lớp hàm chuyển từ dãy cấp số cộng sang cấp số nhân, và ngược lại, chuyển từ cấp số nhân sang cấp số cộng ta xác định được hai hàm $y = a^x$ và hàm $y = \log_a x$ như vậy ngoài hai hàm mũ và hàm logarit chuyển đổi từ cấp số cộng sang cấp số nhân và ngược lại, thì còn tồn tại lớp hàm nào có thể chuyển hoá giữa hai cấp số này hay không?*

Câu hỏi tương tự được đặt ra đối với cấp số cộng và cấp số điều hoà, cấp số nhân với cấp số điều hoà.

Tiếp theo, ta xét một số tính chất của dãy Fibonacci.

Bài toán 1.33. *Một cặp thỏ mỗi tháng sinh một lần, cho một cặp thỏ con (một đực, một cái). Cặp thỏ mới sinh ra sau hai tháng lại bắt đầu sinh một cặp mới. Hỏi sau một năm sẽ có bao nhiêu con thỏ, nếu đầu năm ta có một cặp thỏ và trong một năm không có con thỏ nào bị chết.*

Giải. Kí hiệu $F(n)$ là cặp thỏ sau tháng thứ n kể từ đầu năm. Nhận xét rằng sau tháng thứ n thì sẽ có $F(n)$ cặp ban đầu , cộng thêm số cặp do các cặp đã có sau tháng thứ $(n-1)$ sinh ra (có $F(n-1)$). Như vậy

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Trong đó $F_1 = 1, F_2 = 1$. Các số F(n) được gọi là các số Fibonacci. Trong các bài toán sau đây, $F(n)$ dùng để kí hiệu số Fibonacci thứ n.

Bài toán 1.34. *Chứng minh rằng*

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&F_1 = F_3 - F_2\\
&F_2 = F_4 - F_3\\
&\ldots\\
&F_{n-1} = F_{n+1} - F_n\\
&F_n = F_{n+2} - F_{n+1}
\end{aligned}$$

Thực hiện cộng từng vế của các đẳng thức trên, ta thu được:

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

Bài toán 1.35. *Chứng minh rằng*

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&F_1 = F_2\\
&F_3 = F_4 - F_2\\
&F_5 = F_6 - F_4\\
&\ldots\\
&F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}
\end{aligned}$$

Thực hiện cộng từng vế của các đẳng thức trên, ta thu được:

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

Bài toán 1.36. *Chứng minh rằng*

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

Giải. Theo các bài toán 1.34 và bài toán 1.35 ta có

$$\begin{aligned} &F_1 + F_2 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+2} - F_2 = F_{2n+2} - 1 \\ &F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} \end{aligned}$$

Thực hiện trừ theo vế các đẳng thức trên, ta thu được:

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+2} - 1 - F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

Bài toán 1.37. *Chứng minh rằng*

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + (-1)^{n+1} F_n = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1.$$

Giải. Khi $n = 2k$, từ bài toán 1.35 và bài toán 1.36 ta suy ra

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + (-1)^{2k+1} F_{2k} = (-1)^{2k+1} F_{2k-1} + 1 = -F_{2k-1} + 1$$

Tương tự, khi $n = 2k + 1$ ta có

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + (-1)^{2k+2} F_{2k+1} = (-1)^{2k+2} F_{2k-1} + 1 = F_{2k} + 1$$

Vậy

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + (-1)^{n+1} F_n = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1.$$

Bài toán 1.38. *Chứng minh rằng*

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

Giải. Từ $F_k^2 = F_k(F_{k+1} - F_{k-1}) = F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k$, suy ra

$$\begin{aligned} &F_1^2 = F_1.F_2 \\ &F_2^2 = F_2.F_3 - F_1.F_2 \\ &\cdots \\ &F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n \end{aligned}$$

Lần lượt cộng theo vế các đẳng thức trên, ta được

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

Chương 2

Hàm chuyển đổi một số dãy số đặc biệt

Trước hết, ta nhắc lại một số đặc trưng hàm của hàm số sơ cấp:

1. Hàm bậc nhất.$f(x) = ax + b$ (với $a \neq 0, b \neq 0$) có tính chất

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2},\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Hàm tuyến tính. $f(x) = ax$ (với $a \neq 0$) có tính chất

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Hàm mũ. $f(x) = a^x$ (với $0 < a \neq 1$) có tính chất

$$f(x+y) = f(x).f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

4. Hàm logarit.$f(x) = \log_a |x|, (0 < a \neq 1)$ có tính chất

$$f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

5. Hàm bậc hai.$f(x) = ax^2$ (với $a \neq 0$) có tính chất

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

6. Hàm luỹ thừa. $f(x) = |x|^\alpha$ có tính chất

$$f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

2.1 Hàm chuyển tiếp các cấp số

2.1.1 Hàm bảo toàn các cấp số

Bài toán 2.1. *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:*
$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2},\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
Chứng minh rằng hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số cộng thành cấp số cộng, tức là nếu $\{u_n\}$ là một cấp số cộng thì $w_n = f(u_n)$ lập thành một cấp số cộng.

Giải. Giả sử $\{u_n\}$ là một cấp số cộng. Ta có
$$u_m = \frac{u_{m+1}+u_{m-1}}{2}, \forall m \in \mathbb{N}^*.$$
Đặt $w_m = f(u_m),\ \forall m \in \mathbb{N}^*$. Suy ra
$$\begin{aligned} w_m = f(u_m) &= f\Big(\frac{u_{m+1}+u_{m-1}}{2}\Big)\\ &= \frac{f(u_{m+1})+f(u_{m-1})}{2}\\ &= \frac{w_{m+1}+w_{m-1}}{2} \end{aligned}$$

Do đó $w_n = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ lập thành một cấp số cộng.
Vậy hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số cộng thành cấp số cộng.

Bài toán 2.2. *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện:*
$$f(\sqrt{xy}) = \sqrt{f(x)f(y)}.$$
Chứng minh rằng hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số nhân thành cấp số nhân.

Giải. Giả sử $\{u_n\}$ là một cấp số nhân dương với công bội $q > 0$. Ta có
$$u_m = \sqrt{u_m^2} = \sqrt{u_{m-1}u_{m+1}}, \forall m \in \mathbb{N}^*.$$
Đặt $w_m = f(u_m),\ \forall m \in \mathbb{N}^*$. Suy ra
$$\begin{aligned} w_m = f(u_m) &= f(\sqrt{u_{m-1}u_{m+1}}), \forall m, n \in \mathbb{N}^*\\ &= \sqrt{f(u_{m+1})f(u_{m-1})}\\ &= \sqrt{w_{m+1}w_{m-1}}. \end{aligned}$$
Do đó w_m là một cấp số nhân, với mọi $m \in \mathbb{N}^*$.
Vậy hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số nhân thành cấp số nhân.

Bài toán 2.3. *Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên tập $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f\left(\frac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}\right)=\frac{2}{\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{f(y)}}.$$

Chứng minh rằng hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số điều hoà thành cấp số điều hoà.

Giải. Giả sử $\{u_m\}$ là một cấp số điều hoà. Ta có

$$u_m=\frac{2}{\dfrac{1}{u_{m-1}}+\dfrac{1}{u_{m+1}}},\forall m\in\mathbb{N}^*$$

Đặt $w_m=f(u_m)$, $\forall m\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra

$$\begin{aligned}w_m=f(u_m)&=f\left(\frac{2}{\dfrac{1}{u_{m-1}}+\dfrac{1}{u_{m+1}}}\right)\\&=\frac{2}{\dfrac{1}{f(u_{m-1})}+\dfrac{1}{f(u_{m+1})}}=\frac{2}{\dfrac{1}{w_{m-1}}+\dfrac{1}{w_{m+1}}}.\end{aligned}$$

Do đó w_m là một cấp số điều hoà, với mọi $m\in\mathbb{N}^*$.

Vậy hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số điều hoà thành cấp số điều hoà.

2.1.2 Hàm chuyển đổi các cấp số

Bài toán 2.4. *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)=\sqrt{f(x)f(y)},\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số cộng thành cấp số nhân.

Giải. Giả sử $\{u_n\}$ là một cấp số cộng. Ta có

$$u_m=\frac{u_{m+1}+u_{m-1}}{2},\ \forall m\in\mathbb{N}^*.$$

Đặt $w_m=f(u_m)$, $\forall m\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra

$$\begin{aligned}w_m=f(u_m)&=f\Big(\frac{u_{m+1}+u_{m-1}}{2}\Big)\\&=\sqrt{f(u_{m+1})f(u_{m-1})}=\sqrt{w_{m+1}w_{m-1}}.\end{aligned}$$

Do đó $w_n = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ lập thành một cấp số nhân.
Vậy hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số cộng thành cấp số nhân.

Bài toán 2.5. *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}, \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0, f(y) \neq 0, f(x)+f(y) \neq 0.$$

Chứng minh rằng hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số cộng thành cấp số điều hoà.

Giải. Giả sử $\{u_n\}$ là một cấp số cộng. Ta có

$$u_m = \frac{u_{m+1}+u_{m-1}}{2}, \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $w_m = f(u_m),\ \forall m \in \mathbb{N}^*$. Suy ra

$$\begin{aligned} w_m = f(u_m) &= f\Big(\frac{u_{m+1}+u_{m-1}}{2}\Big) \\ &= \frac{2f(u_{m+1})f(u_{m-1})}{f(u_{m+1})+f(u_{m-1}} = \frac{2w_{m+1}w_{m-1}}{w_{m+1}+w_{m-1}}. \end{aligned}$$

Do đó w_m là một cấp số điều hòa.
Vậy hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số cộng thành cấp số điều hoà.

Bài toán 2.6. *Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)},\ \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Chứng minh rằng hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số nhân thành cấp số điều hoà.

Giải. Giả sử $\{u_n\}$ là một cấp số nhân dương với công bội $q > 0$. Ta có

$$u_m = \sqrt{u_m^2} = \sqrt{u_{m-1}u_{m+1}}, \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $w_m = f(u_m),\ \forall m \in \mathbb{N}^*$. Suy ra:

$$\begin{aligned} w_m = f(u_m) &= f(\sqrt{u_{m-1}u_{m+1}}) \\ &= \frac{2f(u_{m-1})f(u_{m+1})}{f(u_{m-1})+f(u_{m+1})} = \frac{2w_{m-1}w_{m+1}}{w_{m-1}+w_{m+1}}. \end{aligned}$$

Do đó w_m là một cấp số điều hoà, với mọi $m \in \mathbb{N}^*$.
Vậy hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số nhân thành cấp số điều hoà.

Bài toán 2.7. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{f(x)+f(y)}{2},\ \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Chứng minh rằng hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số nhân thành cấp số cộng.

Giải. Giả sử $\{u_n\}$ là một cấp số nhân dương với công bội $q > 0$. Ta có

$$u_m = \sqrt{u_m^2} = \sqrt{u_{m-1}u_{m+1}}, \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $w_m = f(u_m),\ \forall m \in \mathbb{N}^*$. Suy ra:

$$\begin{aligned} w_m &= f(u_m) = f(\sqrt{u_{m-1}u_{m+1}}) \\ &= \frac{f(u_{m-1}) + f(u_{m+1})}{2} = \frac{w_{m-1} + w_{m+1}}{2}. \end{aligned}$$

Do đó w_m là một cấp số cộng, với mọi $m \in \mathbb{N}^*$.
Vậy hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số nhân thành cấp số cộng.

Bài toán 2.8. *Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên tập $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f\Big(\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Chứng minh rằng hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số điều hoà thành cấp số cộng.

Giải. Giả sử $\{u_m\}$ là một cấp số điều hoà. Ta có

$$u_m = \frac{2}{\dfrac{1}{u_{m-1}} + \dfrac{1}{u_{m+1}}}, \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $w_m = f(u_m),\ \forall m \in \mathbb{N}^*$.
Suy ra

$$\begin{aligned} w_m = f(u_m) = f&\left(\frac{2}{\dfrac{1}{u_{m-1}} + \dfrac{1}{u_{m+1}}}\right) \\ &= \frac{f(u_{m-1}) + f(u_{m+1})}{2} \\ &= \frac{w_{m-1} + w_{m+1}}{2} \end{aligned}$$

Do đó w_m là một cấp số cộng, với mọi $m \in \mathbb{N}^*$.

Vậy hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số điều hoà thành cấp số cộng.

Bài toán 2.9. *Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên tập $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f\left(\frac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}\right)=\sqrt{f(x)f(y)}$$

Chứng minh rằng hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số điều hoà thành cấp số nhân.

Giải. Giả sử $\{u_m\}$ là một cấp số điều hoà. Ta có

$$u_m=\frac{2}{\dfrac{1}{u_{m-1}}+\dfrac{1}{u_{m+1}}},\forall m\in\mathbb{N}^*$$

Đặt $w_m=f(u_m)$, $\forall m\in\mathbb{N}^*$.
Suy ra

$$\begin{aligned} w_m=f(u_m)&=f\left(\frac{2}{\dfrac{1}{u_{m-1}}+\dfrac{1}{u_{m+1}}}\right)\\ &=\sqrt{f(u_{m-1}).f(u_{m+1})}\\ &=\sqrt{w_{m-1}w_{m+1}} \end{aligned}$$

Do đó w_m là một cấp số nhân, với mọi $m\in\mathbb{N}^*$.
Vậy hàm số $f(x)$ chuyển đổi mọi cấp số điều hoà thành cấp số nhân.

2.2 Dãy sinh bởi một số hàm số sơ cấp

2.2.1 Dãy sinh bởi nhị thức bậc nhất

Bài toán 2.10. *Cho $x_1=a$. Tìm dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi*

$$x_{n+1}=a_nx_n+b_n,$$

trong đó $a_n\neq 0$ với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Giải. Đặt

$$x_n=y_n\prod_{k=1}^{n-1}a_k. \tag{2.1}$$

Khi đó ta có $y_1 = \dfrac{a}{a_0}$ và

$$y_{n+1} - y_n = \frac{b_n}{\prod\limits_{k=0}^{n} a_k}. \tag{2.2}$$

Từ đẳng thức (2.2), ta có

$$y_n = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{\prod\limits_{i=0}^{k} a_i} = \frac{a}{a_0} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{\prod\limits_{i=0}^{k} a_i}.$$

Vậy, ta có

$$x_n = \Big(\frac{a}{a_0} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{\prod\limits_{i=0}^{k} a_i}\Big) \prod_{k=0}^{n-1} a_k.$$

Bài toán 2.11. *Cho $x_0 = a$ và dãy $\{b_n\}$ xác định bởi $b_k = e^k.(e-1)$, $k \in \mathbb{N}$. Tìm dãy số $\{x_n\}$ biết rằng*

$$x_{n+1} = (-1)^n x_n + b_n, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Giải. Đặt $x_n = (-1)^{n-1} y_n$. Từ đẳng thức $x_{n+1} = (-1)^n x_n + b_n$, ta có

$$x_{n+1} - (-1)^n x_n = b_n \Leftrightarrow y_{n+1} - y_n = (-1)^{-n} b_n.$$

Suy ra $y_n = y_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \Big(-1\Big)^k b_k$. Vậy ta có

$$x_n = \Big(a + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k b_k\Big)(-1)^{k-1}$$

2.2.2 Dãy sinh bởi tam thức bậc hai

Bài toán 2.12. *Cho $g(n) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, và $x_1 = \alpha > 0$. Xác định dãy số $\{x_n\}$, biết rằng*

$$x_{n+1} = g(n) x_n^k, \;\; n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Từ công thức $x_{n+1} = g(n)x_n^k$, suy ra $x_n > 0$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Lấy loga cơ số tự nhiên hai vế, ta có

$$\ln x_{n+1} = \ln g(n) + k \ln x_n$$

Đặt $y_n = \ln x_n$, ta có

$$y_{n+1} = k y_n + \ln g(n).$$

Đặt $y_n = k^{n-1}u_n$, từ công thức trên suy ra

$$k^n u_n = k^n u_{n-1} + \ln g(n) \Leftrightarrow u_n = u_{n-1} + \frac{\ln g(n)}{k^n}.$$

Do vậy

$$u_n = u_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln g(i)}{k^i} = \ln\alpha + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln g(i)}{k^i}.$$

Suy ra

$$y_n = k^{n-1}\Big(\ln\alpha + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln g(i)}{k^i}\Big)$$

và

$$x_n = e^{k^{n-1}\Big(\ln\alpha + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{\ln g(i)}{k^i}\Big)}.$$

Bài toán 2.13. *Cho $x_1 = \alpha > 0$. Tìm dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi*

$$x_{n+1} = ax_n^2,$$

trong đó $a \neq 0$.

Giải. Đặt $y_n = ax_n$. Theo giả thiết

$$x_{n+1} = ax_n^2.$$

Suy ra

$$\frac{y_{n+1}}{a} = a\frac{y_n^2}{a^2} \Leftrightarrow y_{n+1} = y_n^2.$$

Do đó $y_n = y_1^{2^{n-1}}$, suy ra $x_n = \frac{1}{a}.(ax_1)^{2^{n-1}}$
Vậy $x_n = a^{2^{n-1}-1}(\alpha)^{2^{n-1}}$.

Bài toán 2.14. *Cho $x_1 = \alpha > 0$. Tìm dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi*

$$x_{n+1} = a_n x_n^2, \ \ n \geqslant 2,$$

trong đó a_n là cấp số nhân với công bội $q \neq 0$, $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Giải. Ta lập dãy $\{y_n\}$

$$y_n = a_n x_n.$$

Theo giả thiết, ta có

$$x_{n+1} = a_n x_n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} y_{n+1} = \frac{1}{a_n}(y_n)^2.$$

Suy ra
$$y_{n+1} = qy_n^2.$$
Do đó
$$y_{n+1} = q^{2^n-1}.y_1^{2^{n-1}}.$$
Vậy nên
$$x_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}.y_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}q^{2^n-1}.y_1^{2^{n-1}}$$
$$= \frac{a_1^{2^{n-1}}}{a_{n+1}}q^{2^n-1}.x_1^{2^{n-1}} = \frac{a_1^{2^{n-1}}}{a_{n+1}}q^{2^n-1}.\alpha^{2^{n-1}}.$$

2.2.3 Dãy sinh bởi hàm phân tuyến tính

Xét hàm số
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},\ \ ad-bc \neq 0.$$

Bài toán 2.15. *Cho α, β là các số thực dương. $x_1 = a > -\dfrac{\beta}{\alpha}$. Xác định dãy số $\{x_n\}$ biết*
$$x_{n+1} = \frac{1}{\alpha x_n + \beta} - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Giải. Từ công thức $x_{n+1} = \frac{1}{\alpha x_n+\beta} - \dfrac{\beta}{\alpha}$, suy ra $x_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và
$$\alpha x_{n+1} = \frac{\alpha}{\alpha x_n + \beta} - \beta \Leftrightarrow \alpha x_{n+1} + \beta = \frac{\alpha}{\alpha x_n + \beta}.$$
Đặt $y_n = \alpha x_n + \beta$, từ công thức trên suy ra
$$y_{n+1} = \alpha y_n.$$
Vậy nên
$$y_n = \alpha^{n-1} y_1$$
và
$$x_n = \frac{\alpha^n a + \alpha^{n-1}\beta - \beta}{\alpha}.$$

Bài toán 2.16. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau*
$$x_1 = \frac{2}{3},\ \ x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1},\ n \in \mathbb{N}.$$
Tính tổng
$$S = \sum_{i=1}^{2008} x_i.$$

Giải. Theo công thức xác định dãy, suy ra $x_n > 0$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$. Đặt $y_n = \dfrac{2}{x_n}$. Từ công thức truy hồi

$$x_1 = \frac{2}{3}, \ \ x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}, n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra

$$y_1 = 3, \ \ y_{n+1} = y_n + 4(2n+1), \ \ n = 1, 2, \ldots$$

Do đó $y_1 = 3$ và $y_n = (2n+1)(2n-1)$. Như vậy

$$x_n = \frac{2}{y_n} = \frac{2}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}.$$

Vậy nên

$$\begin{aligned} S = \sum_{i=1}^{2008} x_i &= \sum_{i=1}^{2008} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{4017} = \frac{4016}{4017}. \end{aligned}$$

Bài toán 2.17. *Cho $x_1 = a > -\dfrac{3}{2}$. Xác định dãy số $\{x_n\}$ biết rằng*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2x_n + 3} - \frac{3}{2}.$$

Giải. Từ công thức $x_{n+1} = \dfrac{1}{2x_n + 3} - \dfrac{3}{2}$, suy ra $x_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và

$$2x_{n+1} = \frac{2}{2x_n + 3} - 3 \Leftrightarrow 2x_{n+1} + 3 = \frac{2}{2x_n + 3}.$$

Đặt $y_n = 2x_n + 3$, từ công thức trên suy ra

$$y_{n+1} = 2y_n.$$

Vậy nên

$$y_n = 2^{n-1} y_1$$

và

$$x_n = \frac{2^n a + 2^{n-1} 3 - 3}{2}.$$

Bài toán 2.18. *Tìm $\{x_n\}$, biết rằng $x_1 = a > 0$ và*

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{4x_n + 3}.$$

Giải. Theo cách xác định dãy suy ra $x_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Đặt $\frac{1}{x_n} = y_n$. Từ công thức

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{4x_n + 3}.$$

Suy ra

$$y_{n+1} = 3y_n + 4.$$

Vậy nên

$$y_n = 3^{n-1}y_1 + 2(3^{n-1} - 1)$$

và

$$x_n = \frac{a}{(2a+1)3^{n-1} - 2a}.$$

Bài toán 2.19. *Cho α, β là các số dương.Tìm $\{x_n\}$, biết rằng $x_1 = a > 0$ và*

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{\alpha x_n + \beta}.$$

Giải. Theo cách xác định dãy, suy ra $x_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Đặt $\dfrac{1}{x_n} = y_n$. Từ công thức

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{\alpha x_n + \beta},$$

suy ra

$$y_{n+1} = \beta y_n + \alpha.$$

Vậy nên

$$y_n = \beta^{n-1}y_1 + \frac{\alpha(\beta^{n-1} - 1)}{2}$$

và

$$x_n = \frac{2a}{(a\alpha + 2)\beta^{n-1} - a\alpha}.$$

Bài toán 2.20. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau*

$$\begin{cases} x_0 = 1996 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{1 + x_n} > 0,\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng $[x_n] = 1996 - n$ với $0 \leqslant n \leqslant 999$, trong đó $[x_n]$để chỉ phần nguyên của x_n.

Giải. Ta có $x_n - x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2}{1+x_n} = \dfrac{x_n}{1+x_n} > 0$ Suy ra dãy $\{x_n\}$ là dãy số giảm.
Ta có

$$\begin{aligned}
x_n &= x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})\\
&= 1996 - \frac{x_0}{1+x_0} - \frac{x_1}{1+x_1} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\\
&= 1996 - n + \frac{1}{1+x_0} + \frac{1}{1+x_1} + \cdots + \frac{1}{1+x_{n-1}}\\
&\geqslant 1996 - n.
\end{aligned}$$

Mặt khác ta có dãy $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu giảm, nên

$$\begin{aligned}
x_n &= 1996 - n + \frac{1}{1+x_0} + \frac{1}{1+x_1} + \cdots + \frac{1}{1+x_{n-1}}\\
&\leqslant 1996 - n + \frac{n}{1+x_{n-1}}\\
&\leqslant 1996 - n + \frac{n}{1998-n}\\
&\leqslant 1996 - n + 1, (0 \leqslant n \leqslant 999).
\end{aligned}$$

Suy ra $1996 - n < x_n < 1996 - n + 1$.
Vậy nên $[x_n] = 1996 - n$.

Bài toán 2.21. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau*

$$\begin{cases} x_0 = K \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{1+x_n} > 0, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Chứng minh rằng $[x_n] = K - n$ với $0 \leqslant n \leqslant \left[\dfrac{K+2}{2}\right]$, trong đó $[x_n]$ để chỉ phần nguyên của x_n.

Giải. Ta có

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{1+x_n} = \frac{x_n}{1+x_n} > 0.$$

Suy ra dãy $\{x_n\}$ là dãy số giảm.
Ta có

$$\begin{aligned}
x_n &= x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})\\
&= K - \frac{x_0}{1+x_0} - \frac{x_1}{1+x_1} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\\
&= K - n + \frac{1}{1+x_0} + \frac{1}{1+x_1} + \cdots + \frac{1}{1+x_{n-1}}\\
&\geqslant K - n.
\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có dãy $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu giảm, nên

$$\begin{aligned} x_n &= K - n + \frac{1}{1+x_0} + \frac{1}{1+x_1} + \cdots + \frac{1}{1+x_{n-1}} \\ &\leqslant K - n + \frac{n}{1+x_{n-1}} \\ &\leqslant K - n + \frac{n}{K+2-n} \\ &\leqslant K - n + 1,\ 0 \leqslant n \leqslant \left[\frac{K+2}{2}\right]. \end{aligned}$$

Suy ra $K - n < x_n < K - n + 1$.

Vậy nên $[x_n] = K - n$.

Bài toán 2.22. *Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau:*

$$x_1 = x_2 = 1$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{x_{n-1}}, n = 2, 3, \ldots \tag{2.3}$$

Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy là số nguyên.

Nhận xét 2.1. *Theo công thức* (2.3) *ta có :*

$$x_{k+1}x_{k-1} = x_k^2 + 2, k = 2, 3, \ldots \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} &x_3 = 3 \\ &4x_2 - x_1 = 3 \\ &4x_2 - x_1 = x_3 \end{aligned}$$

Bằng quy nạp ta chứng minh rằng

$$4x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}, n = 2, 3, \ldots \tag{2.5}$$

Thật vậy, khi n = 2 theo công thức (2.5), ta có:

$$4x_2 - x_1 = x_3$$

Giả sử (2.3) đúng khi $n = k, k \geqslant 2, k \in \mathbb{N}$. Khi đó ta có

$$x_{k+1} = 4x_k - x_{k-1}$$

Ta cần chứng minh (2.3) đúng khi n = k + 1. Tức là ta cần chứng minh

$$x_{k+2} = 4x_{k+1} - x_k$$

Ta có

$$\begin{aligned}
x_{k+2} &= \frac{x_{k+1}^2 + 2}{x_k} \\
&= \frac{(4x_k - x_{k-1})^2 + 2}{x_k} \\
&= 4x_{k+1} - \frac{4x_k x_{k-1} - x_{k-1}^2 - 2}{x_k} \\
&= 4x_{k+1} - \frac{x_{k-1}(4x_k - x_{k-1} - 2)}{x_k} \\
&= 4x_{k+1} - \frac{x_{k-1}x_{k+1} - 2}{x_k} \\
&= 4x_{k+1} - x_k, (\text{ do } (2.4): \frac{x_{k-1}x_{k+1} - 2}{x_k} = x_k)
\end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có

$$x_{k+2} = 4x_{k+1} - x_k.$$

Mặt khác, ta có $x_1 = x_2 = 1$ là các số nguyên nên x_n nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài toán 2.23. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn*

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = \frac{px_n + q}{rx_n + s}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.6}$$

trong đó $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ là các số cho trước.

Giải. Giả sử u_n, v_n là nghiệm thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} u_{n+1} = pu_n + qv_n, u_0 = a \\ v_{n+1} = ru_n + sv_n, v_0 = 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

thì $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ là nghiệm của (2.6). Thật vậy, ta chứng minh bằng quy nạp như sau:

$$x_0 = \frac{u_0}{v_0} = a.$$

Giả sử $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ là nghiệm của (2.6). Khi đó

$$x_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{pu_n + qv_n}{ru_n + sv_n} = \frac{p\dfrac{u_n}{v_n} + q}{r\dfrac{u_n}{v_n} + s} = \frac{px_n + q}{rx_n + s}$$

cũng là nghiệm của (2.6).
Ta giải hệ (2.7). Trong (2.7) thay n bởi $n+1$, ta có

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= pu_{n+1} + qv_{n+1} \\
&= pu_{n+1} + q(ru_{n+1} + sv_{n+1} = pu_{n+1} + qru_n + s.qy_n \\
&= pu_{n+1} + qru_n + s(u_{n+1} - pu_n)
\end{aligned}$$

Suy ra

$$u_{n+2} - (p+s)u_{n+1} + (ps - qr)u_n = 0$$

Trong đó $u_1 = a, u_2 = pa + qb$. Như vậy ta được phương trình

$$u_1 = a, u_2 = pa + qb,\ \ u_{n+2} - (p+s)u_{n+1} + (ps - qr)u_n = 0, n \geqslant 2$$

Giải phương trình ta tìm được u_n, thế vào (2.7) ta tìm được v_n. Từ đó ta tìm được số hạng tổng quát của dãy $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$

2.2.4 Dãy sinh bởi hàm số lượng giác

Ta nhắc lại một số kết quả thường dùng:

$$\begin{aligned}
&\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \\
&\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sin\alpha, 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi, \\
&\sqrt{1 + \cot^2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}, 0 < \alpha < \pi \\
&\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \\
&\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \\
&\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}, \\
&\sin x < x < \tan x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \\
&1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \\
&1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.
\end{aligned}$$

Bài toán 2.24. *Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi*

$$x_0 = a$$
$$x_{n+1} = x_n + \sin x_n, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng với mọi số thực a dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Giải.

Trường hợp 1. Với $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó từ công thức xác định dãy suy ra $x_n = a$ với mọi n. Do đó dãy đã cho có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$, và

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Trường hợp 2. Với $a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Xét hàm số

$$f(x) = x + \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó dãy x_n được viết lại $x_0 = a$ và $x_{n+1} = f(x_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Ta có $f'(x) = 1 + \cos x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra f(x) đồng biến trên $\mathbb{R}$ và do đó dãy x_n là đơn điệu. Ta xét các khả năng sau

i. Nếu $a \in (2k\pi; (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ thì ssin $a > 0$ nên x_n là dãy đơn điệu tăng. Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n \in (2k\pi; (2k+1)\pi)$, $n \in \mathbb{N}$. Thật vậy với $n = 0$ thì $x_0 \in (2k\pi; (2k+1)\pi)$, (hiển nhiên). Giả sử mệnh đề đúng khi $n = m$, ta chứng minh mệnh đề đúng khi $n = m + 1$. Do hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$2k\pi = f(2k\pi) < f(x_m) = x_{m+1} < f((2k+1)\pi) = (2k+1)\pi$$

Theo nguyên lý quy nạp ta có $x_n \in (2k\pi; (2k+1)\pi)$, $n \in \mathbb{N}$. Do đó, x_n là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên nên dãy có giới hạn khi $n \to +\infty$.

ii. Nếu $a \in ((2k-1)\pi; 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, tương tự trường hợp i. bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n \in ((2k-1)\pi; 2k\pi)$, $n \in \mathbb{N}$, và là dãy đơn điệu giảm. Do đó dãy đã cho là đơn điệu giảm và bị chặn dưới nên dãy đã cho có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Bài toán 2.25. *Cho dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$x_0 = 1, x_{1000} = 0, x_{n+1} = 2x_1 x_n - x_{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tính tổng: $x_{1999} + x_1$.

Giải. Ta chứng minh $|x_1| < 1$ bằng phản chứng.
Giả sử $|x_1| \geqslant 1$. Ta có $|x_2| = |2x_1x_1 - x_0| = |2x_1^2 - 1| \geqslant |x_1|$. Bằng quy nạp ta chứng minh được rằng :

$$|x_{n+1}| = |2x_1x_n - x_{n+1}| \geqslant |2x_1x_n| - |x_{n-1}| \geqslant 2|x_n| - |x_{n-1}| \geqslant |x_n|, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Như vậy $|x_n| \geqslant |x_{n-1}| \geqslant \cdots \geqslant |x_0| = 1$.

Khi $n = 1000$, ta có $|a_{1000}| \geqslant 1$ vô lý.
Do đó $|x_1| < 1$. Đặt $x_1 = \cos\varphi$, khi đó ta có :

$$x_2 = 2x_1^2 - 1 = \cos 2\varphi.$$
$$x_3 = 2x_1x_2 - x_1 = 2\cos\varphi\cos 2\varphi - \cos\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi = \cos 3\varphi.$$
$$\dots$$
$$x_n = \cos n\varphi.$$

Theo giả thiết, ta có $\cos 1000\varphi = 0$, suy ra $1000\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Do đó khi $n = 1999$, ta có

$$x_{1999} = \cos 1999\varphi = \cos(2000\varphi - \varphi) = \cos(\pi + k2\pi - \varphi) = -\cos\varphi = -x_1.$$

Suy ra $x_{1999} + x_1 = 0$.
Vậy nên $x_{1999} + x_1 = 0$.

2.3 Một số bài toán áp dụng

Bài toán 2.26. *Cho $u, v, w \in \mathbb{Z}$ thoả mãn điều kiện $u^2 = v + 1$. Dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau*

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = ux_n + \sqrt{vx_n^2 + w^2}, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số trên đều là các số nguyên.

Giải. Từ giả thiết, ta có

$$x_{n+1} - ux_n = \sqrt{vx_n^2 + w^2} > 0.$$

Suy ra

$$(x_{n+1} - ux_n)^2 = vx_n^2 + w^2,$$

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 2ux_n.x_{n+1} + u^2.x_n^2 &= vx_n^2 + w^2 \\ \Leftrightarrow (u^2 - v)x_{n+1}^2 - 2ux_n.x_{n+1} + u^2.x_n^2 &= (u^2 - 1)x_n^2 + w^2 \\ \Leftrightarrow x_n^2 - 2ux_nx_{n+1} + u^2x_{n+1}^2 &= vx_{n+1}^2 + w^2. \end{aligned}$$

Theo giả thiết, ta có

$$vx_{n+1}^2 + w^2 = (x_{n+2} - ux_{n+1})^2.$$

Do vậy

$$x_n^2 - 2ux_nx_{n+1} + u^2x_{n+1}^2 = (x_{n+2} - ux_{n+1})^2.$$

Suy ra

$$x_{n+2} - ux_{n+1} = \left| x_n - ux_{n+1} \right|.$$

Ta có

$$\begin{aligned} &x_0 = 0, \\ &x_1 = ux_0 + \sqrt{vx_0^2 + w^2} = |w| \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vậy mọi số hạng của dãy là số nguyên.

Bài toán 2.27. *Cho dãy số $\{x_n\}$ dạng*

$$x_{n+1} = 2^n - 3x_n, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Xác định giá trị của x_0 sao cho dãy số $\{x_n\}$ là dãy tăng.

Giải. Theo cách xác định dãy số $\{x_n\}$, ta có

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2^n - 3x_n \\ &= 2^n - 3(2^{n-1} - 3x_{n-1}) \\ &= 2^n - 3.2^{n-1} - 3^2x_{n-1} \\ &\ldots\ldots \\ &= 2^n - 3.2^{n-1} - 3^2.2^{n-2} + \cdots + (-1)^k.3^k.2^{n-k} + \cdots + (-1)^{n+1}.3^{n+1}.x_0 \\ &= 2^n\Big(1 - \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \cdots + (-1)^k.\frac{3^k}{2^k} + \cdots + (-1)^n\frac{3^n}{2^n}\Big) + (-1)^{n+1}.3^{n+1}.x_0 \\ &= \frac{2^{n+1}\Big(1 - \dfrac{(-1)^{n+1}.3^{n+1}}{2^{n+1}}\Big)}{5} + (-1)^{n+1}.3^n.x_0 \\ &= \frac{2^{n+1}}{5} + \frac{(-1)^{n+2}.3^{n+1}}{5} + (-1)^{n+1}.3^{n+1}.x_0. \end{aligned}$$

Suy ra

$$
\begin{aligned}
d_{n+1} &= x_{n+1} - x_n \\
&= \frac{2^{n+1}}{5} + \frac{(-1)^{n+2}.3^{n+1}}{5} + (-1)^{n+1}.3^{n+1}.x_0 - \frac{2^n}{5} - \frac{(-1)^{n+1}.3^n}{5} - (-1)^n.3^n.x_0 \\
&= \frac{2^n}{5} + \frac{(-1)^{n+2}.4.3^n}{5} + (-1)^{n+1}4.3^n.x_0 \\
&= \frac{2^n}{5}\left[1 + 4.(-1)^{n+2}.\frac{3^n}{2^n}(1 - 5x_0)\right].
\end{aligned}
$$

Nếu $1 - 5u_0 > 0$ thì $d_{n+1} < 0$ khi n lẻ đủ lớn.

Nếu $1 - 5u_0 < 0$ thì $d_{n+1} < 0$ khi n chẵn đủ lớn.

Suy ra khi $1 - 5u_0 \neq 0$ thì dãy $\{x_n\}$ không phải là dãy tăng.

Khi $x_0 = \dfrac{1}{5}$ ta có $d_{n+1} = \dfrac{2^n}{5} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Do đó dãy số $\{x_n\}$ là dãy tăng.

Vậy $x_0 = \dfrac{1}{5}$.

Bài toán 2.28. *Cho dãy số $\{x_n\}$, n=1, 2,... xác định như sau:*

$$
\begin{cases}
x_1 = 1 \\
x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n^2}{1999}
\end{cases}
$$

Tìm

$$
\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n+1}}\Big).
$$

Giải. Ta có

$$
\begin{aligned}
\frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{x_k^2}{x_k.x_{k+1}} &= \frac{1999(x_{k+1} - x_k)}{x_k.x_{k+1}} \\
&= 1999.\Big(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}\Big)
\end{aligned}
$$

Lần lượt cho $k = 1, 2, \ldots, n$ trong đẳng thức trên và thực hiện cộng theo vế ta được

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n+1}} \\
&= 1999\Big(1 - \frac{1}{x_{k+1}}\Big).
\end{aligned}
$$

Mặt khác ta có

$$
x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{1999} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}.
$$

Do đó dãy $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu tăng. Giả sử dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên thì tồn tại giới hạn hữu hạn bằng a. Khi đó, ta có

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(x_n + \frac{x_n^2}{1999}\right),$$

hay $a = a + \dfrac{a^2}{1999} \Rightarrow a = 0$, (vô lý). Vậy dãy đã cho không bị chặn trên. Suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \infty$$

hay

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0.$$

Vậy nên

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1999.$$

Bài toán 2.29. *Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau:*

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 1999x_n}{2000}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Lập dãy $\{S_n\}$ xác định theo hệ thức:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1} - 1}.$$

Tính

$$\lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Giải. Từ giả thiết

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_n^2 + 1999x_n}{2000} \\ &= \frac{x_n^2 - x_n + 2000x_n}{2000} \\ &= \frac{x_n^2 - x_n}{2000} + x_n > x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Do đó dãy $\{x_n\}$ là dãy số tăng. Giả sử dãy số $\{x_n\}$ bị chặn trên bởi x. Khi đó, từ công thức $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 1999x_n}{2000}$, suy ra

$$x = \frac{x^2 + 1999x}{2000} \Leftrightarrow x = 0,\ x = 1.$$

Điều này vô lý vì $2 = x_1 < x_k,\ \forall k \in \mathbb{N},\ k > 1$. Suy ra dãy $\{x_n\}$ không bị chặn trên, hay $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

Theo công thức

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 1999x_k}{2000},\ \forall k \in \mathbb{N},\ k > 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{x_k}{x_{k+1} - 1} = 2000\Big(\frac{1}{x_k - 1} - \frac{1}{x_{k+1} - 1}\Big).$$

Lần lượt cho $k = 2, 3, \ldots$ vào trong đẳng thức trên và cộng theo vế ta có

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1} - 1} &= 2000\Big(\frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}\Big) \\ &= 2000\Big(1 - \frac{1}{x_{n+1} - 1}\Big). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2000\Big(1 - \frac{1}{x_{n+1} - 1}\Big) = 2000.$$

Vậy nên

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2000.$$

Bài toán 2.30. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi*

$$x_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}.\sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{i}.$$

Chứng minh rằng giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ là tồn tại, tính giới hạn đó.

Giải. Theo đề bài, ta có

$$x_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{i} = \frac{n+2}{2\Big(n+1\Big)}.\frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{i} + \frac{n+2}{2\Big(n+1\Big)} = \frac{n+2}{2\Big(n+1\Big)}\Big(x_n + 1\Big).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} x_{n+2} - x_{n+1} &= \frac{(n+3)(x_{n+1}+1)}{2(n+2)} - \frac{(n+2)(x_n+1)}{2(n+1)} \\ &= \frac{(n^2+4n+3)(x_{n+1} - x_n) - x_n - 1}{2(n+1)(n+2)},\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Mặt khác ta có: $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $x_4 - x_3 = 0$. Suy ra $x_6 - x_5 < 0$. Tương tự, bằng quy nạp ta chứng minh được $x_{n+1} - x_n < 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, suy ra $\{x_n\}$ là dãy giảm. Do đó dãy $\{x_n\}$ có giới hạn. Giả sử giới hạn của dãy là x, khi đó từ kết quả:

$$x_{n+1} = \frac{n+2}{2\Big(n+1\Big)}\Big(x_n+1\Big).$$

Suy ra

$$x = \frac{1}{2}(x+1) \Rightarrow x = 1.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Bài toán 2.31. *Cho dãy số* $\{x_n\}$ *xác định bởi:*

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}, n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng $63 < x_{1996} < 78$.

Giải. Theo cách xác định dãy $\{x_n\}$, ta có

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \geqslant x_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy nên $\{x_n\}$ là dãy số tăng, $x_n > 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mặt khác ta có

$$x_n^2 = x_{n-1}^2 + \frac{1}{x_{n-1}^2} + 2 \geqslant x_{n-1}^2 + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.8}$$

Theo công thức xác định dãy:

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \geqslant x_{n-1} \geqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{x_{n-1}^2} - 1 \leqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra

$$x_n^2 - 3 = x_{n-1}^2 + \frac{1}{x_{n-1}^2} - 1 \leqslant x_{n-1}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{2.9}$$

Từ (2.8) và (2.9), suy ra :

$$x_{n-1}^2 + 2 \leqslant x_n^2 \leqslant x_{n-1}^2 + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lần lượt cho $n = 2, 3, \dots, k$ trong biểu thức trên ta có:

$$\begin{cases} x_1^2 + 2 \leqslant x_2^2 \leqslant x_1^2 + 3 \\ x_2^2 + 2 \leqslant x_3^2 \leqslant x_2^2 + 3 \\ \dots\dots \\ x_{k-1}^2 + 2 \leqslant x_k^2 \leqslant x_{k-1}^2 + 3 \end{cases}$$

Thực hiện cộng $k-1$ đẳng thức trên theo vế và rút gọn các số hạng đồng dạng, suy ra

$$x_1^2 + (k-1)2 \leqslant x_k^2 \leqslant x_1^2 + (k-1)3.$$

Thay $u_1 = 1$ ta được:

$$2k-1 \leqslant x_k^2 \leqslant 3k-2.$$

Suy ra :

$$\sqrt{2.1996-1} \leqslant x_{1996}^2 \leqslant \sqrt{3.1996-2}.$$

Vậy $63 < x_{1996} < 78$.

Bài toán 2.32. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi:*

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, \alpha > 1 \\ x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}, n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\sqrt{\alpha^2 + 2n} < x_n < \dfrac{1}{2\alpha} + \sqrt{\alpha^2 + 2n}$.

Giải. Theo công thức xác định dãy, ta có

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \geqslant x_{n-1}$$

và

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{x_{n-1}} > 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x_{k+1} + x_k)(x_{k+1} - x_k) > 2x_k.\frac{1}{x_k} = 2 \\
&\Leftrightarrow x_{k+1}^2 - x_k^2 > 2 \\
&\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \left(x_{k+1}^2 - x_k^2\right) > 2n \\
&\Leftrightarrow x_n^2 - x_0^2 > 2n.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$x_n > \sqrt{x_0^2 + 2n}. \tag{2.10}$$

Mặt khác, vì $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ nên

$$\begin{aligned}
&x_{k+1} - x_k = \frac{1}{x_k} < \frac{1}{x_0}\\
&\Leftrightarrow x_{k+1} - x_k - \frac{1}{x_0} < 2x_k\\
&\Leftrightarrow \Big(x_{k+1} - x_k - \frac{1}{x_0}\Big)(x_{k+1} - x_k) < 2\\
&\Leftrightarrow (x_{k+1}^2 - x_k^2) - \frac{1}{x_0}(x_{k+1} - x_k) < 2\\
&\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\Big(x_{k+1}^2 - x_k^2\Big) - \frac{1}{x_0}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(x_{k+1} - x_k\Big) < 2n\\
&\Leftrightarrow u_n^2 - u_0^2 - \frac{1}{u_0}(u_n - u_0) < 2n\\
&\Leftrightarrow u_n < \frac{1}{2x_0} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{u_0^2} + 4(x_0^2 + 2n - 1)}.
\end{aligned}$$

Do $x_0 = \alpha > 1$ nên $\dfrac{1}{x_0^2} - 4 < 0$, suy ra

$$x_n < \frac{1}{2x_0} + \sqrt{x_0^2 + 2n}. \tag{2.11}$$

Từ (2.10) và (2.11), ta có

$$\sqrt{x_0^2 + 2n} < x_n < \frac{1}{2x_0} + \sqrt{x_0^2 + 2n}.$$

Vậy nên $\sqrt{\alpha^2 + 2n} < x_n < \dfrac{1}{2\alpha} + \sqrt{\alpha^2 + 2n}$.

Bài toán 2.33. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi*

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm phần nguyên của số :

$$A = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \dots + \frac{1}{x_{2007} + 1}$$

Giải. Theo cách xác định dãy ta có $x_n > 0, x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Từ giả thiết $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ suy ra:

$$\frac{1}{x_k + 1} = \frac{x_k}{x_k(x_k + 1)} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \tag{2.12}$$

Lần lượt thay $k = 1, 2, \ldots, 2007$ vào công thức (2.12) rồi cộng theo vế ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{2007}+1} \\ &= \Big(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\Big) + \Big(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{x_{2007}} - \frac{1}{x_{2008}}\Big) \\ &= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{2008}} = 2 - \frac{1}{x_{2008}} < 2, (x_{2008} > 0). \end{aligned}$$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \\ x_3 &= \frac{9}{16} + \frac{3}{4} = \frac{21}{16} > 1. \end{aligned}$$

Mà $\{x_n\}$ là dãy số tăng, nên $x_{2008} > x_3 > 1$, suy ra A $>$ 1. Do đó 1<A $<$ 2.

Vậy $[A] = 1$.

Bài toán 2.34. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi*

$$x_1 = \frac{1}{\alpha}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < \alpha \leqslant 2.$$

Tìm phần nguyên của số : $A = \dfrac{1}{x_1+1} + \dfrac{1}{x_2+1} + \cdots + \dfrac{1}{x_{2007}+1}$

Giải. Theo cách xác định dãy ta có $x_n > 0, x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Từ giả thiết $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ suy ra:

$$\frac{1}{x_k+1} = \frac{x_k}{x_k(x_k+1)} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \tag{2.13}$$

Lần lượt thay $k = 1, 2, \ldots, 2007$ vào công thức (2.13) rồi cộng theo vế ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{2007}+1} \\ &= \Big(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\Big) + \Big(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{x_{2007}} - \frac{1}{x_{2008}}\Big) \\ &= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{2008}} = 2 - \frac{1}{x_{2008}} < 2, (x_{2008} > 0). \end{aligned}$$

Mặt khác vì $0 < \alpha \leqslant 2$, nên $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \geqslant 1$. Suy ra

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\alpha} \\ x_2 &= \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha+1}{\alpha^2} \geqslant 1. \end{aligned}$$

Mà $\{x_n\}$ là dãy số tăng, nên $x_{2008} > x_2 > 1$, suy ra $A > 1$. Do đó $1 < A < 2$. Vậy $[A] = 1$.

Bài toán 2.35. *Cho dãy số $\{x_n\}, n \in \mathbb{N}$, được xác định bởi*

$$x_0 = 1, x_n = \frac{-1}{3 - x_{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu giảm.

Giải. Giả sử dãy đã cho có giới hạn x , thì giới hạn x là nghiệm của phương trình $x = \dfrac{-1}{3-x}$, tức $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Ta chứng minh $x_n > \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ bằng quy nạp.

Thật vậy, khi $n = 0, x_0 = 1 > \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$. Giả sử $x_k > v = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$. Khi đó, ta có

$$x_{k+1} = \frac{-1}{3 + x_k} > -\frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}.$$

Do đó $x_{k+1} > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. Mặt khác

$$x_k - x_{k-1} = x_k + \frac{1}{3 + x_k} = \frac{x_n^2 + 3x_n + 1}{3 + x_n} > 0.$$

Vậy $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu giảm.

Bài toán 2.36. *Cho dãy số $\{x_n\}, n \in \mathbb{N}^*$ được xác định bởi*

$$x_1 = \alpha, x_{n+1} = \frac{-a}{b + cx_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

trong đó, $a, b, c \in \mathbb{R}^+, \Delta = b^2 - 4ac > 0, \alpha > \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2c}$. Chứng minh rằng $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu giảm.

Giải. Giả sử dãy đã cho có giới hạn x, thì giới hạn x là nghiệm của phương trình $x = \dfrac{-a}{b+cx}$, tức $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2c}$. Ta chứng minh $x_n > \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2c} = x^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$ bằng quy nạp.

Khi $n = 1$ mệnh đề đúng vì $x_1 = \alpha > \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2c} = x_*$. Giả sử mệnh đề đúng khi $n = k-1$, khi đó ta có $x_{k-1} > x_*$, suy ra

$$\begin{aligned}
&x_*.x_{k-1} < x_*^2 \\
\Leftrightarrow &cx_*.x_{k-1} + bx_* + a < cx_*^2 + bx_* + a \\
\Leftrightarrow &cx_*.x_{k-1} + bx_* + a < 0 \\
\Leftrightarrow &\frac{cx_*.x_{k-1} + bx + a}{b + cx_{k-1}} < 0 \\
\Leftrightarrow &\frac{a}{bx + a} + x_* < 0 \\
\Leftrightarrow &x_* < \frac{-a}{bx + c} \\
\Leftrightarrow &x_* < x_k
\end{aligned}$$

Do đó $x_n > x_* \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh dãy $\{x_n\}$ là một dãy đơn điệu giảm.Thật vậy:

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{a}{b + cx_*} = \frac{cx_n^2 + bx_n + a}{b + cx_n}$$

Do $x_n > x_*$ với x_* là nghiệm lớn của tam thức $f(x) = cx^2 + bx + a$, nên $cx_*^2 + bx_* + a > 0$, do đó

$$x_n - x_{n+1} = \frac{cx_n^2 + bx_n + a}{b + cx_n} > 0$$

Vậy $\{x_n\}$ là một dãy đơn điệu giảm.

Bài toán 2.37. *Cho dãy số thực $a_i, i = 1, 2, \ldots, 2000$ thỏa mãn:*

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \cdots + a_n^3 = \Big(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\Big)^2$$

Chứng minh rằng mỗi phần tử của dãy là một số nguyên.

Giải. Ta chứng minh được rằng nếu $a_i, i = 1, 2, \ldots, n$ thỏa mãn $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^3 = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i\Big)^2$ thì a_{n+1} chỉ có thể là một trong các giá trị n+1 hoặc - n hoặc 0. Thật vậy từ giả thiết $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^3 = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i\Big)^2$ ta có

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^3 + \sum_{i=1}^{n} i^3 &= \Big(a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} i\Big)^2 \\
&= a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}\left[\frac{n\Big(n+1\Big)}{2}\right] + \Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)^2 \Leftrightarrow \quad a_{n+1}(a_{n+1} - n)[a_{n+1} - (n+1)] = 0
\end{aligned}$$

Suy ra $a_{n+1} = 0$ hoặc $a_{n+1} = n$ hoặc $a_{n+1} = n + 1$.
Ta chứng minh rằng nếu các số $a_i, i = 1, 2, \ldots, 2000$ thỏa mãn tính chất

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \cdots + a_n^3 = \Big(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\Big)^2 \tag{2.14}$$

thì a_k là các số nguyên. Thật vậy, khi k= 1, ta có $a_1 \in \{0, 1\}$, do đó (2.14) đúng khi n = 1. Giả sử (2.14) đúng khi n = k, ta chứng minh (2.14) đúng khi n = k+1.

Trường hợp 1 nếu có $i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ sao cho $a_i = 0$, ta bỏ a_i trong dãy $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$, khi đó dãy đã cho còn lại k phần tử thỏa mãn giả thiết quy nạp, do đó, mỗi phần tử của dãy đều là số nguyên. Vậy $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ là số các nguyên.

Trường hợp 2 nếu có $i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ sao cho $a_{i+1} = -a_i$.
Khi $k \geqslant 2$, do (2.14) và $a_{i+1} = -a_i$ là các số nguyên. Ta bỏ đi $a_{i+1}, -a_i$ trong dãy $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$, ta được dãy có $k-1$ phần tử thỏa mãn giả thiết quy nạp, nên mỗi phần tử còn lại của dãy đều là các số nguyên. Như vậy, tất cả các phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ đều là các số nguyên.

Trường hợp 3 nếu với mỗi $i \leqslant k+1$ ta đều có $a_i \neq 0, a_i \neq -a_{i-1}$. Do

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \cdots + a_n^3 = \Big(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\Big)^2$$

suy ra $a_i = i, i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$. Như vậy tất cả các phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ đều là các số nguyên.

Bài toán 2.38. *Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi $x_1 = 0, x_2 = 1$ và*

$$x_n = \frac{n}{2}x_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x_{n-2} + (-1)^n\Big(1 - \frac{n}{2}\Big), n \geq 3, n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng :

$$x_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{n!}$$

Giải. Ta chứng minh $x_n = (-1)^n + nx_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ bằng quy nạp. Khi n = 2, ta có $x_2 = 1 + 2x_1 = 1$. Giả sử mệnh đề đúng khi $n = k - 1$ khi đó $x_{k-1} = (-1)^k + (k-1)x_{k-2}$. Ta chứng minh mệnh đề đúng khi $n = k$. Ta có

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{k}{2}x_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}x_{k-2} + (-1)^k\Big(1 - \frac{k}{2}\Big) \\ &= (-1)^k + \frac{1}{2}kx_{k-1} + \frac{1}{2}k\left[(-1)^{k-1} + (k-1)x_{k-2}\right] \\ &= (-1)^k + \frac{1}{2}kx_{k-1} + \frac{1}{2}kx_{k-1} = (-1)^k + kx_{k-1} \end{aligned}$$

Suy ra $x_n = (-1)^n + nx_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Vậy

$$x_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

Bài toán 2.39. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = 1, x_1 = 2$ và*

$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_{n-1}}{(1 + x_{n-1})^2}, \forall n > 1$$

Chứng minh rằng $52 < x_{1371} < 65$.

Giải. Ta chứng minh $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$, với $x_0 = 1$bằng quy nạp. Khi $n = 1, x_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$, mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đúng khi $n = k - 1$ khi đó ta có

$$x_k = \frac{(x_{k-1})^2 + 1}{x_{k-1}} \Rightarrow \frac{1}{x_k} = \frac{x_{k-1}}{1 + (x_{k-1})^2}$$

Do đó $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{x_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, điều phải chứng minh. Theo cách xác định dãy ta có $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, và $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ nên $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu tăng.
Ta có $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} > x_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Do đó $\frac{1}{x_n} \leqslant 1$ với mọi n
Mặt khác

$$x_{n-1}^2 + 2 < x_n^2 = x_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{{x_n}^2} < x_{n-1}^2 + 3, \forall n \geqslant 1$$

Suy ra

$$x_{n+1} \leqslant \sqrt{x_n^2 + 3} \leqslant \sqrt{3n + 2 + 3} = \sqrt{3(n+1) + 2}$$

và

$$x_{n+1} > \sqrt{x_n^2 + 2} \geqslant \sqrt{2n + 1 + 2} = \sqrt{2(n+1) + 1}$$

Từ hai kết quả trên suy ra

$$\sqrt{2(n+1) + 1} \geqslant x_{n+1} \geqslant \sqrt{3(n+1) + 2}$$

Khi $n = 1370$, ta có

$$52 < \sqrt{2743} \leqslant x_{1371} \leqslant \sqrt{4115} < 65$$

Vậy $52 < x_{1371} < 65$.

Bài toán 2.40. *Cho dãy số $\{x_n\}$ là dãy các số nguyên dương thỏa mãn*

$$x_{n+1}^2 \geqslant \frac{x_1^2}{1^3} + \frac{x_2^2}{2^3} + \frac{x_3^2}{3^3} + \cdots + \frac{x_n^2}{n^3}.$$

Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên K sao cho

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{x_{n+1}}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} > \frac{1993}{1000}$$

Giải. Theo đề ra ta có

$$\begin{aligned}
&(1^3+2^3+\cdots+n^3)(x_{n+1}^2)\\
&\geqslant (1^3+2^3+\cdots+n^3)\Big(\frac{x_1^2}{1^3}+\frac{x_2^2}{2^3}+\frac{x_3^2}{3^3}+\cdots+\frac{x_n^2}{n^3}\Big)\\
&\geqslant (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2, (Cauchy-Schwartz)
\end{aligned}$$

Do đó

$$\frac{x_{n+1}^2}{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}\geqslant\frac{1}{1^3+2^3+\cdots+n^3}=\Big[\frac{2}{n(n+1)}\Big]^2$$

Suy ra

$$\frac{x_{n+1}}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\geqslant\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{K}\frac{x_{n+1}}{x_1+x_2+\cdots+x_n}&\geqslant\sum_{n=1}^{K}\frac{2}{n\Big(n+1\Big)}\\
&=2\sum_{n=1}^{K}\frac{1}{n(n+1)}\\
&=2\sum_{n=1}^{K}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)\\
&=2\Big(1-\frac{1}{K+1}\Big)=\frac{2K}{K+1}
\end{aligned}$$

Vậy

$$\sum_{n=1}^{K}\frac{x_{n+1}}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\geqslant\frac{2(999)}{999+1}=\frac{1998}{1000}>\frac{1993}{1000}$$

Bài toán 2.41. *Cho dãy số $\{x_n\}$, xác định bởi*

$$x_0=1,\ \ x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n};\ \ n=0,1,2,\ldots$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m, ta có

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{x_k^4}<\frac{7}{6}$$

Giải. Ta chứng minh bằng quy nạp. Khi $m=1, x_1=2$ ta có

$$\frac{1}{x_0^4}+\frac{1}{x_1^4}=1+\frac{1}{16}<\frac{7}{6}.$$

Giả sử

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{x_k^4} < \frac{7}{6}.$$

Ta cần chứng minh $\sum\limits_{k=0}^{m+1} \frac{1}{x_k^4} < \frac{7}{6}$. Ta có $x_{n+1}^2 = (x_n + \dfrac{1}{x_n})^2 > x_n^2 + 2$, như vậy

$$x_n^2 > x_{n-1}^2 + 2 > x_{n-2}^2 + 2.2 > \cdots > x_1^2 + 2.(n-1)^2 = 2n + 2.$$

Suy ra

$$\frac{1}{x_k^4} < \frac{1}{(2k+2)^2} < \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\Big) \tag{2.15}$$

Lần lượt thay $k = 2, 3 \ldots, m$ vào trong (2.15) và thực hiện cộng theo vế ta được

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{x_k^4} < \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+3}\Big).$$

Do đó

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{x_k^4} < 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{2m+3}\Big) < 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{10} < \frac{7}{6}.$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp suy ra $\sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{1}{x_k^4} < \dfrac{7}{6}$

Bài toán 2.42. *Cho dãy số $\{x_n\}$, và $\{y_n\}$ xác định bởi*

$$\begin{cases} x_1 = 2005; y_1 = 2007 \\ x_n = \dfrac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}; y_n = \dfrac{2x_{n-1}y_{-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}}; \ \ n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Chứng minh rằng $x_{n+1} - y_{n+1} \leqslant \dfrac{2^{2^n}}{2^n}$.

Giải. Do $x_1, y_1 > 0$ và theo công thức xác định dãy, ta có

$$x_n > 0, y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Xét hiệu

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} - \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} = \frac{(x_n - y_n)^2}{2(x_n + y_n)} > 0.\forall n \in \mathbb{N}^*$$

Do đó $x_{n+1} > y_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có $0 < \dfrac{x_n - y_n}{2(x_n + y_n)} < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{(x_n - y_n)^2}{2(x_n + y_n)} < x_n - y_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Do vậy

$$\begin{aligned} x_{n+1} - y_{n+1} < x_n - y_n < x_{n-1} - y_{n-1} < \cdots < x_2 - y_2 \\ = \frac{(x_1 - y_1)^2}{2(x_1 + y_1)} = \frac{1}{2006} < 1. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có $\dfrac{2^{2^n}}{2^n} > 1 \Rightarrow x_{n+1} - y_{n+1} \leqslant \dfrac{2^{2^n}}{2^n}$. Dấu bằng xảy ra khi $n = 0$.

Bài toán 2.43. *Cho dãy số $\{x_n\}$, và $\{y_n\}$ xác định bởi*

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, \alpha > 0 \\ y_1 = \beta, \ \ \beta > 0; \ \ 0 < \alpha - \beta \leqslant 2. \\ x_n = \dfrac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}; y_n = \dfrac{2x_{n-1}y_{-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}}; \ \ n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Giải. Do $x_1, y_1 > 0$ và theo công thức xác định dãy ta có

$$x_n > 0, y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Xét hiệu

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} - \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} = \frac{(x_n - y_n)^2}{2(x_n + y_n)} > 0.\forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó $x_{n+1} > y_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có $0 < \dfrac{x_n - y_n}{2(x_n + y_n)} < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{(x_n - y_n)^2}{2(x_n + y_n)} < x_n - y_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do $0 < \alpha - \beta \leqslant 2 \Rightarrow \dfrac{(x_1 - y_1)^2}{2(x_1 + y_1)} < 1$, vậy

$$x_{n+1} - y_{n+1} < x_n - y_n < x_{n-1} - y_{n-1} < \cdots < x_2 - y_2 = \frac{(x_1 - y_1)^2}{2(x_1 + y_1)} < 1$$

Mặt khác ta có $\dfrac{2^{2^n}}{2^n} \geqslant 1$ nên $x_{n+1} - y_{n+1} \leqslant \frac{2^{2^n}}{2^n}$. Dấu bằng xảy ra khi $n = 0$ và $\alpha - \beta = 2$.

Bài toán 2.44. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau*

$$x_n = \Big(1 + \frac{1}{n^2}\Big)\Big(1 + \frac{2}{n^2}\Big) \dots \Big(1 + \frac{n}{n^2}\Big); \ \ n = 1, 2, \dots$$

Tìm giới hạn $\lim\limits_{n \to \infty} \Big(\ln x_n\Big)$.

Giải. Ta chứng minh rằng với mọi x>0, ta có bất đẳng thức

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x. \tag{2.16}$$

Thật vậy, xét hàm số

$$f(x) = \ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2},\ \ x \geqslant 0.$$

Ta có $f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{x^2}{x+1} > 0,\ \ \forall x \geqslant 0$. Như vậy, $f(x)$ là hàm đồng biến khi $x \geqslant 0$. Do đó $f(x) > f(0)$, hay $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$. Tương tự, ta chứng minh được

$$\ln(1+x) < x,\ \ \forall x \geqslant 0.$$

Như vậy, bất đẳng thức (2.16) được chứng minh.

Ta có

$$\ln x_n = \ln\Big(1 + \frac{1}{n^2}\Big) + \ln\Big(1 + \frac{2}{n^2}\Big) + \cdots + \ln\Big(1 + \frac{n}{n^2}\Big).$$

Áp dụng bất đẳng thức (2.16) với $k = 1, 2, \ldots, n$, ta có

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} < \ln\Big(1 + \frac{k}{n^2}\Big) < \frac{k}{n^2}.$$

Thực hiện cộng n vế các bất đẳng thức trên, suy ra

$$\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n) - \frac{1}{2n^4}(1+2+\cdots+n^2) < \ln x_n < \frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)$$

$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} < \ln x_n < \frac{n+1}{2n}$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n+1}{2n} - \frac{\Big(n+1\Big)\Big(2n+1\Big)}{12n^3}\Big) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Như vậy $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\ln x_n\Big) = \frac{1}{2}$.

Bài toán 2.45. *Chứng minh rằng phần nguyên của* $(3+\sqrt{5})^n$ *là số lẻ với mọi số tự nhiên* n

Giải. Cho n là một số nguyên dương. Đặt

$$S_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n.$$

Theo khai triển nhị thức Newton, ta có:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\left[\Big(\sqrt{5}\Big)^k + \Big(-\sqrt{5}\Big)^k\right] = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}3^{n-2k}5^k.$$

Theo công thức khai triển, suy ra S_n là một số chẵn với mọi số tự nhiên n. Vì $0 < 3-\sqrt{5} < 1$ nên $0 < (3-\sqrt{5})^n < 1$. Suy ra $S_n - 1 < (3+\sqrt{5})^n < S_n$. Như vậy $\left\lfloor\Big(3+\sqrt{5}\Big)^n\right\rfloor = S_n - 1$ là một số lẻ.

Bài toán 2.46. *Cho* $\{x_n\}$ *xác định bởi* $x_0 = 1, \quad, x_1 = 2$ *và* $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. *Tính giá trị của tổng*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{2n+2}}{x_{n-1}^2 x_{n+1}^2}.$$

Giải. Nhận xét rằng $x_n = f_{n+2}$, trong đó $\{f_n\}$ là dãy Fibonaci. Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} f_n \\ f_n f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix}^n.$$

Từ đó suy ra

$$f_{2n+4} = f_{n+2} f_{n+3} + f_{n+1} f_{n+2} = f_{n+2}(f_{n+1} + f_{n+3}) \quad = (f_{n+3} - f_{n+1})(f_{n+1} + f_{n+3}) = f_{n+3}^2 - f_{n+1}^2.$$

Do đó

$$\frac{x_{2n+2}}{x_{n-1}^2 xn + 1^2} = \frac{f_{2n+4}}{f_{n+1}^2 f_{n+3}^2} = \frac{f_{n+3}^2 - f_{n+1}^2}{f_{n+1}^2 f_{n+3}^2} = \frac{1}{f_{n+1}^2} - \frac{1}{f_{n+3}^2}.$$

Vậy nên

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{2n+2}}{x_{n-1}^2 x_{n+1}^2} \\ &= \lim_{N\to\infty} \Big(\frac{1}{f_2^2} + \frac{1}{f_3^2} - \frac{1}{f_{N+2}^2} - \frac{1}{f_{N+3}^2}\Big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \Big(\frac{1}{f_2^2} + \frac{1}{f_3^2} - \frac{1}{f_{N+2}^2} - \frac{1}{f_{N+3}^2}\Big) \\ &= \frac{1}{f_2^2} + \frac{1}{f_3^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Bài toán 2.47. *Cho dãy số* $\{x_n\}$ *xác định bởi*

$$x_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Tính giá trị của giới hạn

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + \Big(n+1\Big)\sqrt{n}}.$$

Giải. Đặt

$$A = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + \Big(n+1\Big)\sqrt{n}}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} x_k = \frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}} &= \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2k-k^2(k+1)} \\ &= \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} A &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+\Big(n+1\Big)\sqrt{n}} \\ &= \lim_{N\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{\sqrt{N+1}}\Big) = 1. \end{aligned}$$

Vậy nên $A = 1$.

Bài toán 2.48. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau*

$$x_0 = 2,\ \ x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 - 96},\ \ n = 0, 1, 2, \dots$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2-96} &\Leftrightarrow (x_{n+1} - 5x_n)^2 = 24x_n^2 - 96 \\ &\Leftrightarrow x_n^2 - 10x_{n+1}x_n + x_{n+1}^2 + 96 = 0. \end{aligned}$$

Thay n bởi $n+1$ trong đẳng thức cuối này, ta có

$$x_{n+2}^2 - 10x_{n+2}x_{n+1} + x_{n+1}^2 + 96 = 0.$$

Suy ra x_n và x_{n+2} là các nghiệm của phương trình bậc hai

$$t^2 - 10tx_{n+1} + x_{n+1} + 96 = 0.$$

Theo định lí Viète, ta có $x_{n+2} + x_n = 10x_{n+1} \Leftrightarrow x_{n+2} - 10x_{n+1} + x_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 10\lambda + 1 = 0$ có các nghiệm là :

$$\lambda_1 = 5 - 2\sqrt{6},\ \ \lambda_2 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Ta có $x_0 = 2,\ \ x_1 = 10$. Số hạng tổng quát của dãy

$$x_n = (5 - 2\sqrt{6})^n + (5 + 2\sqrt{6})^n,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Bài toán 2.49. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau*

$$x_1 = 1,\ \ x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 - 8},\ \ n = 1, 2, \ldots$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy và chứng minh dãy đã cho gồm toàn các số nguyên.

Giải. Từ công thức xác định dãy suy ra

$$\begin{aligned} x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 - 96} &\Leftrightarrow (x_{n+1} - 5x_n)^2 = 24x_n^2 - 96 \\ &\Leftrightarrow x_n^2 - 10x_{n+1}x_n + x_{n+1}^2 + 96 = 0. \end{aligned}$$

Thay n bởi $n+1$ trong đẳng thức cuối này, ta có

$$x_{n+2}^2 - 10x_{n+2}x_{n+1} + x_{n+1}^2 + 8 = 0.$$

Suy ra x_n và x_{n+2} là các nghiệm của phương trình bậc hai

$$t^2 - 10tx_{n+1} + x_{n+1} + 8 = 0.$$

Theo định lí Viète, ta có $x_{n+2} + x_n = 10x_{n+1} \Leftrightarrow x_{n+2} - 10x_{n+1} + x_n = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 10\lambda + 1 = 0$ có các nghiệm là :

$$\lambda_1 = 5 - 2\sqrt{6},\ \ \lambda_2 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Ta có $x_1 = 1,\ \ x_2 = 9$. Số hạng tổng quát của dãy

$$x_n = \frac{\sqrt{6} - 2}{2\sqrt{6}}(5 - 2\sqrt{6})^n + \frac{\sqrt{6} + 2}{2\sqrt{6}}(5 + 2\sqrt{6})^n,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton ta viết lại số hạng tổng quát dưới dạng:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}\left[\left(5 - 2\sqrt{6}\right)^n + \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^n\right] - \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\left(5 - 2\sqrt{6}\right)^n - \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^n\right] \\ &= \frac{1}{2}2.M + \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{6}.N = M + N \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Vậy dãy đã cho gồm toàn các số nguyên.

Bài toán 2.50. *Tìm dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn các điều kiện*

$$x_1 = 1,\ \ x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 4}{2x_n}.$$

Giải. Nhận xét rằng nếu u_n, v_n là các nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 4v_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n, \quad u_1 = 1, v_1 = 1 \end{cases}$$

thì $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ là nghiệm của phương trình đã cho. Thật vậy, ta chứng minh bằng quy nạp như sau, khi $n = 1$, ta có

$$x_1 = \frac{u_1}{v_1} = 1.$$

Giả sử $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ là nghiệm của bài toán. Khi đó

$$x_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{u_n^2 + 4v_n^2}{2u_n v_n} = \frac{\frac{u_n^2}{v_n^2} + 4}{2\frac{u_n}{v_n}} = \frac{x_n^2 + 4}{2x_n}$$

cũng là nghiệm của bài toán.

Như vậy để tìm nghiệm của bài toán đã cho, ta giải hệ

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 4v_n^2 \\ 2v_{n+1} = 4u_n v_n, \quad u_1 = 1, v_1 = 1 \end{cases}$$

Thực hiện cộng theo vế các phương trình trong hệ ta thu được:

$$u_{n+1} + 2v_{n+1} = (u_n + 2v_n)^2.$$

Do đó

$$u_{n+1} + 2v_{n+1} = (u_n + 2v_n)^2 = \cdots = (u_1 + 2v_1)^{2^n} = 3^{2^n}.$$

Tương tự, trừ vế với vế các phương trình trong hệ ta cũng có:

$$u_{n+1} - 2v_{n+1} = (u_n - 2v_n)^2 = \cdots = (u_1 - 2v_1)^{2^n} = 1.$$

Do đó

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(3^{2^n} + 1\Big) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{4}\Big(3^{2^n} - 1\Big) \end{cases}$$

Do $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$, suy ra

$$x_n = \frac{2(3^{2^{n-1}} + 1)}{3^{2^{n-1}} - 1}.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được kết quả x_n thoả mãn bài toán đã cho.

Bài toán 2.51. *Cho* $\{x_n\}$ *xác định như sau*

$$x_0 = 1, x_1 = 45, \;\; x_{n+2} = 45x_{n+1} - 7x_n, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

1. Tìm số hạng tổng quát của dãy.

2. Tìm số các ước nguyên dương của $x_{n+1}^2 - x_n x_{n+2}$ *theo* n.

3. Chứng minh rằng $1997x_n^2 - 4.7^{n+1}$ *là số chính phương với mỗi* n.

Giải.

1. Theo công thức xác định dãy ta có :

$$x_{n+2} = 45x_{n+1} - 7x_n \Leftrightarrow x_{n+2} - 45x_{n+1} + 7x_n = 0.$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 45\lambda + 7 = 0$ có các nghiệm

$$\lambda_1 = \frac{45 + \sqrt{1997}}{2}, \lambda_2 = \frac{45 - \sqrt{1997}}{2}.$$

Số hạng tổng quát của dãy có dạng:

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n.$$

Theo giả thiết $x_0 = 1, x_1 = 45$ suy ra số hạng tổng quát của dãy:

$$x_n = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{1997}}\left[(45 + \sqrt{1997})^{n+1} - (45 - \sqrt{1997})^{n+1}\right].$$

2. Ta có

$$\begin{aligned}
&x_{n+1}^2 - x_n x_{n+2} = \frac{1}{1997.2^{2n+4}}\left[\left(45 + \sqrt{1997}\right)^{n+2} - \left(45 - \sqrt{1997}\right)^{n+2}\right]^2 \\
&-\frac{1}{1997.2^{2n+4}}\left[\left(45 + \sqrt{1997}\right)^{n+1} - \left(45 - \sqrt{1997}\right)^{n+1}\right] \\
&\quad\times\left[\left(45 + \sqrt{1997}\right)^{n+3} - \left(45 - \sqrt{1997}\right)^{n+3}\right] \\
&=\frac{1}{1997.2^{2n+4}}\left(45 + \sqrt{1997}\right)^{n+1}\left(45 - \sqrt{1997}\right)^{n+1}\left(2\sqrt{1997}\right)^2 = 7^{n+1}.
\end{aligned}$$

Vậy số các ước dương của $x_{n+1}^2 - x_n x_{n+2}$ là $n+2$.

3. Từ công thức xác định dãy $x_{n+2} = 45x_{n+1} - 7x_n$ và $x_0 = 1, x_1 = 45$ suy ra $x_n \in \mathbb{Z}$ với mọi n. Mặt khác ta có

$$x_{n+1}^2 - x_n x_{n+2} = 7^{n+1} \Leftrightarrow x_{n+1}^2 - 45.x_n x_{n+1} + 7x_n^2 - 7^{n+1} = 0.$$

Suy ra x_{n+1} là nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 45.x_n x + 7x_n^2 - 7^{n+1} = 0$, do đó $\Delta = (45x_n)^2 - 4(7x_n^2 - 7^{n+1}) = 1997x_n^2 + 4.7^{n+1}$ là một số chính phương với mỗi n.

Bài toán 2.52. *chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = 1$ và*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(3x_n + \sqrt{5x_n^2 - 4}\Big), \forall n \in \mathbb{N}$$

chỉ chứa các số nguyên.

Giải. Gọi f_n là dãy Fibonacci. Ta chứng minh rằng $x_n = f_{2n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$. Thật vậy theo công thức Binnet's ta có

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi_1^n - \phi_2^n)$$

Trong đó $\phi_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \phi_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ với $\phi_1\phi_2 = -1, \phi_1^2 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}), \phi_2^2 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ Mặt khác

$$5f_{2n+1}^2 - 4 = (\phi_1^{2n+1} - \phi_2^{2n+1})^2 + 4\phi_1^{2n+1}\phi_2^{2n+1} = (\phi_1^{2n+1} + \phi_2^{2n+1})^2$$

Như vậy $\frac{1}{2}(3f_{2n+1} + \sqrt{5f_{2n+1}^2 - 4})$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2\sqrt{5}}(\phi_1^{2n+1} - \phi_2^{2n+1}) + \frac{1}{2}(\phi_1^{2n+1} + \phi_2^{2n+1})\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Big)\phi_1^{2n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\Big)\phi_2^{2n+1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\phi_1^{2n+3} - \frac{1}{\sqrt{5}}\phi_2^{2n+3} = f_{2n+3} = f_{2(n+1)+1}
\end{aligned}$$

Khi $n = 0$ ta có $f_{2.0+1} = f_1 = 1 = y_0$. Như vậy $y_n = f_{2n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$, hay $\{y_n\}$ là dãy chỉ chứa các số nguyên.

Bài toán 2.53. *Cho k là số nguyên dương. Dãy $\{x_n\}$ xác định như sau*

$$x_1 = k,\ \ x_{n+1} = x_n^2 - kx_n + k, \forall n \geqslant 1.$$

Chứng minh rằng nếu $m \neq n$ thì x_m và x_n là hai số nguyên tố cùng nhau.

Giải. Đặt $P(x) = x^2 - kx + k$. Suy ra $P(x_n) = x_{n+1}$, với mọi $n \geqslant 1$. Ta có

$$x_{n+1} = x_n^2 - kx_n + k = \Big(x_n - \frac{k}{2}\Big)^2 + \frac{4k - k^2}{4}$$

Nếu $k \neq 4$ thì $x_n \neq 0$, với mọi n.

Nếu $k = 4$ thì $P(x) = (x-2)^2$. Do $x_1 = 5$, bằng quy nạp ta chứng minh được rằng $x_n \geqslant 5, \forall n \in \mathbb{N}$. Như vậy $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Cho $n \geqslant 1$, theo giả thiết ta có $x_{n+1} \equiv k(mod x_n)$. Nếu $x_{n+t} \equiv k(mod x_n)$ với $t > 0$, thì

$$x_{n+t+1} \equiv k^2 - k^2 + k \equiv k(mod x_n)$$

Suy ra $x_p \equiv k(mod x_q)$, với $p > q \geqslant 1$.

Giả sử có hai số $p > q \geqslant 1$, và ƯCLN(a_p, a_q) >1 và q là ước nhỏ nhất. Gọi r là ước số của x_p và x_q. Khi đó r cũng là ước số của k.Vì r không thể là ước của k và $x_1 = k+1$ nên $q > 1$. Do đó, r là ước của x_{q-1}^2.

Vậy từ cách xây dựng dãy ta có r là ước của x_{q-1}^2, và do đó x_q và x_{q-1} là không nguyên tố cùng nhau.

Bài toán 2.54. *Tính các tổng sau:*

$$T_S = \sum_{k=1}^{n} \sin kx,\ \ T_C = \sum_{k=1}^{n} \cos kx.$$

Giải. Nhận xét rằng

$$T_S = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = 0$$

khi $x = m\pi,\ \ m \in \mathbb{Z}$.

Xét $x \neq k\pi$. Nhân hai vế của biểu thức T_S với $\sin\dfrac{x}{2}$, ta thu được

$$T_S \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} \sin kx\Big).$$

Mặt khác, ta có

$$\sin\frac{x}{2}\sin kx = \frac{1}{2}\Big(\cos\Big(\frac{2k-1}{2}\Big)x - \cos(\frac{2k+1}{2})\Big).$$

Khi đó tổng T_S được viết lại thành

$$\Big[\Big(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\Big) + \Big(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\Big) + \Big(\cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{7x}{2}\Big)$$

$$+\cdots+\Big(\cos\frac{(2n-1)x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}\Big)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2n+1)x}{2}\Big)=\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{\Big(n+1\Big)x}{2}.$$

Do đó

$$T_S=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{\Big(n+1\Big)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \tag{2.17}$$

(b) $T_C=\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$

Ta có

$$S.\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}(\sum_{k=1}^{n}\cos kx)$$

Mặt khác ta có

$$\sin\frac{x}{2}.\cos kx=\frac{1}{2}\Big[\sin(\frac{2k+1}{2})x-\sin(\frac{2k-1}{2})x\Big]$$

Khi đó tổng T_C được viết lại

$$\frac{1}{2}\Big[\Big(\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}\Big)+\Big(\sin\frac{5x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\Big)+\cdots+\Big(\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{(2n-1)x}{2}\Big)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\sin\frac{(2n+1)x}{2}-\sin\frac{x}{2}\Big)=\cos\frac{nx}{2}\cos\frac{\Big(n+1\Big)x}{2}.$$

Nhận xét 2.2. *Qua kết quả bài toán trên, nếu ta chọn $x=1$, khi đó ta có tổng $S=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k$. Ta nhận thấy các phần tử trong hàm sin là một cấp số cộng với công sai là 1.*

Câu hỏi được đặt ra là: Trong trường hợp nếu tổng là một cấp số cộng với công sai d tùy ý thì tổng S được tính như thế nào?

Phải chăng, ta có thể vận dụng đạo hàm và tích phân dể xây dựng các bài tập về tính một số tổng dạng tổng quát.

Theo kết quả tính tổng T_S, T_C thì

+ Với $x=2t$, ta có tổng

$$\sum_{k=1}^{n}\sin 2kt=\sin 2t+\sin 4t+\cdots+\sin 2nt=\frac{\sin[(n+1)t].\sin nt}{\sin t},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos 2kt = \cos 2t + \cos 4t + \cdots + \cos 2nt = \frac{\cos[(n+1)t] \sin nt}{\sin t} \tag{2.18}$$

Bài toán 2.55. *Tính các tổng sau:*

$$(i) \qquad T_{S^2} = \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \cdots + \sin^2 nx = \sum_{k=1}^{n} \sin^2 kx \tag{2.19}$$

$$(ii) \qquad T_{C^2} = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cdots + \cos^2 nx = \sum_{k=1}^{n} \cos^2 kx \tag{2.20}$$

$$(iii) \qquad T_{S^3} = \sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x + \cdots + \sin^3 nx = \sum_{k=1}^{n} \sin^3 kx \tag{2.21}$$

$$(iv) \qquad T_{C^3} = \cos^3 x + \cos^3 2x + \cdots + \cos^3 nx = \sum_{k=1}^{n} \cos^3 kx \tag{2.22}$$

Giải. Nhận xét : $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$,

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, suy ra $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$,

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, suy ra $\cos^3 x = \dfrac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$.

Do đó

$$\begin{aligned} T_{S^2} &= \sin^2 x + \sin^2 2x + \cdots + \sin^2 nx \\ &= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} + \cdots + \frac{1 - \cos 2nx}{2} \\ &= \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\Big(\cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx\Big) \end{aligned}$$

Theo kết quả (2.17) trên ta có

$$T_{S^2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\cos{(n+1)t}.\sin nt}{\sin t}\right]$$

Tương tự ta tính được các kết quả sau:

$$
\begin{aligned}
T_{C^2} &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+1)t.\sin nt}{\sin t}\right]\\
T_{S^3} &= \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}\sin kx - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\sin 3kx\\
&= \frac{3}{4}\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{\Big(n+1\Big)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}\frac{\sin\frac{3nx}{2}\sin\frac{3\Big(n+1\Big)x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}\\
T_{C^3} &= \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}\cos kx + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\cos 3kx\\
&= \frac{3}{4}\frac{\cos\frac{nx}{2}\cos\frac{\Big(n+1\Big)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}\frac{\cos\frac{3nx}{2}\cos\frac{3\Big(n+1\Big)x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}
\end{aligned}
$$

Bài toán 2.56. *Tính các tổng sau:*

$$(i) \qquad S_S = \sum_{k=1}^{n} k\sin kx \tag{2.23}$$

$$(ii) \qquad T_S = \sum_{k=1}^{n} k\cos kx \tag{2.24}$$

$$\tag{2.25}$$

Giải.

(i) Ta có

$$S_S = \sum_{k=1}^{n} k\sin kx = -\Big(\sum_{k=1}^{n}\cos kx\Big)^{/}$$

Ta có

$$S_S = \left[\frac{\cos\frac{\Big(n+1\Big)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right]^{/} = \frac{-\frac{n+1}{2}\sin\frac{\Big(n+1\Big)x}{2}\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$+\frac{\frac{n}{2}\cos\frac{nx}{2}\cos\frac{\Big(n+1\Big)x}{2}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\Big(n+1\Big)x}{2}\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

Tương tự, ta có:

$$S_C = \sum_{k=1}^{n} k\cos kx = \Big(\sum_{k=1}^{n} \sin kx\Big)^{/} = \frac{\dfrac{n+1}{2}\cos\dfrac{\Big(n+1\Big)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{x}{2}}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$$

$$+\frac{\dfrac{n}{2}\cos\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{\Big(n+1\Big)x}{2}\sin\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\Big(n+1\Big)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\sin^2\dfrac{x}{2}}.$$

Bài toán 2.57. *Cho dãy $\{x_n\}$ là một cấp số cộng, công sai d. Tính các tổng sau*

$$T_{SC} = \sum_{k=1}^{n} \sin x_k,\;\; T_{CC} = \sum_{k=1}^{n} \cos x_k.$$

Giải.

(i) Ta có

$$x_k = x_1 + \Big(k-1\Big)d.$$

Suy ra

$$\sin x_k = \sin\Big[x_1 + \Big(k-1\Big)d\Big] = \sin x_1 \cos\Big[\Big(k-1\Big)d\Big] + \cos x_1 \sin\Big[\Big(k-1\Big)d\Big].$$

Khi đó

$$T_{SC} = \sum_{k=1}^{n} \sin x_k = \sum_{k=1}^{n}\Big\{\sin x_1 \cos\Big[\Big(k-1\Big)d\Big] + \cos x_1 \sin\Big[\Big(k-1\Big)d\Big]\Big\} =$$

$$= \sin x_1 \sum_{k=1}^{n} \cos\Big[\Big(k-1\Big)d\Big] + \cos x_1 \sum_{k=1}^{n} \sin\Big[\Big(k-1\Big)d\Big]$$

$$= \sin x_1 \sum_{m=0}^{n-1} \cos\Big(md\Big) + \cos x_1 \sum_{m=0}^{n-1} \sin\Big(md\Big).$$

Mặt khác, ta có

$$\sum_{m=1}^{n-1} \sin mx = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{n-1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}},$$

$$\sum_{m=1}^{n-1} \cos mx = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{n-1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Do vậy

$$T_{SC} = \frac{\sin\left[x_1 + \frac{\left(n-1\right)d}{2}\right]\sin\left(\frac{nd}{2}\right)}{\sin\frac{d}{2}}.$$

Ta có cách tính tổng T_{SC} như sau $T_{SC} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin x_k$.

Ta có

$$2\sin x_k \sin\frac{d}{2} = \cos\left[x_1 + \left(k - \frac{3}{2}\right)d\right] - \cos\left[x_1 + \left(k - \frac{1}{2}\right)d\right].$$

Đặt

$$f(n) = \cos\left[x_1 + (n - \frac{3}{2})d\right].$$

Khi đó

$$2\sin x_n.\sin\frac{d}{2} = f(n) - f(n+1).$$

Suy ra

$$\begin{cases} 2\sin x_1 \sin\frac{d}{2} = f(1) - f(2) \\ 2\sin x_2 \sin\frac{d}{2} = f(2) - f(3) \\ \ldots\ldots \\ 2\sin x_n \sin\frac{d}{2} = f(n) - f(n+1). \end{cases}$$

Cộng theo vế các đồng nhất thức, ta có

$$\begin{aligned} 2T_{SC}\sin\frac{d}{2} &= f(1) - f(n+1) = \cos a_1 - \frac{d}{2}) - \cos\left[a_1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)d\right] \\ &= -2\sin[a_1 + \frac{n-1}{2}d].\sin\frac{-nd}{2}. \end{aligned}$$

Do đó

$$T_{SC} = \frac{sin\big(a_1 + \frac{n-1}{2}d\big).\sin\frac{nd}{2}}{\sin\frac{d}{2}}.$$

(ii) Tương tự, ta tính tổng

$$T_{CC} = \sum_{k=1}^{n} \cos x_k.$$

Ta có

$$2\cos x_k \sin\frac{d}{2} = 2\cos\left[x_1 + \left(k-1\right)d\right]\sin\frac{d}{2}$$

$$= \sin\left[x_1 + \left(k - \frac{1}{2}\right)d\right] - \sin\left[x_1 + \left(k - \frac{3}{2}\right)d\right].$$

Đặt

$$f(n) = \sin\left[x_1 + (n - \frac{3}{2})d\right].$$

Khi đó, ta có

$$\begin{cases} 2\cos x_1 \sin\dfrac{d}{2} = f(2) - f(1) \\ 2\cos x_2 \sin\dfrac{d}{2} = f(3) - f(2) \\ \dots\dots\dots\dots \\ 2\cos x_n \sin\dfrac{d}{2} = f(n+1) - f(n) \end{cases}$$

Cộng các đồng nhất thức theo vế, ta được

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{d}{2}T_{CC} &= f(n+1) - f(1) \\ &= \sin\left[x_1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)d\right] - \sin\left(x_1 - \frac{d}{2}\right) \\ &= 2\cos\left[x_1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d\right]\sin\frac{nd}{2} \end{aligned}$$

Vậy nên

$$T_{CC} = \frac{2\cos\left[x_1 + \left(\dfrac{n-1}{2}\right)d\right]\sin\dfrac{nd}{2}}{2\sin\dfrac{d}{2}}.$$

Chương 3

Một số tính toán trên các dãy số

3.1 Giới hạn của dãy số

Bài toán 3.1. *Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định theo công thức*

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + mx_n}{m+1}, \ \ n \in \mathbb{N}^*,$$

trong đó m là số nguyên dương cho trước. Lập dãy $\{S_n\}$ xác định như sau:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1} - 1}.$$

Tính

$$\lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Giải. Từ giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_n^2 + mx_n}{m+1} \\ &= \frac{x_n^2 - x_n + (m+1)x_n}{m+1} \\ &= \frac{x_n^2 - x_n}{m+1} + x_n > x_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Do đó dãy $\{x_n\}$ là dãy số tăng. Giả sử dãy số $\{x_n\}$ bị chặn trên bởi x. Khi đó, từ công thức $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + mx_n}{m+1}$, suy ra

$$x = \frac{x^2 + mx}{m+1} \Leftrightarrow x = 0, x = 1.$$

Điều này vô lý vì $2 = x_1 < x_k,\ \ \forall k \in \mathbb{N}, k > 1$. Suy ra dãy $\{x_n\}$ không bị chặn trên, hay $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Do đó
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

Theo công thức:
$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + mx_k}{m+1},\ \ \forall k \in \mathbb{N}, k > 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{x_k}{x_{k+1}-1} = (m+1)\Big(\frac{1}{x_k - 1} - \frac{1}{x_{k+1}-1}\Big).$$

Lần lượt cho $k = 2, 3, \ldots$ vào trong đẳng thức trên và cộng theo vế ta thu được
$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}-1} &= (m+1)\Big(\frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_{n+1}-1}\Big) \\ &= (m+1)\Big(1 - \frac{1}{x_{n+1}-1}\Big). \end{aligned}$$

Suy ra
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (m+1)\Big(1 - \frac{1}{x_{n+1}-1}\Big) = (m+1).$$

Vậy nên
$$\lim_{n\to\infty} S_n = (m+1).$$

Bài toán 3.2. *Cho dãy số $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ xác định như sau:*
$$\begin{cases} x_1 = \alpha, \alpha > 0 \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n^2}{\beta}, \beta > 0. \end{cases}$$

Tìm
$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n+1}}\Big).$$

Giải. Ta có
$$\begin{aligned} \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{x_k^2}{x_k.x_{k+1}} &= \frac{\beta(x_{k+1} - x_k)}{x_k.x_{k+1}} \\ &= \beta.\Big(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}\Big). \end{aligned}$$

Lần lượt cho $k = 1, 2, \ldots, n$, trong đẳng thức trên và thực hiện cộng theo vế, ta được
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n+1}} \\ &= \beta\Big(1 - \frac{1}{x_{k+1}}\Big). \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{\beta} > x_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do đó, dãy $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu tăng. Giả sử dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên thì tồn tại giới hạn hữu hạn bằng a. Khi đó, ta có

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\Big(x_n + \frac{x_n^2}{\beta}\Big),$$

hay $a = a + \frac{a^2}{\beta} \Rightarrow a = 0$ (Vô lý).

Vậy dãy đã cho không bị chặn trên. Suy ra

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ hay $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0.$

Vậy nên

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \beta.$$

Bài toán 3.3. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 = \alpha, \alpha > 0 \\ x_n = \dfrac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \dfrac{2007^2}{x_{n-1}}\Big), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Xác định $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Giải. Theo công thức xác định dãy $\{x_n\}$, ta có

$$x_n = \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \frac{2007^2}{x_{n-1}}\Big), \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được dãy $\{x_n\}$ là dãy số dương với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$x_n = \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \frac{2007^2}{x_{n-1}}\Big) \geqslant 2007, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} x_{n-1} - x_n &= x_{n-1} - \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \frac{2007^2}{x_{n-1}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} - \frac{2007^2}{x_{n-1}}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{x_{n-1}^2 - 2007^2}{x_{n-1}}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{x_{n-1} - 2007}{x_{n-1}}\Big)\Big(\frac{x_{n-1} + 2007}{x_{n-1}}\Big) > 0. \end{aligned}$$

Suy ra dãy $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu giảm, bị chặn dưới. Gọi x là giới hạn của dãy, từ công thức

$$x_n = \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \frac{2007^2}{x_{n-1}}\Big), \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

suy ra

$$x = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{2007^2}{x}\Big).$$

Do đó $x = 2007$, vì $x > 0$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2007$.

Bài toán 3.4. *Cho $\beta > 0$ và dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi công thức*

$$\begin{cases} x_0 = \alpha, \alpha > 0 \\ x_n = \dfrac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \dfrac{\beta^2}{x_{n-1}}\Big), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Xác định $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Giải. Theo công thức xác định dãy $\{x_n\}$, ta có

$$x_n = \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \frac{\beta^2}{x_{n-1}}\Big), \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được dãy $\{x_n\}$ là dãy số dương với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$x_n = \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \frac{\beta^2}{x_{n-1}}\Big) \geqslant \beta, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} x_{n-1} - x_n &= x_{n-1} - \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \frac{\beta^2}{x_{n-1}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} - \frac{\beta^2}{x_{n-1}}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{x_{n-1}^2 - \beta^2}{x_{n-1}}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{x_{n-1} - \beta}{x_{n-1}}\Big)\Big(\frac{x_{n-1} + \beta}{x_{n-1}}\Big) > 0. \end{aligned}$$

Suy ra dãy $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu giảm, bị chặn dưới. Gọi x là giới hạn của dãy, từ công thức

$$x_n = \frac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \frac{\beta^2}{x_{n-1}}\Big), \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra

$$x = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{\beta^2}{x}\Big).$$

Do đó $x = \beta$, vì $x > 0$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$.

Bài toán 3.5. *Cho* $\beta > 0$ *và dãy số* $\{x_n\}$ *xác định bởi công thức*

$$\begin{cases} x_0 = \alpha, \alpha > 0 \\ x_n = \dfrac{1}{k+1}\Big(kx_{n-1} + \dfrac{\beta^{k+1}}{x_{n-1}^k}\Big), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Xác định $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Giải. Theo công thức xác định dãy $\{x_n\}$, ta có

$$x_n = \frac{1}{k+1}\Big(kx_{n-1} + \frac{\beta^{k+1}}{x_{n-1}^k}\Big), \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được dãy $\{x_n\}$ là dãy số dương với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$x_n = \frac{1}{k+1}\Big(kx_{n-1} + \frac{\beta^{k+1}}{x_{n-1}^k}\Big) \geqslant \beta, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} x_{n-1} - x_n &= x_{n-1} - \frac{1}{k+1}\Big(kx_{n-1} + \frac{\beta^{k+1}}{x_{n-1}^k}\Big) = \frac{1}{k+1}\Big(x_{n-1} - \frac{\beta^k}{x_{n-1}^k}\Big) \\ &= \frac{1}{k+1}\Big(\frac{x_{n-1}^{k+1} - \beta^{k+1}}{x_{n-1}^k}\Big) \\ &= \frac{1}{k+1}(x_{n-1} - \beta)g(x_{n-1}) > 0. \end{aligned}$$

Suy ra dãy $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu giảm, bị chặn dưới. Gọi x là giới hạn của dãy, từ công thức

$$x_n = \frac{1}{k+1}\Big(kx_{n-1} + \frac{\beta^{k+1}}{x_{n-1}^k}\Big), \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra

$$x = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{\beta^{k+1}}{x^k}\Big).$$

Do đó $x = \beta$, vì $x > 0$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$.

3.2 Một số ước lượng tổng và tích vô hạn phần tử

Bài toán 3.6. *Cho* $\{x_n\}$ *xác định như sau*

$$x_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}.$$

Tìm x_{2005} *và* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Giải. Nhận xét rằng

$$\frac{n}{n^4+n^2+1} = \frac{n}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1}\Big).$$

Mặt khác $n^2+n+1 = (n+1)^2 - (n+1) + 1$. Suy ra

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\Big)\cdots + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{m^2-m+1} - \frac{1}{m^2+m+1}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{m^2+m+1}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{m^2+m}{m^2+m+1}\Big). \end{aligned}$$

Vậy nên

$$x_{2005} = \frac{2011015}{4022031}, \ \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

Bài toán 3.7. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_1 = 5, x_{n+1} = x_n^2 - 2, \ n \geqslant 1$. Tính*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1x_2\dots x_n}.$$

Giải. Từ công thức xác định dãy, bằng quy nạp ta chứng minh được rằng $x_n^2 > 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Mặt khác

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 4 &= (x_n^2-2)^2 - 4 = x_n^2(x_n^2-4) \\ &= \cdots = (x_1x_2\dots x_n)^2(x_1^2-4) = 21(x_1x_2\dots x_n)^2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\Big(\frac{x_{n+1}}{x_1x_2\dots x_n}\Big)^2 = 21 + \frac{4}{\Big(x_1x_2\dots x_n\Big)^2}.$$

Mà ta có

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\Big(x_1x_2\dots x_n\Big)^2} \leqslant \lim_{n\to\infty} 4.2^{-2n} = 0.$$

Vậy nên

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{x_{n+1}}{x_1x_2\dots x_n}\Big)^2 = \Big(\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_1x_2\dots x_n}\Big)^2 = \lim_{n\to\infty}\Big(21 + \frac{4}{\Big(x_1x_2\dots x_n\Big)^2}\Big) = 21.$$

Bài toán 3.8. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_1 = 5, x_{n+1} = x_n^2 - 2, \ n \geqslant 1$. Tính*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1x_2\dots x_n}.$$

Giải. Từ công thức xác định dãy, bằng quy nạp ta chứng minh được rằng $x_n > 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Mặt khác

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 4 &= (x_n^2 - 2)^2 - 4 = x_n^2(x_n^2 - 4) \\ &= \cdots = (x_1x_2\dots x_n)^2(x_1^2 - 4) = 21(x_1x_2\dots x_n)^2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\Big(\frac{x_{n+1}}{x_1x_2\dots x_n}\Big)^2 = 21 + \frac{4}{\Big(x_1x_2\dots x_n\Big)^2}$$

Mà ta có

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\Big(x_1x_2\dots x_n\Big)^2} \leqslant \lim_{n\to\infty} 4.2^{-2n} = 0$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{x_{n+1}}{x_1x_2\dots x_n}\Big)^2 = \Big(\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_1x_2\dots x_n}\Big)^2 = \lim_{n\to\infty}\Big(21 + \frac{4}{\Big(x_1x_2\dots x_n\Big)^2}\Big) = 21$$

Bài toán 3.9. *Cho dãy số* $\{x_n\}$ *xác định bởi công thức*

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}, n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng $63 < x_{1996} < 78$.

Giải. Theo cách xác dịnh dãy, ta có dãy $\{x_n\}$ ta có

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \geqslant x_{n-1},\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nên $\{x_n\}$ là dãy số tăng, $x_n > 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mặt khác ta có

$$x_n^2 = x_{n-1}^2 + \frac{1}{x_{n-1}^2} + 2 \geqslant x_{n-1}^2 + 2,\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.1}$$

Theo công thức xác định dãy:

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \geqslant x_{n-1} \geqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{x_{n-1}^2} - 1 \leqslant 0,\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra

$$x_n^2 - 3 = x_{n-1}^2 + \frac{1}{x_{n-1}^2} - 1 \leqslant x_{n-1}^2,\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.2}$$

Từ (3.1) và (**??**), suy ra

$$x_{n-1}^2 + 2 \leqslant x_n^2 \leqslant x_{n-1}^2 + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lần lượt cho $n = 2, 3, \ldots, k$ trong biểu thức trên ta có

$$\begin{cases} x_1^2 + 2 \leqslant x_2^2 \leqslant x_1^2 + 3 \\ x_2^2 + 2 \leqslant x_3^2 \leqslant x_2^2 + 3 \\ \cdots\cdots \\ x_{k-1}^2 + 2 \leqslant x_k^2 \leqslant x_{k-1}^2 + 3 \end{cases}$$

Thực hiện cộng $k-1$ đẳng thức trên theo vế và rút gọn các số hạng đồng dạng, suy ra

$$x_1^2 + (k-1)2 \leqslant x_k^2 \leqslant x_1^2 + (k-1)3.$$

Thay $u_1 = 1$ ta được

$$2k - 1 \leqslant x_k^2 \leqslant 3k - 2.$$

Suy ra

$$\sqrt{2.1996 - 1} \leqslant x_{1996}^2 \leqslant \sqrt{3.1996 - 2}.$$

Vậy $63 < x_{1996} < 78$.

Bài toán 3.10. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi công thức*

$$\begin{cases} x_0 = m + 1, m > 0 \\ x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}, n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{m^2 + 2m + 2n + 1} < x_n < \frac{1}{2m+2} + \sqrt{m^2 + 2m + 2n + 1}.$$

Giải. Theo công thức xác định dãy ta có

$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \geqslant x_{n-1}$$

và

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{x_{n-1}} > 0$$

$$\Leftrightarrow (x_{k+1}+x_k)(x_{k+1}-x_k) > 2x_k.\frac{1}{x_k} = 2$$
$$\Leftrightarrow x_{k+1}^2 - x_k^2 > 2$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\left(x_{k+1}^2 - x_k^2\right) > 2n$$
$$\Leftrightarrow x_n^2 - x_0^2 > 2n.$$

Suy ra

$$x_n > \sqrt{x_0^2 + 2n}. \tag{3.3}$$

Mặt khác, vì $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ nên

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{x_k} < \frac{1}{x_0}$$
$$\Leftrightarrow x_{k+1} - x_k - \frac{1}{x_0} < 2x_k$$
$$\Leftrightarrow \left(x_{k+1} - x_k - \frac{1}{x_0}\right)(x_{k+1} - x_k) < 2$$
$$\Leftrightarrow (x_{k+1}^2 - x_k^2) - \frac{1}{x_0}(x_{k+1} - x_k) < 2$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\left(x_{k+1}^2 - x_k^2\right) - \frac{1}{x_0}\sum_{k=0}^{n-1}\left(x_{k+1} - x_k\right) < 2n$$
$$\Leftrightarrow x_n^2 - x_0^2 - \frac{1}{x_0}(x_n - x_0) < 2n$$
$$\Leftrightarrow x_n < \frac{1}{2x_0} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x_0^2} + 4(x_0^2 + 2n - 1)}.$$

Do $x_0 = m+1 > 1$ nên $\dfrac{1}{x_0^2} - 4 < 0$, suy ra

$$x_n < \frac{1}{2x_0} + \sqrt{x_0^2 + 2n} \tag{3.4}$$

Từ (3.3) và (3.4) ta có

$$\sqrt{x_0^2 + 2n} < x_n < \frac{1}{2x_0} + \sqrt{x_0^2 + 2n}.$$

Vậy

$$\sqrt{m^2 + 2m + 2n + 1} < x_n < \frac{1}{2m+2} + \sqrt{m^2 + 2m + 2n + 1}.$$

Bài toán 3.11. *Cho dãy số x_1, x_2, x_3 là ba số hạng của một cấp số nhân công bội $q > 0$. Hỏi với điều kiện nào của q thì các số x_1, x_2, x_3 là ba cạnh của một tam giác.*

Giải. Gọi ba cạnh của tam giác lần lượt x_1, x_2, x_3 là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. Khi đó, $x_i > 0; i = 1, 2, 3$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 < x_2 < x_3$. Ta có $x_2 = x_1q, x_3 = x_1q^2$. Theo bất đẳng thức trong tam giác:

$$\begin{cases} x_1 + x_1q > x_1q^2 \\ x_1q^2 + x_1q > x_1 \\ x_1 + x_1q^2 > x_1q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + q - q^2 > 0 \\ q^2 + q - 1 > 0 \\ q^2 - q + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Vậy $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

3.3 Tính chất của một số dãy số phi tuyến

Bài toán 3.12. *Cho dãy số $\{x_n\}$ và $\{x_n\}$ thoả mãn các điều kiện*

$$x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n;\;\; y_{n+1} = y_n^3 - 3y_n,\, \forall n \geqslant 1, x_1^2 = y_1 + 2$$

Chứng minh rằng $x_n^2 = y_n + 2$, $\forall n \geqslant 1$.

Giải. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Khi $n = 1$ đẳng thức đúng. Giả sử đẳng thức đúng khi $n = k$, với $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 1$, ta có $x_k^2 = y_k + 2$. Ta chứng minh $x_{k+1}^2 = y_{k+1} + 2$. Thật vậy, theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k^3 - 3x_k \\ \Rightarrow x_{k+1}^2 &= x_k^6 - 6x_k^4 + 9x_k^2 \\ &= (y_k + 2)^3 - 6(y_k + 2)^2 + 9(y_k + 2) \\ \Leftrightarrow x_{k+1}^2 &= y_k^3 - 3y_k + 2 = y_{k+1} + 2 \end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta có $x_n^2 = y_n + 2$, $\forall n \geqslant 1$.

Bài toán 3.13. *Cho dãy số $\{x_n\}$ có số hạng tổng quát là $x_n = 3(n^2 + n) + 7, n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng trong dãy số đã cho, không có số hạng nào là lập phương của một số tự nhiên.*

Giải. Giả sử tồn tại một số tự nhiên m sao cho

$$3(n^2 + n) + 7 = m^3 \Leftrightarrow 3n(n + 1) + 7 = m^3,$$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên $n(n+1)$ là số chẵn, suy ra $3n(n+1)+7$ là số lẻ, do đó m^3 là một số lẻ. Đặt $m = 2k+1, k \in \mathbb{N}$. Như vậy, suy ra

$$3n^2+3n+7 = 8k^3+12k+6k+1 \Leftrightarrow 3n^2+3n+6 = 8k^3+12k+6k \Leftrightarrow 8k^3 = 3(n^2+n-4k-2k-2)$$

Vì $3(n^2+n-4k-2k-2)\vdots 3$ nên $8k^3 \vdots 3$. Đặt $t = 3l, l \in \mathbb{N}$. Suy ra

$$n^2+n+2 = 72l+36l+6l$$

Ta có $72l+36l+6l$ chia hết cho 3, mà n^2+n+2 không chia hết cho 3 $\forall n \in \mathbb{N}$ (mâu thuẫn).
Vậy trong dãy số đã cho, không có số hạng nào là lập phương của một số tự nhiên.
Dãy phân tuyến tính

Bài toán 3.14. *Cho $\alpha > 1$, và dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi*

$$x_n = \frac{\alpha^n - 1}{n}, \ \ n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng $\{x_n\}$ là dãy số tăng.

Giải. Xét hiệu $x_{n+1} - x_n$, ta có

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{\alpha^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{\alpha^n - 1}{n} \\ &= \frac{n(\alpha^{n+1} - 1) - (n+1)(\alpha^n - 1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{n\alpha^{n+1} - (n+1)\alpha^n + 1}{n(n+1)} \\ &= \frac{(\alpha - 1)(n\alpha^n - 1 - \alpha - \cdots - \alpha^n)}{n(n+1)} > 0, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Vậy nên $\{x_n\}$ là dãy số tăng.

Bài toán 3.15. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi công thức*

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm phần nguyên của số

$$A = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{2007}+1}.$$

Giải. Theo cách xác định dãy ta có $x_n > 0, x_{n+1} > x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Từ giả thiết $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$, suy ra

$$\frac{1}{x_k+1} = \frac{x_k}{x_k(x_k+1)} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \tag{3.5}$$

Lần lượt thay $k = 1, 2, \ldots, 2007$ vào công thức (3.5) rồi cộng theo vế, ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{2007}+1} \\ &= \Big(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\Big) + \Big(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{x_{2007}} - \frac{1}{x_{2008}}\Big) \\ &= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{2008}} = 2 - \frac{1}{x_{2008}} < 2, (x_{2008} > 0). \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \\ x_3 &= \frac{9}{16} + \frac{3}{4} = \frac{21}{16} > 1. \end{aligned}$$

Mà $\{x_n\}$ là dãy số tăng, nên $x_{2008} > x_3 > 1$, suy ra $A > 1$. Do đó $1 < A < 2$.
Vậy $[A] = 1$.

Kết luận

Luận văn đã giải quyết được các vấn đề chính sau

(i) Nêu các khái niệm liên quan đến các dãy số đặc biệt: cấp số cộng, cấp số nhân, cấp số điều hoà, các khái niệm tuần hoàn cộng tính và tuần hoàn nhân tính.

(ii) Giải quyết các bài toán xác định dãy số dạng tuyến tính với hệ số hằng có phương trình đặc trưng dạng bậc hai, bậc ba có các nghiệm đều thực. Xét một số bài toán xác định dãy số dạng tuyến tính với hệ số là luỹ thừa của n có phương trình đặc trưng dạng bậc hai, bậc ba có nghiệm thực.

(iii) Trình bày các bài toán xác định dãy số dạng bậc nhất $y = ax$, bậc hai $y = ax^2$, phân tuyến tính ($y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, trong đó $ad - bc \neq 0$), hàm phân thức bậc hai chia bậc nhất ($y = \dfrac{x^2+d}{2x}$) và hàm phân thức bậc nhất chia bậc hai ($y = \dfrac{2x}{1+dx^2}$).

(iv) Trình bày các dạng toán liên quan đến các dãy số đặc biệt: bài toán ước lượng tổng và tích vô hạn phần tử, bài toán tính giới hạn của một số dãy số, các tính chất của dãy phi tuyến.

Trong mỗi phần của luận văn, tác giả đã cố gắng trình bày chi tiết các cách giải và có những ví dụ cụ thể để mô tả tường minh phương pháp đưa ra trước đó, đồng thời trong phần một số bài tập áp dụng ở cuối mỗi chương và chương 3, tác giả đã thực hiện nêu một số dạng toán liên quan đến bài toán xác định dãy và các bài toán liên quan đến dãy số.

Tài liệu tham khảo

[1] Phan Huy Khải, (2007), *Các bài toán về dãy số*, NXB Giáo Dục.

[2] Phan Huy Khải, (1996), *10000 bài toán về dãy số* , NXB Hà Nội.

[3] Nguyễn Văn Mậu, (2007), *Nội suy và áp dụng*, NXB Giáo Dục.

[4] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), (2004), *Một số chuyên đề toán học chọn lọc bồi dưỡng học sinh giỏi*. ĐHKHTN Hà Nội

[5] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), (2007), *Một số chuyên đề toán chọn lọc*. NXB Giáo Dục.

[6] Nguyễn Văn Mậu, (2005), *Một số bài toán chọn lọc về dãy số,* NXB Giáo Dục.

[7] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Thuỷ Thanh, (2003), *Giới hạn của dãy số và hàm số*, NXB Giáo Dục.

[8] *Các đề thi Olympic Toán học Quốc tế*, 1965-2005.

[9] Các đề thi vô địch toán 19 nước, (2002), NXB Trẻ.

[10] Tủ sách toán học & tuổi trẻ, *Các bài thi Olympic toán trung học phổ thông Việt Nam (1990-2006), (2007)*, NXB Giáo Dục.

[11] *Tuyển tập các đề thi Olympiad 30 - 4.*

[12] *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ (Quyển 1)*, (2005), NXB Giáo Dục.

[13] *Tuyển tập 30 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, (1998), NXB Giáo Dục.

[14] Tạp chí Crux, 1996 - 2006, www.khoia0.com , www.mathnfriend.net, www.kalva.demon.co.uk, www.mathlinks.ro, www.diendantoanhoc.net