

PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH NHÂN TỬ TRONG PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bùi Thế Việt, lớp 10 Toán 2, THPT Chuyên Thái Bình, Thái Bình

Như chúng ta đã biết, phương trình và hệ phương trình là một dạng toán hay và khó, được rất nhiều bạn học sinh và thầy cô giáo yêu thích. Nó thường xuyên xuất hiện trong các kì thi quan trọng như kì thi HSG, tốt nghiệp THPT, Đại học và Cao đẳng, ...Tuy nhiên, để giải một phương trình hay hệ phương trình, nhiều khi chúng ta cần phải nhóm, phân tích hợp lý để có nhân tử, tạo điều kiện dễ dàng hơn trong việc giải toán. Đó là một điều khá khó, không hẳn ai cũng làm được, không có phương pháp chung để giải. Em xin trình bày ý tưởng của em về phương pháp phân tích thành nhân tử trong Phương trình vô tỷ và Hệ phương trình có hệ số nguyên.

I. Phương trình vô tỷ:

Như chúng ta đã biết, việc phân tích thành nhân tử trong phương trình vô tỷ thường được đưa về dạng:

$$f + k\sqrt{g} = (a + k_1\sqrt{g_1})(b + k_2\sqrt{g_2})$$

Phương pháp phân tích:

1. Tìm nghiệm của phương trình

2. Ta chia làm hai trường hợp:

a) Nghiệm của phương trình là số vô tỷ

Phương pháp được thể hiện qua ví dụ sau:

VD1: Giải phương trình:

$$f(x) = x^2 + 1 - (x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} = 0$$

Hướng giải:

Bước 1: Tìm tập nghiệm của phương trình:

$$S = \{1 \pm \sqrt{2}\}$$

Bước 2: Tại giá trị x là nghiệm thì giá trị của căn thức là bao nhiêu:

$$x = 1 + \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} = 2$$

$$x = 1 - \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} = 2$$

Điều này chứng tỏ sau khi phân tích thành nhân tử thì sẽ có nhân tử là $(\sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2)$

Bước 3: Xét tổng, hiệu để làm mất căn thức:

$$f(x) + (x+1)(\sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2) = x^2 - 2x - 1$$

Bước 4: Nhân liên hợp nhân tử ở bước 2:

$$(\sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2)(\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2) = x^2 - 2x - 1$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2)(\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2) \\ &- (x+1)(\sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2) \\ &= (\sqrt{x^2 - 2x + 3} - 2)(\sqrt{x^2 - 2x + 3} - x + 1) \end{aligned}$$

Nhận xét: Phương pháp này áp dụng cho các bài phương trình vô tỷ mà chỉ có chứa một căn thức và nghiệm của phương trình là số vô tỷ. Tuy nhiên, để mở rộng phạm vi của phương pháp thì hãy xét ví dụ sau:

VD2: Giải phương trình:

$$f(x) = 5x + 7 + 13\sqrt{x-1} - 9\sqrt{x+1} - 7\sqrt{x^2-1} = 0$$

Hướng giải: (tương tự **VD1**)

Bước 1: Tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{ \frac{20-4\sqrt{7}}{9}, \frac{35+9\sqrt{5}}{8} \right\}$$

Bước 2: Tại $x = \frac{20-4\sqrt{7}}{9}$ thì

$$\sqrt{x-1} = \frac{-2+\sqrt{7}}{3} \quad \text{và} \quad \sqrt{x+1} = \frac{-1+2\sqrt{7}}{3}$$

Bước 3: Do hệ số của phương trình vô tỷ đều là số nguyên nên giả sử sau khi phân tích $f(x)$ thành nhân tử thì trong nhân tử đó có dạng $(a\sqrt{x-1} + b\sqrt{x+1} + c)$ với

a, b, c là các số nguyên. Do đó, ta chỉ cần tìm mối liên hệ giữa các căn thức:

$$\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-1} - 1 = 0$$

Tương tự với nghiệm $x = \frac{35+9\sqrt{5}}{8}$ thì mối

liên hệ giữa các căn thức là:

$$\sqrt{x-1} - 3\sqrt{x+1} + 6 = 0$$

Do đó $f(x)$ chứa các nhân tử

$$(\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-1} - 1) \quad \text{và} \quad (\sqrt{x-1} - 3\sqrt{x+1} + 6)$$

Bước 4: Nhắm thấy

$$f(x) = (\sqrt{x-1} - 3\sqrt{x+1} + 6)(2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} + 1)$$

(nếu không thì từ các nhân tử, ta biến đổi dần dần $f(x)$ thành các cụm chứa nhân tử đó)

b) Nghiệm của phương trình là số nguyên:

TH1: Phương trình vô tỷ chỉ có một căn thức, biểu thức trong căn có dạng $\sqrt{ax+b}$

Lưu ý: Kể cả khi nghiệm của phương trình là số vô tỷ vẫn có thể áp dụng được phương pháp này.

VD3: Giải phương trình:

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2 - x\sqrt{3x-2} = 0$$

Hướng giải:

Bước 1: Đặt $t = \sqrt{3x-2} \rightarrow x = \frac{t^2+2}{3}$

Bước 2: Thế $x = \frac{t^2+2}{3}$ vào phương trình, ta được:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}\right)^2 - t^2 - \left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}\right)t \\ &= \frac{1}{9}(t-1)(t-2)(2t^2+3t+4) \end{aligned}$$

Bước 3: Thay ngược trở lại: $t = \sqrt{3x-2}$ và $t^2 = 3x-2$ vào các nhân tử, ta được:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{9}(\sqrt{3x-2}-1)(\sqrt{3x-2}-2)(2x+\sqrt{3x-2}) \\ &= \frac{1}{9}(\sqrt{3x-2}-1)(\sqrt{3x-2}-2)(2x+\sqrt{3x-2}) \end{aligned}$$

Từ đó ta có thể phân tích thành nhân tử.

TH2: Phương trình vô tỷ chứa 1 căn thức nhưng biểu thức trong căn thức là đa thức bậc cao.

VD4: Giải phương trình:

$$f(x) = 2x^3 + x - 2 - (4x^2 - x + 2)\sqrt{x^2 - x - 1} = 0$$

Nhận xét: Phương trình này khá khó phân tích thành nhân tử vì nó chỉ có nghiệm $x = 2$ nên căn thức và biến khó có mối liên hệ nào. Do đó, ta sẽ nghĩ tới việc tìm nghiệm phức của phương trình.

Bước 1: Từ giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} 0 &= (2x^3 + x - 2)^2 - (4x^2 - x + 2)^2 (x^2 - x - 1) \\ &= -(x-2)(3x^2 - 3x + 2)(4x^3 + 4x^2 + 3x + 2) \end{aligned}$$

Ta không quan tâm đến nghiệm $x = 2$ mà quan tâm đến nhân tử $3x^2 - 3x + 2$.

Bước 2: Nếu x thỏa mãn $3x^2 - 3x + 2 = 0$ thì

$$\text{khi đó } \sqrt{x^2 - x - 1} = \frac{\sqrt{15}}{3}i = 1 - 2x$$

Do đó $f(x)$ sẽ có nhân tử $(\sqrt{x^2 - x - 1} - 2x + 1)$

Bước 3: Xét tổng, hiệu với nhân tử để làm mất căn thức:

$$f(x) + (4x^2 - x + 2)(\sqrt{x^2 - x - 1} - 2x + 1)$$

$$= -2x(3x^2 - 3x + 2)$$

Bước 4: Nhân liên hợp nhân tử tìm được ở bước 2:

$$(\sqrt{x^2 - x - 1} - 2x + 1)(\sqrt{x^2 - x - 1} + 2x - 1)$$

$$= -3x^2 + 3x - 2$$

Từ đó ta được:

$$f(x)$$

$$= 2x(\sqrt{x^2 - x - 1} - 2x + 1)(\sqrt{x^2 - x - 1} + 2x - 1)$$

$$- (4x^2 - x + 2)(\sqrt{x^2 - x - 1} - 2x + 1)$$

$$= (\sqrt{x^2 - x - 1} - 2x + 1)(2x\sqrt{x^2 - x - 1} - x - 2)$$

TH3: Phương trình vô tỷ chứa nhiều căn thức và các hệ số là các số nguyên nhỏ

VD5: Giải phương trình:

$$8x^3 - 8x^2 - 8x - 127 + 73\sqrt{x+1} + 39x\sqrt{x-1} = 0$$

Hướng giải:

Ta có thể biến đổi phương trình thành

$$8b^2 - 8a^2 - 119 + 73a + 39b = 0 \quad \text{với}$$

$$a = \sqrt{x+1}, b = x\sqrt{x-1}$$

Khi đó $8b^2 - 8a^2 - 119 + 73a + 39b$

$$= -(8a + 8b - 17)(a - b - 7) = 0$$

TH4: Phương trình vô tỷ có nhiều căn thức, có nhiều hơn hai nghiệm hữu tỷ:

Lưu ý: Trường hợp này hiếm gặp

VD6: Giải phương trình:

$$11x + 47 - \sqrt{x^2 - 1} - 6\sqrt{x-1} - 38\sqrt{x+1} = 0$$

Hướng giải:

Bước 1: Tìm tập nghiệm của phương trình:

$$S = \left\{ \frac{5}{4}, \frac{325}{36} \right\}$$

Bước 2: Xét từng giá trị của nghiệm để tìm hai số a, b thỏa mãn:

$$\sqrt{x-1} + a\sqrt{x+1} + b = 0$$

$$\text{Ta được } a = -\frac{7}{5}, b = \frac{8}{5}$$

Chúng ta đa thức có một nhân tử

$$(5\sqrt{x-1} - 7\sqrt{x+1} + 8)$$

Bước 3: Chia đa thức ta được

$$(5\sqrt{x-1} - 7\sqrt{x+1} + 8)(2\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x+1} - 2)$$

Tóm lại: Việc phân tích thành nhân tử trong phương trình vô tỷ sẽ dễ dàng hơn trong việc tìm được nghiệm của phương trình. Việc tìm nghiệm còn giúp ích trong việc giải hệ phương trình, do đó kỹ năng nhắm nghiệm cũng khá quan trọng.

II. Hệ phương trình hệ số nguyên

Sau đây là một phương pháp mới em tự nghĩ ra cho việc giải hệ phương trình với hệ số nguyên. Phương pháp này yêu cầu phải biết trước một vài cặp nghiệm của hệ phương trình và cũng yêu cầu sự chăm chỉ trong việc phân tích thành nhân tử.

Để hiểu được phương pháp, ta thử làm một ví dụ sau:

VD7: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - 9y^2 + 23y - 17 = 0 \\ x^2 - 2xy + 3y^2 - 6y - 3 = 0 \end{cases}$$

Hướng giải:

Đặt $a = x^2 + 3xy - 9y^2 + 23y - 17$ và

$$b = x^2 - 2xy + 3y^2 - 6y - 3$$

Cách 1: Từ giả thiết ta có:

$$0 = a + b = (x + 2y - 5)(2x - 3y + 4)$$

Cách 2: Từ giả thiết ta có:

$$0 = 33a + 59b = (23x + 24y - 123)(4x - 5y + 6)$$

Từ các cách trên ta có thể thế $x = my + n$ vào một trong hai phương trình $a = 0$ hoặc $b = 0$. Lời giải dành cho bạn đọc

Nhận xét: Theo cách 1, nhiều người có thể nghĩ tới việc phân tích nhân tử $a + b$. Tuy nhiên, nếu làm theo cách 2 thì tại sao lại xuất hiện việc phân tích thành nhân tử $33a + 59b$, tại sao lại không lấy các hệ số khác mà lại lấy hệ số $(33, 59)$? Do đó phương pháp này giúp các bạn tìm các hệ số cần biến đổi để phân tích được thành nhân tử.

Như phương pháp phân tích thành nhân tử trong phương trình vô tỷ, ta chia phương pháp này làm các trường hợp khác nhau:

TH1: Hệ phương trình hai ẩn dạng:

$$\begin{cases} A = a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \\ B = a_2x^2 + b_2y^2 + c_2xy + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases}$$

Ta cần tìm hệ số k sao cho $A + kB$ có thể phân tích thành nhân tử.

Cách 1: Đặt $a = a_1 + ka_2, b = b_1 + kb_2, c = c_1 + kc_2,$

$$d = d_1 + kd_2, e = e_1 + ke_2, f = f_1 + kf_2$$

Khi đó k là nghiệm của phương trình sau với $a \neq 0$

$$(cd - 2ae)^2 = (c^2 - 4ab)(d^2 - 4af)$$

hoặc có thể viết gọn hơn thành:

$$cde + 4abf = ae^2 + bd^2 + fc^2$$

Cách 2: Tìm ít nhất hai cặp nghiệm của hệ phương trình, giả sử đó là $(x, y) = (m, n); (p, q)$

Khi đó hai điểm $(m, n); (p, q)$ thuộc đường thẳng $(n - q)x - (m - p)y + mq - np = 0$

Cho (a, b) là một điểm khác $(m, n); (p, q)$ thuộc đường thẳng này. Khi đó, tại $(x, y) = (a, b)$ thì $A = A_1, B = B_1$ là các hằng

số. Vậy $k = -\frac{A_1}{B_1}$

VD8: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 + 8y^2 - 6xy + x - 3y - 624 = 0 \\ 21x^2 - 24y^2 - 30xy - 83x + 49y + 585 = 0 \end{cases}$$

Hướng giải:

a) Theo cách 1 thì k là nghiệm của phương trình: $cde + 4abf = ae^2 + bd^2 + fc^2$

$$\text{Với } a = 1 + 21k, b = 8 - 24k, c = -6 - 30k$$

$$d = 1 - 83k, e = -3 + 49k, f = -624 + 585k$$

$$\text{Ta được } (9k - 11)(31k - 1)(5265k - 227) = 0$$

Từ đó ta được 3 cách làm cho bài toán này.

b) Theo cách 2, ta tìm trước các nghiệm của hệ phương trình:

$$\left(\frac{13}{3}, -\frac{169}{24}\right); \left(-222, -\frac{897}{8}\right); \left(-\frac{131}{72}, \frac{1201}{144}\right)$$

Chọn hai cặp nghiệm bất kì, ví dụ như

$$\left(\frac{13}{3}, -\frac{169}{24}\right); \left(-222, -\frac{897}{8}\right). \text{ Khi đó đường}$$

thẳng đi qua hai điểm này là:

$$26x - 56y - 507 = 0$$

Do đó, điểm $\left(\frac{39}{2}, 0\right)$ thuộc đường thẳng này.

$$\text{Tại điểm này thì } A = -\frac{897}{4}, B = \frac{27807}{4}$$

$$\text{Vậy } k = -\frac{A}{B} = \frac{1}{31}$$

Tức là phân tích thành nhân tử đa thức

$$31A + B, \text{ ta được}$$

$$(2x - 4y + 37)(26x - 56y - 507) = 0$$

Lưu ý: Theo cách 2 thì sau khi tìm được k và phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm nghiệm thì sau khi phân tích thành nhân tử, sẽ có một nhân tử chính là phương trình đường thẳng đó.

TH2: Hệ phương trình hai ẩn hệ số nguyên có dạng khác TH1

Ở đây, hệ số k cần nhân thêm vào không phải là một hằng số mà là một biểu thức chứa biến.

Cách làm sẽ có một số sự khác biệt so với TH1. Hãy xem cách làm một bài hệ phương trình sau đây, nó sẽ khiến một bài Hệ phương trình có khá nhiều cách làm.

VD9: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x^2 + xy - 9x - y^2 - 9y = 0 \\ 2x^3 - 20x - x^2y - 20y = 0 \end{cases}$$

Hướng giải:

$$\text{Đặt } a = 3x^2 + xy - 9x - y^2 - 9y = 0$$

$$b = 2x^3 - 20x - x^2y - 20y = 0.$$

Bước 1: Tìm nghiệm của hệ phương trình, cần ít nhất là hai bộ nghiệm hữu tỷ hoặc một bộ nghiệm vô tỷ.

Phương trình trên có 2 cặp nghiệm dễ thấy nhất là $(x, y) = (0, 0); (2, -1)$

Ngoài ra còn các cặp nghiệm

$$(10, 15); \left(\frac{15 + \sqrt{145}}{2}, 11 + \sqrt{145} \right);$$

$$\left(\frac{15 - \sqrt{145}}{2}, 11 - \sqrt{145} \right)$$

Bước 2: Chọn 2 cặp nghiệm bất kì, ví dụ như $(0, 0); (2, -1)$. Khi đó đường thẳng đi qua hai điểm này là $x + 2y = 0$

Tại $x = -2y$ thì $a = 9y(y + 1)$ và

$$b = -20y(y + 1)(y - 1)$$

Vậy để sau khi phân tích thành nhân tử có nhân tử là $(x + 2y)$ thì cần lấy

$$20(y - 1)a + 9b = 0 \text{ rồi phân tích thành nhân tử.}$$

$$\text{Tức là } 20(y - 1)a + 9b$$

$$= (x + 2y)(18x^2 + 15xy - 60x - 10y^2 - 80y)$$

Bước 3: Xét hệ mới:

$$\begin{cases} 3x^2 + xy - 9x - y^2 - 9y = 0 \\ 18x^2 + 15xy - 60x - 10y^2 - 80y = 0 \end{cases}$$

Theo TH1 ta sẽ tìm được các cách khác nhau để phân tích nhân tử hệ mới này.

Nhận xét: Với mỗi 2 cặp nghiệm, ta có được khoảng 3 cách cho mỗi trường hợp. Do đó bài toán trên có khoảng hơn 10 cách làm, nhưng hầu hết cách làm đều giống nhau. Với những cách làm kiểu như này, khá khó khăn cho người chấm thi, và cũng khá khó khăn cho cả người làm bài vì dễ viết sai. Tuy nhiên, phương pháp này có thể giải quyết được nhiều hệ phương trình hệ số nguyên. Xét ví dụ sau:

VD10: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 - y^4 - 240 = 0 \\ x^3 - 2y^3 - 3(x^2 - 4y^2) + 4(x - 8y) = 0 \end{cases}$$

Hướng giải: Gọi a là VT của PT(1)

b là VT của PT(2). Dễ thấy hệ có nghiệm

$(x, y) = (4, 2); (-4, -2)$ nên theo phương pháp

thì chúng ta nghĩ tới việc cho $x = 2y$, từ đó lấy

$$5(y^2 + 4)a - 2yb = 0. \text{ Tuy nhiên, cách này khá}$$

dài, không khả quan vì hai phương trình không chứa hệ số xy . Ta sẽ đặt $x = \pm y + t$ để PT(1) giảm bậc xuống còn bậc 3, PT(2) vẫn là bậc 3, thuận tiện trong việc tìm hệ số k là một hằng số chứ không phải là một biểu thức nữa. Do hệ có nghiệm $(x, y) = (4, 2); (-4, -2)$ nên ta tìm được nhân tử là $(x + y - 6)$ hoặc $(x + y + 6)$

$$\text{Tại } x = 6 - y \text{ thì } a = -24(y - 2)(y^2 - 7y + 22)$$

$$\text{Và } b = -3(y - 2)(y^2 - 7y + 22)$$

$$\text{Duy ra } k = -8$$

Vậy lấy $PT(1) - 8PT(2)$ ta được:

$$(x + y - 6)(x - y + 2)((x - 2)^2 + (y - 4)^2) = 0$$

Còn tại $x = -6 - y$ thì

$$a = 24(y + 2)(y^2 + 7y + 22) \text{ và}$$

$$b = -3(y + 2)(y^2 + y + 58)$$

Khi đó k không phải là hằng số nên loại

Vậy ta có thể phân tích nhân tử bằng cách trên.

VD11: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2y^2 + 3x + 3y - 3 = 0 \\ x^2y - 4xy - 3y^2 + 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

Hướng giải:

Gọi a, b là VT của PT(1), PT(2)

Dễ thấy HPT có nghiệm $(x, y) = (0, 1); (1, 0)$

nên ta nghĩ tới việc thay $x = 1 - y$

$$\text{Tại } x = 1 - y \text{ thì } a = y^2(y - 1)^2 \text{ và}$$

$$b = y^2(y - 1). \text{ Do đó } k = 1 - y$$

Vậy ta phân tích thành nhân tử đa thức:

$$a + (1 - y)b, \text{ ta được:}$$

$$(x + y - 1)(3y^2 + xy - 2y + 2) = 0$$

Xét hệ mới:

$$\begin{cases} 3y^2 + xy - 2y + 2 = 0 \\ x^2y - 4xy - 3y^2 + 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

Trong các nghiệm của HPT này, có một cặp nghiệm mà ta phải để ý tới:

$$(x, y) = \left(3, \frac{-1 \pm \sqrt{23}i}{6} \right)$$

Do đó, đường thẳng đi qua 2 điểm này là $x = 3$. Tại $x = 3$ thì HPT trở thành 2 PT bậc 2 ẩn y nên ta cho $y = 0$ (hoặc bao nhiêu cũng được), khi đó $3y^2 + xy - 2y + 2 = 2$ và $x^2y - 4xy - 3y^2 + 2y - x + 1 = -2$.

Từ đó $k = 1$, nên cộng 2 PT này với nhau, ta được: $(x - 3)(xy - 1) = 0$

Lời kết: Hy vọng đây sẽ là một con đường mòn cho những bài toán liên quan đến việc phân tích đa thức thành nhân tử. Sau đây là một số bài tập áp dụng:

Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

1. $x^2 + x + 12\sqrt{x+1} - 36 = 0$

2. $(8x-3)\sqrt{2x^2+1} + 3x^2 + x + 3 = 0$

3. $(4x-1)\sqrt{x^3+1} - 2x^3 - 2x - 1 = 0$

4. $(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1})(x^2 + \sqrt{x^2+4x+3} - 2x) = 0$

5. $3x - 7 + 4\sqrt{x} + 4\sqrt{x-1} = 0$

6.
$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 + 49 = 0 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} xy^2 - 2y + 3x^2 = 0 \\ y^2 + x^2y + 2x = 0 \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 8x + 2y \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} 4x^4 + y^4 = 4x + y \\ x^3 + y^3 - xy^2 = 1 \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} 14x^2 - 21y^2 + 22x - 39y = 0 \\ 35x^2 + 28y^2 + 11x - 10y = 0 \end{cases}$$