**1. Giai thừa :** n! = 1.2...n;
0! = 1; n! /(n – k)! = (n – k + 1).(n – k + 2) ... n

**2. Quy tắc cộng :** Trường hợp 1 có m cách chọn, trường hợp 2 có n cách chọn; mỗi cách chọn đều thuộc đúng một trường hợp. Khi đó, tổng số cách chọn là : m + n.

**3. Quy tắc nhân :** Hiện tượng 1 có m cách chọn, mỗi cách chọn này lại có n cách chọn hiện tượng 2. Khi đó, tổng số cách chọn liên tiếp hai hiện tượng là : m x n.

**4. Hoán vị :** Có n vật khác nhau, xếp vào n chỗ khác nhau.
Số cách xếp : $P_n = n!$.

**5. Chỉnh hợp :** Có n vật khác nhau. Chọn ra k vật, xếp vào k chỗ khác nhau số cách : $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, $A_n^k = C_n^k.P_k$ . (n ∈ N; k ≤ n)

**6. Tổ hợp :** Có n vật khác nhau, chọn ra k vật.

Số cách chọn : $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Chỉnh hợp = <u>tổ hợp</u> rồi <u>hoán vị</u>

$C_n^k = C_n^{n-k};\ C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$

**7. Công thức nhị thức Niutơn**

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + ... + C_n^k a^{n-k}b^k + ... + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

**<u>Chú ý</u>**: • Vế phải có n+1 số hạng .
• Mũ của a và b trong mỗi số hạng có tổng bằng n .
• Số hạng tổng quát thứ k+1 có dạng : $\boxed{T_{k+1} = C_n^k a_n^{n-k} b^k}$
• Tổng các hệ số là : $2^n$

Một số công thức đặc biệt:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^k x^k + ... + C_n^n x^n$$

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n;$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^k C_n^k + ... + (-1)^n C_n^n = 0$$

**Đặt P(x) =** $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n$
**P(x) là đa thức bậc n nên ta có thể tính giá trị tại một điểm bất kì; lấy đạo hàm; tích phân trên một đoạn bất kì. Khi đó ta có các bài toán mới.**

Ví dụ: P(2001) = $C_n^0 + 2009C_n^1 + ... + 2009^n C_n^n = 2010^n$

❋ $P'(x) = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2C_n^3 + ... + nx^{n-1}C_n^n = \left[(1+x)^n\right]' = n(1+x)^{n-1}$

• $P'(1) = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n.2^{n-1}$

• $P'(-1) = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + (-1)^n nC_n^n = 0$

• $P'(a) = C_n^1 + 2aC_n^2 + 3a^2C_n^3 + ... + na^{n-1}C_n^n = n(1+a)^{n-1}$

• $xP'(x) = xC_n^1 + 2x^2C_n^2 + 3x^3C_n^3 + ... + nx^nC_n^n = nx(1+x)^{n-1}$

$\Rightarrow C_n^1 + 2^2 xC_n^2 + 3^2 x^2 C_n^3 + ... + n^2 x^{n-1} C_n^n = n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2}$

❋ $P''(x) = 2C_n^2 + 3.2xC_n^3 + 4.3x^2C_n^4 + ... + n(n-1)x^{n-2}C_n^n$
$= \left[n(1+x)^{n-1}\right]' = n(n-1)(1+x)^{n-2}$

• $P''(1) = 2C_n^2 + 3.2C_n^3 + 4.3C_n^4 + ... + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$

❋ $\int_0^a P(x)dx = \int_0^a (C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n)dx = \int_0^a (1+x)^n dx$

$\Leftrightarrow aC_n^0 + \frac{1}{2}a^2C_n^1 + \frac{1}{3}a^3C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}a^{n+1}C_n^n = \frac{(1+a)^{n+1}-1}{n+1}$ ....

## 1. Các bài toán về phép đếm:

**<u>PHƯƠNG PHÁP GIẢI:</u>** Thường lập luận để có thể coi mỗi sự việc mà ta phải đếm hoặc chọn là việc lấy ra k phần tử từ một tập hợp A có n phần tử (k≤ n).

❋ Nếu k phần tử được lấy ra từ tập A không có vấn đề thứ tự thì dùng số tổ hợp chập k của n phần tư của tập A .

❋ Nếu giữa k phần tử lấy ra từ A có vấn đề thứ tự phải chú ý

• Nếu vai trò các phần tử được lấy ra từ A như nhau(nghĩa là các phần tử của A có cơ hội đồng đều trong sự lựa chọn) thì dùng số chỉnh hợp khi k< n và dùng hoán vị khi k = n.

• Nếu vai trò các phần tử lấy ra từ A khác nhau thì lý luận bằng qui tắc đếm

**<u>Bài 1:</u>** Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5 mà mỗi số có 4 chữ số khác nhau.
HD: Xét 2 trường hợp. ĐS: $9.8.7 + 8.8.7 = 952$ .

**<u>Bài 2:</u>** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên

**a)** Chẵn gồm 4 chữ số ĐS : $3.6^3$
**b)** Lẻ gồm 4 chữ số ĐS : $3.6^3$
**c)** Chẵn không ít hơn 4 chữ số và không vượt quá 6 chữ số
**d)** 5 chữ số khác nhau có mặt số 2 ? .
**e)** 5 chữ số khác nhau có mặt 2 số 1 và 6 ?
**f)** 6 chữ số khác nhau và trong mỗi số đó tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng của 3 chữ số cuối một đơn vị.

**HD:** c) Xét 3 trường hợp TH1 : Gồm 4 chữ số . TH2 : Gồm 5 chữ số.
TH3 : Gồm 6 chữ số. ĐS : $3(6^3 + 6^4 + 6^5)$

d) Chữ số 2 có có 5 vị trí vậy có 5. $A_5^2 = 120$ .5= 600 số .

e) Số 1và 6 có $A_5^2$ , xếp 4 số vào 3 vị trí còn lại là $A_4^3$ . ĐS $A_5^2 . A_4^3 = 480$

f) Vì tổng tất cả các số là 21 nên tổng ba số đầu là 10, ba số cuối là 11.
Có 3 cặp số thoả mãn là:
+ Cặp 3 số đầu gồm 1, 4, 5 ba số cuối gồm 2, 3, 6. Có 3!.3! = 36 số.
+ Cặp 3 số đầu gồm 2, 3, 5 ba số cuối gồm 1, 4, 6. Có 3!.3! = 36 số.
+ Cặp 3 số đầu gồm 1, 3, 6 ba số cuối gồm 2, 4, 5. Có 3!.3! = 36 số.
Vậy có: 3.36 = 108 số.

**<u>Bài 3</u>**: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh 3.
HD: Coi hai số 2 và 3 là một cặp. Xét 2 trường hợp:
+ TH1: cặp 2,3 đứng đầu, có: 2.4! = 48 số.
+ TH2: cặp 2, 3 đứng ở các vị trí khác, có:4.2.3.3! = 144. ĐS: 192

**<u>Bài 4</u>**:Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 lập được bao nhiêu số tự nhiên 6 chữ số khác nhau và tổng của các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn bằng 8.

**<u>Bài 5</u>**: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau và nhất thiết phải có 2 chữ số 1 và 5.

**<u>Bài 6</u>**: Một đội văn nghệ có 15 người gồm 10 nam và 5 nữ. hỏi có bao nhiêu cách lập một nhóm đồng ca gồm 8 người, biết rằng trong nhóm đó phải có ít nhất 3 nữ.

ĐS 4: $2.A_6^3.3! = 1440$ . ĐS B5: $5.4.A_5^3 = 1200$ . ĐS6: $C_5^3.C_{10}^5 + C_5^4.C_{10}^4 + C_5^5.C_3^{10}$

**<u>Bài 7</u>**: Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ, và 4 nhà vật lí nam. Lập một đoàn công tác gồm 3 người có cả nam và nữ, cần có cả nhà toán học và nhà vật lí. Hỏi có bao nhiêu cách? ĐS: 90 cách

**<u>Bài 8:</u>** Có 6 quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 6, 5 quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 5 và 4 quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 4. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu vừa khác màu vừa khác số? ĐS: 64 cách

**<u>Bài 9:</u>** Có bao nhiêu cách phân phối 5 đồ vật khác nhau cho 3 người, sao cho mỗi người nhận được ít nhất 1 đồ vật. ĐS: 150 cách

**<u>Bài 10:</u>** Cho hình thập giác đều.
1) Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của thập giác, nhưng cạnh của tam giác không là cạnh nào của thập giác đó? ĐS: 50 tam giác; 10 hcn
2) Hỏi có thể lập được bao nhiêu hình chữ nhật có đỉnh là đỉnh của thập giác?

**<u>Bài 11:</u>** Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên, Hỏi có bao nhiêu cánh xếp trong mỗi trường hợp sau:
1) Bất cứ hai học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc ngồi đối diện nhau thì khác trường. ĐS: 1) 2.6!.6! 2) 12.10.8.6.4.2.6!
2) Bất cứ hai học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường.

**<u>Bài 12:</u>** Đội tuyển học sinh giỏi của trường gồm 18 em. Trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11, 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 học sinh trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh được chọn
HD: $C_{18}^8 - (C_{11}^8 + C_{12}^8 + C_{13}^8) = 41811$ .

## 2. Các bài toán nhị thức, phương trình bất phương trình tổ hợp, chỉnh hợp

1) Giải các PT, BPT:

a) $C_n^4 + C_n^5 = 3C_{n+1}^6$ (n = 6) b) $C_{n+2}^{n-1} + C_{n+2}^n > 2,5A_n^2$ (n=5)

c) $23A_n^4 = 24(A_{n+1}^3 - C_n^{n-4})$ (n ≥ 2) d) $A_n^3 + 2C_n^{n-2} \le 9n$ (n∈{3;4})

2) Giải bất PT hai ẩn n, k với n, k ≥ 0: $\dfrac{P_{n+5}}{(n-k)!} \le 60A_{n+3}^{k+2}$

ĐS: (0; 0), (1; 0), (1;1), (2;2), (3; 3).

3) Cho tập hợp A gồm n phần tử (n ≥ 4). Biết rằng số tập hợp con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập hợp con gồm 2 phần tử của A. ĐS: A có 18 phần tử.

4) CMR : $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 ... + nC_n^n = n.2^{n-1}$ .

HD: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n$

Lấy đạo hàm hai vế ta có : chọn x = 1 ⇒ đpcm.

5) CMR : $2C_n^0 + \dfrac{2^2}{2}C_n^1 + \dfrac{2^3}{3}C_n^2 + .... + \dfrac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n = \dfrac{3^{n+1}-1}{n+1}$

HD: Xét : $I = \int_0^2 (1+x)^n dx = \dfrac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^2 = \dfrac{3^{n+1}-1}{n+1}$ (1 )

Mà $I = (C_n^0 x + \dfrac{1}{2}C_n^1 x^2 + \dfrac{1}{3}C_n^2 x^3 + ... + \dfrac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1})\Big|_0^2$

$I = 2C_n^0 + \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ đpcm

6) Tính : $I = \int_0^1 (1+x)^n dx$ và S = $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + .... + \frac{1}{n+1}C_n^n$

HD : $I = \int_0^1 (1+x)^n dx = \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

$$I = \int_0^1 (C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n)dx = \left[C_n^0 x + C_n^1 \frac{x^2}{2} + ... + C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$= C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + .... + \frac{1}{n+1}C_n^n$ => S = $\left|\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\right.$

7) CMR: $1 + 4C_n^1 + 4^2 C_n^2 + ... + 4^{n-1}C_n^{n-1} + 4^n = 5^n$

HD : Khai triển : $(1+x)^n$ thay x= 4 $\Rightarrow$ đpcm.

8) CMR: $3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 ... + C_{16}^{16} = 2^{16}$

HD: Khai triển : $(3x-1)^{16}$ chọn x = 1 $\Rightarrow$ đpcm.

9) Tìm x ; y thuộc $N^*$ : $\frac{C_{x+1}^y}{6} = \frac{C_x^{y+1}}{5} = \frac{C_x^{y-1}}{2}$. ĐS : x=8 ; y = 3

10) CMR : $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 ... + nC_n^n = n2^{n-1}$

HD: Xét : $(1+x)^n$ khai triển. Lấy đạo hàm 2 vế. Chọn x = 1 $\Rightarrow$ đpcm .

11) Trong khai triển : $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{\frac{-28}{15}}\right)^n$ hãy tìm số hạng không chứa x . Biết : $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} + = 79$ . HD: k = 5 $\Rightarrow C_{12}^5 = 792$

12) Tính $I = \int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx$. Đổi biến: u= $1+x^3$ có $I = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$

Mặt khác ta có : $(1+x^3)^n = C_n^0 + C_n^2 x^3 + C_n^3 x^6 + ... + C_n^n x^{3n}$

Nhân hai vế cho $x^2$ , lấy tích phân hai vế .

Tìm nguyên hàm thế cận từ 0 –> 1 ta được vế trái .

**A-2002** Cho khai triển : $\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{-\frac{x}{3}}\right)^n$. Biết : $C_n^1 = 5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng 20. Hãy tìm n và x ? ĐS : n = 7 và x= 4 .

**D-2002** Tìm n $\in$ N*: $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^3 + ... + 2^n C_n^n = 243$

ĐS : Xét $(1+x)^n$ và chọn x= 2 => n= 5.

**A- 2003** Tìm hệ số của $x^8$ trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$.

Biết : $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$. HD : K= 4 => $C_{12}^4 = 495$.

**B-03** Cho n$\in$N* tính: $S = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + .. + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$

Xét : $(1+x)^n$ Khai triển tính tp hai vế ta có : $S = \frac{3^{N+1} - 2^{n+1}}{n+1}$

**D2003** Với n $\in$ N*, gọi $a_{3n-3}$ là hệ số của $x^{3n-3}$ trong khai triển thành đa thức của biểu thức $(x^2+1)^n(x+2)^n$.

Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$. ĐS: n = 5.

**A-2004** Tìm hệ số của $x^8$ trong khai triển :$[1+x^2(1-x)]^8$

Hd:Số hạng thứ 4 và thứ 5: $C_8^3 x^6(1-x)^3; C_8^4 x^8(1-x)^4 .KQ : 3C_8^3 + C_8^4 = 238.$

**D04** Tìm số hạng không chứa x: $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ (x > 0)ĐS : k = 4 $\Rightarrow$ 35

**B- 2004** Thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau : 5 câu khó ;10 câu tb ; 15 câu dễ. Hỏi từ 30 câu trên lập được bao nhiêu đề kiểm tra sao cho mỗi đề có 5 câu khác nhau trong đó mỗi đề nhất thiết phải có 3 loại câu hỏi : khó ; tb ; dễ và câu dễ không ít hơn hai .

Giải : Có ba THợp •2dễ + 1TB + 2 khó: 10500. • 2d + 2TB +1khó: 23625 • 3d + 1TB + 1 khó: 22750 . Tổng : 56.875 .

**A- 2005** Tìm số nguyên dương n sao cho :

$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1)2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005.$

Xét:$(1-x)^{2n+1}$. Khai triển, lấy đạo hàm hai vế, chọn x=2: (2n+1)=2005$\Leftrightarrow$n=1002

**B2005** Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ. ĐS: $C_{12}^4 C_3^1 . C_8^4 C_2^1 . C_4^4 C_1^1 = 207.900$

**D.2005** Tính giá trị biểu thức : $M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^4}{(n+1)!}$ . Biết rằng :

$C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$ .HD: n = 5; n = − 9(l). M= ¾

**CĐ05** Cho $(1-x)^n + x(1+x)^{n-1} = P_x$. Biết : $a_0 + a_1 + a_2 + … + a_n = 512$ .

Tìm $a_3$=? HD: Khai triển $P_x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + …. + a_nx^n$.

Cho x=1 thì: $2^{n-1} = a_0 + a_1 + a_2 + … + a_n = 512 = 2^9 \Rightarrow$ n = 10

$(1-x)^{10} + x(1+x)^9 \Rightarrow a_3 = C_9^2 - C_{10}^3 = -84$

**A2006** Tìm hệ số số hạng chứa $x^{26}$ trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$ ,

biết $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + ..... + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$

ĐS: n =10, hệ số = 210

**D2006** Có 12 HS : trong dó 5 HS lớp A; 4 HS lớp B và 3 HS lớp C . Cần 4 HS đi trực sao cho 4 HS nầy không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có mấy cách chọn .

HD : Số cách chọn 4 HS: $C_{12}^4$.

* 1A,1B;2C: $C_5^1.C_4^1.C_3^2$ =60; *1A,2B;1C: $C_5^1.C_4^2.C_3^1 = 90$ ;

* 2A,1B;2C: $C_5^2.C_4^1.C_3^2 = 120$ .

ĐS : $C_{12}^4$ - ( 60+90+120) = 495-270=225

**A2007** Cm $\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + ... + \frac{1}{20}C_{2n}^{2n} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$

**B2007** Tìm hệ số của $x^{10}$ trong khai triển nhị thức $(2+x)^n$ , biết rằng $3^n C_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - 3^{n-3}C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 2048$

ĐS: n = 11, hệ số = 22

**D2007** Tìm hệ số của $x^5$ trong khai triển biểu thức sau:
$P = x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$ ĐS: 3320

**Bdb07** Tìm x, y $\in$ N thỏa mãn hệ $\begin{cases} A_x^2 + C_y^3 = 22 \\ A_y^3 + C_x^2 = 66 \end{cases}$.

ĐK: x ≥ 2, y ≥ 3

$$\begin{cases} x(x-1) + \frac{1}{6}y(y-1)(y-2) = 22 \\ y(y-1)(y-2) + \frac{1}{2}x(x-1) = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6x + y^3 - 3y^2 + 2y = 132 & (1) \\ (y^3 - 3y^2 + 2y).2 + x^2 - x = 132 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6x + y^3 - 3y^2 + 2y = 132 \\ 11x^2 - 11x - 132 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \ hay\ x = -3\ (l) \\ y^3 - 3y^2 + 2y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$$

**Ddb07** Tìm hệ số của $x^8$ trong khai triển $(x^2 + 2)^n$, biết:
$A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49$ .

Điều kiện n ≥ 4. Ta có: $(x^2+2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{2k} 2^{n-k}$ .

Hệ số của số hạng chứa $x^8$ là $C_n^4 2^{n-4}$

Ta có: $A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49 \Leftrightarrow (n-2)(n-1)n - 4(n-1)n + n = 49$

$\Leftrightarrow n^3 - 7n^2 + 7n - 49 = 0 \Leftrightarrow (n-7)(n^2+7) = 0 \Leftrightarrow n = 7.$

Hs của $x^8$ là $C_7^4 2^3 = 280$

**B2008** Chứng minh rằng $\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \frac{1}{C_n^k}$ (n, k là các số nguyên dương, k ≤ n, $C_n^k$ là số tổ hợp chập k của n phần tử).

$\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \frac{n+1}{n+2}.\frac{C_{n+2}^{k+1}}{C_{n+1}^k.C_{n+1}^{k+1}} = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{C_n^k}$

**D2008** Tìm n $\in$ N* thoả hệ thức $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = 2048$

$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + xC_{2n}^1 + x^2C_{2n}^2 + x^3C_{2n}^3 + ... + x^{2n-1}C_{2n}^{2n-1} + x^{2n}C_{2n}^{2n}$

x = 1 : $2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$ (1)

x = - 1 : $0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + ... - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$ (2)

(1) - (2) : $2^{2n} = 2(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}) = 4096 = 2^{12} \Leftrightarrow$ n = 6.

Bài tập tham khảo

**Câu 1:** Một lớp có 33 học sinh, trong đó có 7 nữ. Cần chia lớp thành 3 tổ, tổ 1 có 10 học sinh, tổ 2 có 11 học sinh, tổ 3 có 12 học sinh sao cho trong mỗi tổ có ít nhất 2 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chia như vậy?

**Giải:** Có 3 trường hợp:

**Trường hợp 1:** Tổ 1 có 3 nữ, 7 nam $\Rightarrow C_7^3C_{26}^7$. Tổ 2 có 2 nữ, 9 nam $\Rightarrow C_4^2C_{19}^9$. Tổ 3 có 2 nữ, 10 nam $\Rightarrow C_2^2C_{10}^{10}$

Vậy ta có: $C_7^3C_{26}^7C_4^2C_{19}^9$ cách.

**Trường hợp 2:** Tổ 1 có 2 nữ, 8 nam $\Rightarrow C_7^2C_{26}^8$

Tổ 2 có 3 nữ, 8 nam $\Rightarrow C_5^3C_{18}^8$ , Tổ 3 có 2 nữ, 10 nam $\Rightarrow C_2^2C_{10}^{10}$ Vậy ta có: $C_7^2C_{26}^8C_5^3C_{18}^8$ cách

**Trường hợp 3:** Tổ 1 có 2 nữ, 8 nam $\Rightarrow C_7^2C_{26}^8$ , Tổ 2 có 2 nữ, 9 nam $\Rightarrow C_5^2C_{18}^9$ , Tổ 3 có 3 nữ, 9 nam $\Rightarrow C_3^3C_9^9$ ,

Vậy ta có: $C_7^2C_{26}^8C_5^2C_{18}^9$ cách

Theo quy tắc cộng ta có:

$C_7^3C_{26}^7C_4^2C_{19}^9 + C_7^2C_{26}^8C_5^3C_{18}^8 + C_7^2C_{26}^8C_5^2C_{18}^9$ cách.

**Câu 2:** Cho hai đường thẳng song song $d_1$ và $d_2$. Trên đường thẳng $d_1$ có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng $d_2$ có n điểm phân biệt $(n \geq 2)$. Biết rằng 2800 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Tìm n thoả mãn điều kiện trên.

**Giải:** Số tam giác có một đỉnh thuộc $d_1$, hai đỉnh thuộc $d_2$ là: $10C_n^2$

Số tam giác có một đỉnh thuộc $d_2$, hai đỉnh thuộc $d_1$ là: $nC_{10}^2$

Theo đề bài ta có:

$10C_n^2 + nC_{10}^2 = 2800 \Leftrightarrow n^2 + 8n - 560 = 0 \Leftrightarrow n = 20$

**Câu 3:** Từ các chữ số 0, 1,. 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số khác nhau và mỗi số lập được đều nhỏ hơn 25000.

**Giải:** Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ chẵn, $a_i \neq a_j \quad (i \neq j, n < 25000)$.

Vì $n < 25000 \Rightarrow a_1 \in \{1;2\}$ ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $a_1 = 1$. Ta có 1 cách chọn $a_1$. Ta có 4 cách chọn $a_5$ ( n chẵn). $A_5^3$ cách chọn $a_2a_3a_4$. Vậy ta có:

$1.4.A_5^3 = 240$ số n.

**Trường hợp 2:** $a_1 = 2$, $a_2$ chẵn nhỏ hơn 5.

Ta có 1 cách chọn $a_1$. Ta có 2 cách chọn $a_2$.

Ta có 2 cách chọn $a_5$. $A_4^2$ cách chọn $a_3a_4$.

Vậy ta có: $1.2.2.A_4^2 = 48$ số n.

**Trường hợp 3:** $a_1 = 2$, $a_2$ lẻ nhỏ hơn 5.

Ta có 1 cách chọn $a_1$. Ta có 2 cách chọn $a_2$

Ta có 3 cách chọn $a_5$ . $A_4^2$ cách chọn $a_3a_4$

Vậy ta có; $1.2.3.A_4^2 = 72$ số n.

Theo quy tắc cộng ta có: $240 + 48 + 72 = 360$ số n.

**Câu 4:** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số có 5 chữ số khác nhau trong đó có đúng 2 chữ số lẻ và 2 chữ số lẻ đó đứng cạnh nhau.

**Giải:** Số cách chọn hai chữ số lẻ đứng cạnh nhau từ 3 chữ số 1, 3, 5 là: $A_3^2 = 6$ cách. Ta xem mỗi cặp số lẻ như một phần tử x.Vậy mỗi số cần lập gồm phần tử x và 3 trong 4 chữ số chẵn 0, 2, 4, 6.

Gọi $n = \overline{a_4a_3a_2a_1a_0}$ . ta có các trường hợp sau:

**Trường hợp 1:** $a_0 = 0$. Đưa x vào 4 vị trí đầu: Có 3 cách. Đưa 2 chữ số chẵn 2,4, 6 vào 2 vị trí còn lại có $A_3^2$ cách.

Vậy có: $3.A_3^2 = 18$ cách.

**Trường hợp 2:** $a_0$ chẵn khác 0 và x ở hai vị trí $a_3a_4$. Có $3.A_3^2 = 18$ cách..

**Trường hợp 3:** $a_0$ chẵn khác 0 và x ở hai vị trí $a_3a_2$ hoặc $a_2a_1$. Có 24 cách. Vậy ta có: $6(18 + 18 + 24) = 360$ số n.

**Câu 5:** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau? Tính tổng của tất cả các số tự nhiên đó.

**Giải:**

**Cách 1:**

Gọi $n = \overline{a_4a_3a_2a_1a_0} = a_4.10^4 + a_3.10^3 + a_2.10^2 + a_1 10 + a_0$ là số cần lập. Ta có 4 cách chọn $a_4$, 4 cách chọn $a_3$, 3 cách chọn $a_2$, 2 cách chọn $a_1$, 1 cách chọn $a_0$. Vậy có:

$4.4.3.2.1 = 96$ số n.

**Cách 2:**

Ta có 4 cách chọn và 4! Cách sắp xếp 4 số còn lại.

Vậy có: 4. 4! = 96 số n.

* Tính tổng 96 số n lập được:

**Cách 1:** Có 24 số n $n = \overline{a_4a_3a_2a_1a_0}$ , có 18 số $n = \overline{a_4a_3a_2a_1 1}$, có 18 số $n = \overline{a_4a_3a_2a_1 2}$, có 18 số $n = \overline{a_4a_3a_2a_1 3}$, có 18 số $n = \overline{a_4a_3a_2a_1 4}$ .

Tổng các chữ số hàng đơn vị là: $18(1 + 2 + 3 + 4) = 180$ .

Tương tự: Tổng các chữ số hàng chục là 1800, tổng các chữ số hàng trăm là 18000, tổng các chữ số hàng nghìn là 180000.

Có 24 số $n = \overline{1a_3a_2a_1a_0}$ , có 24 số $n = \overline{2a_3a_2a_1a_0}$ , có 24 số $n = \overline{3a_3a_2a_1a_0}$ , có 24 số $n = \overline{4a_3a_2a_1a_0}$ .

Tổng các chữ số hàng chục nghìn là

$24(1 + 2 + 3 + 4).10000 = 2400000$

Vậy tổng 96 số n là:

$180 + 1800 + 18000 + 180000 + 2400000 = 2599980$

**Cách 2:** Có 24 số với số k ( k = 1, 2, 3, 4) đứng ở vị trí $a_4$. Có 18 số với số k ( k = 1, 2, 3, 4) đứng ở vị trí $a_i$, với i = 0, 1, 2, 3. Vậy tổng 96 số n là:

$(1 + 2 + 3 + 4)\left[24.10^4 + 18(10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0)\right]$

**Câu 6:** áp dụng khai triển nhị thức Niu tơn của $\left(x^2 + x\right)^{100}$, chứng minh rằng:

$100C_{100}^0\left(\frac{1}{2}\right)^{99} - 101C_{101}^1\left(\frac{1}{2}\right)^{100} + .. - 199C_{100}^{99}\left(\frac{1}{2}\right)^{198} + 200C_{100}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{199} = 0$ .

( $C_n^k$ là tổ hợp chập k của n phần tử)

**Giải:** Ta có:

$\left(x^2 + x\right)^{100} = C_{100}^0x^{100} + C_{100}^1x^{101} + C_{100}^2x^{102} + .. + C_{100}^{100}x^{200}$ , lấy đạo hàm hai vế, cho $x = -\frac{1}{2}$ và nhân hai vế với ( -1), ta có kết quả:

$100C_{100}^0\left(\frac{1}{2}\right)^{99} - 101C_{101}^1\left(\frac{1}{2}\right)^{100} + .. - 199C_{100}^{99}\left(\frac{1}{2}\right)^{198} + 200C_{100}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{199} = 0$

**Câu 7:** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau và tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn bằng 8.

**Giải:**

Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần lập. Yêu cầu bài toán:

$a_3 + a_4 + a_5 = 8 \Rightarrow a_3, a_4, a_5 \in \{1,2,5\}$ hay $a_3, a_4, a_5 \in \{1,3,4\}$

a) Khi $a_3, a_4, a_5 \in \{1,2,5\}$ . Có 6 cách chọn $a_1$; có 5 cách chọn $a_2$.

Có 3! Cách chọn $a_3$, $a_4$, $a_5$. Có 4 cách chọn $a_6$.

Vậy ta có: $6.5.6.4 = 720$ số n.

b) Khi $a_3, a_4, a_5 \in \{1,3,4\}$ tương tự ta cũng có 720 số n.

Theo quy tắc cộng ta có: 720 + 720 = 1440 số n .

**Cách khác:** * Khi $a_3, a_4, a_5 \in \{1, 2, 5\}$. Có 3! = 6 cách chọn $\overline{a_3a_4a_5}$, có $A_6^3$ cách chọn $a_1$, $a_2$, $a_6$.

Vậy ta có: $6.5.6.4 = 720$ số n.

* Khi $a_3, a_4, a_5 \in \{1, 3, 4\}$, tương tự ta cũng có 720 số n.

Theo quy tắc cộng ta có: 720 + 720 = 1440 số n .

**Câu 8:** Tìm hệ số của $x^7$ trong khai triển đa thức $(2-3x)^{2n}$, trong đó n là số nguyên dương thoả mãn: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$. ($C_n^k$ là tổ hợp chập k của n phần tử)

**Giải:** Ta có:

$$(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + C_{2n+1}^3 x^3 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$$

Cho x = 1, ta có:

$$2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} \qquad (1)$$

Cho x = -1, ta có:

$$0 = C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 - C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^4 - ... - C_{2n+1}^{2n+1} \qquad (2)$$

Lấy (1) – (2) $\Rightarrow 2^{2n+1} = 2\left[C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + ... + C_{2n+1}^{2n+1}\right]$

$$2^{2n} = C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024 = 2^{10}$$

Vậy 2n = 10.

Ta có: $(2-3x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k C_{10}^k 2^{10-k} (3x)^k$ .

Suy ra hệ số của $x^7$ là: $-C_{10}^7.3^7.2^3$ hay $-C_{10}^3.3^7.2^3$

**Câu 9:** Một đội văn nghệ có 15 người gồm 10 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một nhóm đồng ca gồm 8 người biết rằng trong đó phải có ít nhất 3 nữ.

**Giải:**

Ta có 3 trường hợp:

* 3 nữ và 5 nam: có $C_5^3 C_{10}^5 = 2520$ cách.

* 4 nữ và 4 nam: Có $C_5^4 C_{10}^4 = 1050$ cách.

* 5 nữ và 3 nam: có $C_5^5 C_{10}^3 = 120$ cách

Theo quy tắc cộng, ta có: 2520 + 1050 + 120 = 3690 cách.

**Câu 10:** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau và nhất thiết phải có 2 chữ số 1, 5.

**Giải:**

Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số cần lập.

Ta có thể xếp 1, 5 vào 2 trong 5 vị trí $\Rightarrow A_5^2 = 4.5 = 20$ cách.

Xếp 1, 5 rồi ta có 5 cách chọn 1 chữ số cho ô còn lại đầu tiên

4 cách chọn 1 chữ số cho ô còn lại thứ 2.

3 cách chọn 1 chữ số cho ô còn lại thứ 3

* Theo quy tắc nhân ta có: $A_5^2.5.4.3 = 20.60 = 1200$ số n.

**Cách khác:**

**Bước 1:** Xếp 1, 5 vào 2 trong 5 vị trí: Ta có: $A_5^2 = 4.5 = 20$ cách.

**Bước 2:** Có $A_5^3 = 3.4.5 = 60$ cách bốc 3 trong 5 số còn lại rồi xếp vào 3 vị trí còn lại. Vậy có 20. 60 = 1200 số n thoả mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 11:** Tìm $k \in \{0;1;2;........;2005\}$ sao cho $C_{2005}^k$ đạt giá trị lớn nhất ( với $C_n^k$ là tổ hợp chập k của n phần tử).

**Giải:**

$$C_{2005}^k \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{2005}^k \geq C_{2005}^{k+1} \\ C_{2005}^k \geq C_{2005}^{k-1} \end{cases} \quad (k \in N)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2005!}{k!(2005-k)!} \geq \dfrac{2005!}{(k+1)!(2004-k)!} \\ \dfrac{2005!}{k!(2005-k)!} \geq \dfrac{2005!}{(k-1)!(2006-k)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+1 \geq 2005-k \\ 2006-k \geq k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 1002 \\ k \leq 1003 \end{cases} \Leftrightarrow 1002 \leq k \leq 1003, k \in N \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1002 \\ k = 1003 \end{array}\right. .$$

**Câu 12:** Tìm số nguyên n lớn hơn 1 thoả mãn đẳng thức: $2P_n + 6A_n^2 - P_nA_n^2 = 12$ ( $P_n$ là số hoán vị của n phần tử và $A_n^k$ là số chỉnh hợp chập k của n phần tử).

**Giải:**

Ta có: $2P_n + 6A_n^2 - P_nA_n^2 = 12 \quad (n \in N, n > 1)$

$$2.n! + \frac{6.n!}{(n-2)!} - n!\frac{n!}{(n-2)!} = 12 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!}\frac{6.n!}{(n-2)!} - 2(6-n!) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6 - n! = 0 \\ \dfrac{n!}{(n-2)!} - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n! = 6 \\ n(n-1) - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 3 \\ n^2 - n - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 2 \\ n = 3 \end{array}\right.$$

( Vì $n \geq 2$ )

**Câu 13:** Tìm $x, y \in N$ thoả mãn hệ: $\begin{cases} A_x^2 + C_y^3 = 22 \\ A_y^3 + C_x^2 = 66 \end{cases}$

**Giải:**

Với điều kiện: $x \geq 2, y \geq 3$ , ta có:

$$\begin{cases} A_x^2 + C_y^3 = 22 \\ A_y^3 + C_x^2 = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) + \dfrac{1}{6}y(y-1)(y-2) = 22 \\ y(y-1)(y-2) + \dfrac{1}{2}x(x-1) = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6x + y^3 - \\ (y^3 - 3y^2 + 2y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6x + y^3 - 3y^2 + 2y = 132 \\ 11x^2 - 11x - 132 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \quad hay \quad x = -3 \quad (loai) \\ y^3 - 3y^2 + 2y = 60 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ (y-5)(y^2 + 2y + 12) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$$

**Câu 14:** Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông ABCD lần lượt cho 1, 2, 3 và n điểm phân biệ khác A, B, C, D. Tìm n biết số tam giác có 3 đỉnh lấy từ n + 6 điểm đã cho là 439.

**Giải:**

Nếu $n \leq 2$ thì $n + 6 \leq 8$ . Do dó số tam giác có 3 đỉnh được lấy từ n + 6 điểm không vượt quá $C_8^3 = 56 < 439$ ( loại).

Vậy $n \geq 3$ .

Vì mỗi tam giác được tạo thành ứng với 1 tổ hợp 3 chập n + 6 phần tử. Nhưng trên cạnh CD có 3 đỉnh, trên cạnh DA có n đỉnh nên số tam giác tạo thành là:

$$C_{n+6}^3 - C_3^3 - C_n^3 = \frac{(n+4)(n+5)(n+6)}{6} - 1 - \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = 439$$

$$\Leftrightarrow (n+4)(n+5)(n+6) - (n-2)(n-1)n = 2540$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 140 = 0 \Leftrightarrow n = 10 \quad hay \quad n = -14 \quad (loai)$$

Đáp số: n = 10.

**Câu 15:** Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn lớn hơn 2007 mà mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau?

**Giải:**

Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần lập.

* Trường hợp 1: $a_4$ = 0, ta có: 8 cách chọn $a_1$ ( Vì $a_1 \geq 2$ ).

8 cách chọn $a_2$, 7 cách chọn $a_3$; 1 cách chọn $a_4$.
Vậy ta có: 8. 8. 7.1 = 448 số n .
* Trường hợp 2: $a_4 \neq 0$ vì $a_4$ chẵn.
Ta có: 4 cách chọn $a_4$; 7 cách chọn $a_1$; 8 cách chọn $a_2$; 7 cách chọn $a_3$.
Vậy ta có: 4 . 7. 8 . 7 = 1568 số n.
Vậy cả hai trường hợp ta có: 448 + 1568 = 2016 số n

**Câu 16:** Chứng minh rằng:
$\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + .... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$ ( n là số nguyên dương, $C_n^k$ là tổ hợp chập k của n phần tử).

**Giải:**
Ta có:
$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + ... + C_{2n}^{2n}x^{2n}, (1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + ... + C_{2n}^{2n}x^{2n}$$
$$\Leftrightarrow (1+x)^{2n} - (1-x)^{2n} = 2\left(C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2} = \int_0^1 \left(C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + ..... + C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}\right)dx$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2} = \frac{(1+x)^{2n+1} + (1-x)^{2n+1}}{2(2n+1)}\Big|_0^1 = \frac{2^{2n}-1}{2n+1} (1)$$
$$\int_0^1 \left(C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + ..... + C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}\right)dx$$
$$= \left(C_{2n}^1.\frac{x^2}{2} + C_{2n}^3.\frac{x^4}{4} + ... + C_{2n}^{2n}x^{2n}\right)\Bigg|_0^1$$
$$= \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + ... + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} \quad (2)$$
Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

**Câu 17:** Tìm hệ số của $x^5$ trong khai triển thành đa thức: $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$

**Giải:**
Hệ số của $x^5$ trong khai triển của $x(1-2x)^5$ là $(-2)^4.C_5^4$
Hệ số của $x^5$ trong khai triển của $x^2(1+3x)^{10}$ là $3^3.C_{10}^3$
Hệ số của $x^5$ trong khai triển của $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$ là $(-2)^4.C_5^4 + 3^3.C_{10}^3 = 3320$

**Câu 18:** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^{10}$ trong khai triển nhị thức Niu tơn của $(2+x)^n$, biết $3^nC_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - 3^{n-3}C_n^3 + ... + (-1)^nC_n^n = 2048$ (n là số nguyên dương, $C_n^k$ là tổ hợp chập k của n phần tử).

**Giải:**Ta có:
$$3^nC_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - 3^{n-3}C_n^3 + ... + (-1)^nC_n^n = (3-1)^n$$
Từ giả thiết suy ra n = 11.
Ta có: $(2+x)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k.2^{1-k}x^k$ . Suy ra hệ số của số hạng chứa $x^{10}$ trong khai triển nhị thức Niutơn của $(2+x)^x$ là: $C_{11}^{10}.2^{11-10} = 22$ .

**Câu 19:** Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ , trong đó $n \in N^*$ và các hệ số $a_0, a_1, ...., a_n$ thoả mãn hệ thức $a_0 + \frac{a_1}{2} + ... + \frac{a_n}{2^n} = 4096$ . Tìm hệ số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, ...., a_n$.

**Giải:**
Đặt $f(x) = (1+2x)^n = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \Rightarrow a_0 + \frac{a_1}{2} + ..... + \frac{a_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^n$
Từ giả thiết suy ra: $2^n = 4096 = 2^{12} \Leftrightarrow n = 12$
Với mọi $k \in \{0;1;2;3...;11\}$ ta có: $a_k = 2^kC_{12}^k, a_{k+1} = 2^{k+1}C_{12}^{k-1}$
$$\frac{a_k}{a_{k+1}} < 1 \Leftrightarrow \frac{2^kC_{12}^k}{2^{k+1}C_{12}^{k+1}} < 1 \Leftrightarrow \frac{k+1}{2(12-k)} < 1 \Leftrightarrow k < \frac{23}{3}$$
Mà $k \in Z \Rightarrow k \leq 7$ . Do đó $a_0 < a_1 < .... < a_8$.
Tương tự : $\frac{a_k}{a_{k+1}} > 1 \Leftrightarrow k > 7$ . Do đó $a_8 > a_9 > .... > a_{12}$.
Số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, ......, a_n$ là:
$a_8 = 2^8C_{12}^8 = 126720$

**Câu 20:** Chứng minh rằng: $\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \frac{1}{C_n^k}$ ( n, k là các số nguyên dương, $k \leq n$ , $C_n^k$ là tổ hợp chập k của n phần tử).

**Giải:** Ta có:
$$\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \frac{n+1}{n+2}.\frac{k!(n+1-k)! + (k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}$$
$$= \frac{1}{n+2}.\frac{k!(n-k)!}{n!}\left[(n+1-k) + (k+1)\right] = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{C_n^k} .$$

**Câu 21:** Tìm số nguyên dương n thoả mãn hệ thức: $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = 2048$ ( $C_n^k$ là tổ hợp chập k của n phần tử).

**Giải:**
$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 + C_{2n}^3x^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1} + C_{2n}^{2n}x^{2n}$$
* $x = 1: 2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \quad (1)$
* $x = -1: 0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + ... - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \quad (2)$
Lấy (1) – (2):
$$2^{2n} = 2(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}) = 4096 = 2^{12} \Leftrightarrow n = 6$$

**Câu 22:** Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niutơn của $\left(2x + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{18}$ ( x > 0).

**Giải:**
$$\left(2x + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{18} = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k(2x)^{18-k}\left(x^{-\frac{1}{5}}\right)^k = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k.2^{18-k}.x^{18-\frac{6}{5}k}$$
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 18 - \frac{6}{5}k = 0 \Leftrightarrow k = 15$
Vậy số hạng không chứa x là: $2^3.C_{18}^{15} = 6528$

**Câu 23:** Cho khai triển nhị thức:
$$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{\frac{-x}{3}}\right)^n = C_n^0\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}\left(2^{-\frac{x}{3}}\right) + ... + C_n^{n-1}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^n$$
( n là số nguyên dương). Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3 = 5C_n^1$ và số hạng thứ 4 bằng 20n, tìm x và n.

**Giải:** Từ $C_n^3 = 5C_n^1$ ta có: $n \geq 3$ và
$$\frac{n!}{3!(n-3)!} = 5\frac{n!}{(n-1)!} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n \Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 7 \\ n = -4 \end{array}\right.$$
Với n = 7 ta có:
$$C_7^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3 = 140 \Leftrightarrow 35.2^{2x-2}.2^{-x} = 140 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 4 \Leftrightarrow x = 4$$

**Câu 24:** Cho đa giác đều $A_1A_2.....A_{2n}$ ( n nguyên) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2, ...., A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$. Tìm n.

**Giải:** Số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1A_2.....A_{2n}$ là: $C_{2n}^3$ .
Gọi đường chéo của đa giác đều $A_1A_2.....A_{2n}$ đi qua tâm đường tròn (O) là đường chéo lớn thì đa giác đã cho có n

đường chéo lớn. Mỗi hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ có các đường chéo là hai đường chéo lớn. Ngược lại, với mỗi cặp đường chéo lớn ta có các đầu mút của chúng là 4 đỉnh của một hình chữ nhật. Vậy số hình chữ nhật nói trên bằng số cặp đường chéo lớn của đa giác $A_1A_2\ldots A_{2n}$ tức $C_n^2$.

Theo giả thiết thì: $C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \dfrac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20\dfrac{n!}{2!(n-2)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{2n.(2n-1)(2n-2)}{6} = 20.\frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow 2n-1 = 15 \Leftrightarrow n = 8$$

**Câu 25:** Tìm số nguyên dương n sao cho:
$C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^nC_n^n = 243$

**Giải:** Ta có: $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

Cho x = 2 ta được: $3^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k \Rightarrow 3^n = 243 = 3^5 \Leftrightarrow n = 5$

**Câu 26:** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^8$ trong khai triển nhị thức Niutơn của $\left(\dfrac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng:

$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n+3)$ ( n là số nguyên dương, x > 0, $C_n^k$ là tổ hợp chập k của n phần tử).

**Giải:** Ta có:

$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n+3) \Leftrightarrow \left(C_{n+3}^{n+1} + C_{n+3}^{n}\right) - C_{n+3}^{n} = 7(n+3)$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+3)}{2!} = 7(n+3) \Leftrightarrow n+2 = 7.2! = 14 \Leftrightarrow n = 12$$

Số hạng tổng quát của khai triển là:

$$C_{12}^k\left(x^{-3}\right)^k\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{12-k} = C_{12}^k x^{\frac{60-11k}{2}}$$

Ta có: $x^{\frac{60-11k}{2}} = x^8 \Rightarrow \dfrac{60-11k}{2} = 8 \Leftrightarrow k = 4$

Do đó hệ số của số hạng chứa $x^8$ là:

$$C_{12}^4 = \frac{12!}{4!(12-4)!} = 495$$

**Câu 27:** Cho n là số nguyên dương. Tính tổng:

$C_n^0 + \dfrac{2^2-1}{2}C_n^1 + \dfrac{2^3-1}{2}C_n^2 + \ldots + \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$ ($C_n^k$ là tổ hợp chập k của n phần tử).

**Giải:**

Ta có: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n$

Suy ra: $\int_1^2 (1+x)^n dx = \int_1^2 \left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_1^2 = \left(C_n^0x + C_n^1\frac{x^2}{2} + C_n^2\frac{x^3}{3} + \ldots + C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_1^2.$$

$$\Leftrightarrow C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{2}C_n^2 + \ldots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$$

**Câu 28:** Với n là số nguyên dương, gọi $a_{3n-3}$ là hệ số của $x^{3n-3}$ trong khai triển thành đa thức của $\left(x^2+1\right)^n(x+2)^n$.

Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$

**Giải:**

**Cách 1:** Ta có:

$\left(x^2+1\right)^n = C_n^0x^{2n} + C_n^1x^{2n-2} + C_n^2x^{2n-4} + \ldots + C_n^n$

$(x+2)^n = C_n^0x^n + 2C_n^1x^{n-1} + 2^2C_n^2x^{n-2} + \ldots + 2^nC_n^n$

Dễ dàng kiểm tra n = 1 , n = 2 không thoả mãn đk bài toán

Với $n \geq 3$ thì $x^{3n-3} = x^{2n}x^{n-3} = x^{2n-2}x^{n-1}$

Do đó hệ số của $x^{3n-3}$ trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n(x+2)^n$ là $a_{3n-3} = 2^3.C_n^0.C_n^3 + 2.C_n^1.C_n^1$

Vậy $a_{3n-3} = 26n \Leftrightarrow \dfrac{2n\left(2n^2-3n+4\right)}{3} = 26n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=5 \\ n=\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$

Vậy n = 5 là giá trị cần tìm (vì n nguyên dương)

**Cách 2:** Ta có : $\left(x^2+1\right)^n(x+2)^n = x^{3n}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^n\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^n$

$$= x^{3n}\left[\sum_{i=0}^{n} C_n^i\left(\frac{1}{x^2}\right)^i \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\frac{2}{x}\right)^k\right] = x^{3n}\left[\sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{-2i} \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k x^{-k}\right]$$

Trong khai triển trên , luỹ thừa của x là 3n – 3 khi -2i – k = -3 hay 2i + k = 3. Ta chỉ có 2 trường hợp thoả mãn đk này là i = 0 , k = 3 hoặc i = 1 , k = 1.

Vậy hệ số của $x^{3n-3}$ là $a_{3n-3} = C_n^0.C_n^3.2^3 + C_n^1.C_n^1.2$

Do đó $a_{3n-3} = 26n \Leftrightarrow \dfrac{2n\left(2n^2-3n+4\right)}{3} = 26n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=5 \\ n=\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$

Vậy n = 5 là giá trị cần tìm (vì n nguyên dương)

**Câu 29:** Giải bất phương trình: $\left(n^2-5\right)C_n^4 + 2C_n^3 \leq 2A_n^3$

(trong đó $C_n^k$ là số tổ hợp chập k của n phân tử và $A_n^k$ là chỉnh hợp tập k của n phân tử )

**Giải :** Điều kiện $n \in N$ và $n \geq 4$

Bất phương trình đã cho có dạng :

$$\frac{\left(n^2-5\right)n!}{(n-4)!4!} + 2\frac{n!}{(n-3)!3!} \leq 2\frac{n!}{(n-3)!}$$

$$\Leftrightarrow (n-5)\left(n^2+2n+5\right) \leq 0 \Leftrightarrow n-5 \leq 0 \Leftrightarrow n \leq 5$$

(do $n^2 + 2n + 5) > 0$ , mọi n)

Kết hợp điều kiện . được nghiệm của bất phương trình đã cho là n = 4 , n = 5

**Câu 30:** Tính hệ số của $x^8$ trong khai triển thành đa thức của $\left[1+x^2(1-x)\right]^8$

**Giải:**

$$\left[1+x^2(1-x)\right]^8 = C_8^0 + C_8^1x^2(1-x) + C_8^2x^4(1-x)^2 + C_8^3x^6(1-x)^3$$
$$+ C_8^4x^8(1-x)^4 + C_8^5x^{10}(1-x)^5 + C_8^6x^{12}(1-x)^6 + C_8^7x^{14}(1-x)^7 + C_8^8x^{16}(1-x)^8$$

Bậc của x trong 3 số hạng đầu nhỏ hơn 8, bậc của x trong 4 số hạng cuối lớn hơn 8.

Vậy $x^8$ chỉ có trong các số hạng thứ 4, thứ 5 với hệ số tương ứng là: $C_8^3.C_3^2, C_8^4.C_4^0$.

Suy ra: $a_8 = 168 + 70 = 238$.

**Câu 31:** Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi ( khó, trung bình, dễ ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

**Giải:** Mỗi đề kiểm tra phải có số câu dễ là 2 hoặc 3 nên có các trường hợp sau:

* Đề có 2 câu dễ, 2 câu trung bình, 1 câu khó, thì số cách chọn là: $C_{15}^2.C_{10}^2.C_5^1 = 23625$
* Đề có 2 câu dễ, 1 câu trung bình, 2 câu khó, thì số cách chọn là: $C_{15}^2.C_{10}^1.C_5^2 = 10500$
* Đề có 3 câu dễ, 1 câu trung bình, 1 câu khó, thì số cách chọn là: $C_{15}^3.C_{10}^1.C_5^1 = 22750$

Vì thế cách chọn trên đôi một khác nhau nên số đề kiểm tra có thể lập được là: 23625 + 10500 + 22750 = 56875.

**Câu 32:** Tìm các số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niutơn của $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với x > 0.

**Giải:** Ta có:

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7=\sum_{k=0}^{7}C_7^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{7-k}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k=\sum_{k=0}^{7}C_7^k x^{\frac{7-k}{3}}x^{-\frac{k}{4}}=\sum_{k=0}^{7}C_7^k x^{\frac{28-7k}{12}}$$

Số hạng không chứa x là số hạng tương ứng với k $(k\in Z,0\le k\le 7)$ thoả mãn: $\frac{28-7k}{12}=0\Leftrightarrow k=4$

Số hạng không chứa x cần tìm là: $C_4^7=35$

**Câu 33:** Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_{2n+1}^1-2.2C_{2n+1}^2+3.2C_{2n+1}^3-4.2C_{2n+1}^4+...+(2x+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}=2005$$

($C_n^k$ là số tổ hợp chập k của n phân tử).

**Giải:** Ta có:

$(1+x)^{2n+1}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1x+C_{2n+1}^2x^2+C_{2n+1}^3x^3+...+C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}\quad(\forall x\in R)$ Lấy đạo hàm hai vế ta có:

$$(2x+1)(1+x)^{2n}=C_{2n+1}^1+2C_{2n+1}^2x+3C_{2n+2}^3x^2+...+(2n+1)C_{2n+1}^2x^{2n}\quad(\forall x\in R)$$

Thay x = - 2, ta có:

$$C_{2n+1}^1-2.2C_{2n+1}^2+3.2^2C_{2n+1}^3-4.2^3C_{2n+1}^4+.....+(2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1}=2n+1$$

Theo giả thiết ta có: $2n+1=2005\Rightarrow n=1002$

**Câu 34:** Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ?

**Giải:**

Có $C_3^1.C_{12}^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất. Với mỗi cách phân công thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất thì có $C_2^1C_8^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ hai. Với mỗi cách phân công thanh niên tình nguyện về tình thứ nhất và tỉnh thứ hai thì có $C_1^1C_4^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ 3.

Số cách phân công thanh niên tình nguyện về 3 tỉnh theo yêu cầu bài toán là: $C_3^1.C_{12}^4.C_2^1.C_8^4.C_1^1C_4^4=207900$

**Câu 35:** Tính giá trị của biểu thức: $M=\frac{A_{n+1}^4+3A_n^3}{(n+1)!}$. Biết rằng $C_{n+1}^2+2C_{n+2}^2+2C_{n+3}^2+C_{n+4}^2=149$ ( n là số nguyên dương, $A_n^k$ là chỉnh hợp tập k của n phân tử và $C_n^k$ là số tổ hợp chập k của n phân tử).

**Giải:** Điều kiện: $n\ge 3$. Ta có:

$$C_{n+1}^2+2C_{n+2}^2+2C_{n+3}^2+C_{n+4}^2=149$$

$$\Leftrightarrow\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}+2\frac{(n+2)!}{2!n!}+2\frac{(n+3)!}{2!(n+1)!}+\frac{(n+4)!}{2!(n+2)!}=149$$

$$\Leftrightarrow n^2+4n-45=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=5\\n=-9\end{array}\right.$$

Vì n nguyên dương nên n = 5.

$$M=\frac{A_6^4+3A_5^3}{6!}=\frac{\frac{6!}{2!}+3.\frac{5!}{2!}}{6!}=\frac{3}{4}$$

**Câu 36:** Tìm hệ số của số hạng chứa $x^{26}$ trong khai triển nhị thức Niutơn của $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n$, biết rằng $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}+1$ ( n là số nguyên dương, $C_n^k$ là số tổ hợp chập k của n phân tử).

**Giải:** Từ giả thiết suy ra:

$$C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}\qquad(1)$$

Vì $C_{2n+1}^k=C_{2n+1}^{2n+1-k},\forall k,0\le k\le 2n+1$ nên:

$$C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+....+C_{2n+1}^n=\frac{1}{2}\left(C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+...+C_{2n+1}^{2n+1}\right)(2)$$

Từ khai triển nhị thức Niutơn của $(1+1)^{2n+1}$ suy ra:

$$C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+.....+C_{2n+1}^{2n+1}=(1+1)^{2n+1}=2^{2n+1}\qquad(3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra: $2^{2n}=2^{20}$ hay n = 10.

Ta có: $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(x^{-4}\right)^{10-k}(x^7)^k=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^kx^{11k-40}$

Hệ số của $x^{26}$ là $C_{10}^k$ với k thoả : $11k-40=26\Leftrightarrow k=6$

Vậy hệ số của $x^{26}$ là: $C_{10}^6=210$

**Câu 37:** Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n\ge 4)$. Biết rằng số tập hợp con gồm 4 phần tử gấp 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm $k\in\{1;2;3...n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

Giải: Số tập con k phần tử của tập hợp A bằng $C_n^k$. Từ giả thiết suy ra:

$C_n^4=20C_n^2\Leftrightarrow n^2-5n-234=0\Leftrightarrow n=18$ ( vì $n\ge 4$).

Do $\frac{C_{18}^{k+1}}{C_{18}^k}=\frac{18-k}{k+1}>1\Leftrightarrow k<9$ nên

$$C_{18}^1<C_{18}^2<....<C_{18}^9\Rightarrow C_{18}^9>C_{18}^{10}>....>C_{18}^{18}$$

Vậy số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất ⇔ k = 9.

**Câu 38:** Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

**Giải:** Số cách chọn 4 học sinh trong 12 học sinh đã cho là: $C_{12}^4=495$.

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhấtmột em được tính như sau:

- Lớp A có 2 học sinh, lớp B, C mỗi lớp có 1 học sinh. Số cách chọn là: $C_5^2.C_4^1.C_3^1=120$
- Lớp B có 2 học sinh, lớp A, C mỗi lớp có 1 học sinh. Số cách chọn là: $C_5^1.C_4^2.C_3^1=90$
- Lớp C có 2 học sinh, lớp A, B mỗi lớp có 1 học sinh. Số cách chọn là: $C_5^1.C_4^1.C_3^2=60$

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất 1 học sinh là: 120 + 90 + 60 = 270.

Vậy số cách chọn phải tìm là: 495 – 270 = 225.

**Câu 39:** Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}=C_n^1-\frac{1}{2}C_n^2+\frac{1}{3}C_n^3+...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}C_n^n$$

**Giải:** Xét tích phân:

$$\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}dx=\int_0^1\left(C_n^1-C_n^2x+...+(-1)^{n-1}C_n^nx^n\right)dx$$

$$=C_n^1-\frac{1}{2}C_n^2+....+\frac{(-1)^{n-1}}{n}C_n^n\qquad(1)$$

Mặt khác, đặt x = 1 – t, ta có:

$$\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}dx=\int_0^1\frac{1-t^n}{1-t}(-1)dt=-\int_0^1\frac{t^n-1}{t-1}dt$$

$$=\int_0^1\left(1+t+t^2+....+t^{n-1}\right)dt=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

**Câu 40:** Rút gọn tổng:

$$S=\frac{1}{2}C_{19}^0-\frac{1}{3}C_{19}^1+\frac{1}{4}C_{19}^2-....+\frac{1}{20}C_{19}^{18}-\frac{1}{21}C_{19}^{19}$$

**Giải:** Theo nhị thức Niutơn thì:

$$x(1-x)^{19}=x\left(C_{19}^0-C_{19}^1x+C_{19}^2x^2-...+C_{19}^{18}x^{18}-C_{19}^{19}x^{19}\right)$$

$$=C_{19}^0x-C_{19}^1x^2+C_{19}^2x^3-....+C_{19}^{18}x^{19}-C_{19}^{19}x^{20}$$

$$\Rightarrow\int_0^1 x(1-x)^{19}dx=\left(C_{19}^0.\frac{x^2}{2}-C_{19}^1.\frac{x^3}{3}+C_{19}^2.\frac{x^4}{4}-...+C_{19}^{18}.\frac{x^{20}}{20}-C_{19}^{19}.\frac{x^{21}}{21}\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}C_{19}^0-\frac{1}{3}C_{19}^1+\frac{1}{4}C_{19}^2-.....+\frac{1}{20}C_{19}^{18}-\frac{1}{21}C_{19}^{19}=S$$

Do đó $S=\dfrac{1}{420}$.

**Câu 41:** Tính tích phân: $I=\int_0^1 x(1-x^2)^n dx\quad\left(n\in N^*\right)$. Từ đó cmr: $\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{4}C_n^1+\frac{1}{6}C_n^2-\frac{1}{8}C_n^3+...+\frac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n=\frac{1}{2(n+1)}$

Giải:

Ta có; $I=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x^2\right)^n d(1-x^2)=-\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{2(n+1)}$

Mặt khác:

$$I=\int_0^1\left[x.\sum_{k=0}^n C_n^k(-1)^k.x^{2k}\right]dx=\int_0^1\left[\sum_{k=0}^n C_n^k(-1)^k.x^{2k+1}\right]dx$$

$$=\sum_{k=0}^n C_n^k(-1)^k\frac{x^{2k+2}}{2k+2}\Big|_0^1=\sum_{k=0}^n C_n^k(-1)^k.\frac{C_n^k}{2(k+1)}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

**Câu 42:** Cho 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Hỏi có bao nhiêu cách viết số:

1) Có 6 chữ số.
2) Có 6 chữ số đôi một khác nhau.
3) Có 4 chữ số.
4) Có 4 chữ số đôi một khác nhau.
5) Chia hết cho 5 và có 3 chữ số khác nhau.
6) Có 6 chữ số khác nhau và là số lẻ.
7) Có 4 chữ số khác nhau và lớn hơn 3000.
8) Có 3 chữ số khác không lớn hơn 243.
9) Có 3 chữ số khác nhau nhỏ hơn 243.

**Giải:**

1) Để viết một số có 6 chữ số từ các số đã cho, ta có 6 cách chọn số hàng trăm nghìn, tương tự với các số ở mỗi hàng còn lại đều có 6 cách chọn. Theo quy tắc nhân ta lập được: $6^6$ = 46656 số thoả mãn điều kiện đề bài.

2) Do yêu cầu 6 chữ số đôi một khác nhau nên có 6 cách chọn số hàng trăm nghìn, 5 cách chọn số hàng vạn, 4 cách chọn số hàng nghìn, …., 1 cách chọn số hàng đơn vị.
Vậy có tất cả 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720 ( số) thoả mãn đề bài.

3) Lập luận tương tự câu 1 ta lập được: $6^6$ = 1296 số thoả mãn đề bài.

4) Lập luận tương tự câu 2, có 6 cách chọn số hàng nghìn, 5 cách chọn số hàng trăm, 4 cách chọn số hàng chục, 3 cách chọn số hàng đơn vị.
Vậy có tất cả: 6 x 5 x 4 x 3 = 360 ( số) thoả mãn đề bài.

5) Gọi $\overline{abc}$ là số thoả mãn đề bài, số đó chia hết cho 5 nên chỉ có mọt cách chọn c = 5, số a, b có thể được coi là một chỉnh hợp chập 2 của 5 số còn lại sau khi đã chọn số c. Vậy có tất cả $1.A_5^2=20$ số.

6) Do số được thành lập là một số lẻ nên số hàng đơn vị phải là: 1, 3, 5. vậy có 3 cách chọn. Các số còn lại được coi như một hoán vị năm phần tử. Vậy có tất cả:
$3.P_5=3.5!=360$ ( số).

7) Gọi số có 4 chữ số khác nhau là: $\overline{abcd}$
Do số đó lớn hơn 3000 nên $a\geq 3$ hay $a\in\{3;4;5;6\}$. Vậy có 4 cách chọn a, 3 số còn lại được coi như một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử. Suy ra các số thoả mãn đề bài là:
$4.A_5^3=240$ ( số).

8) Gọi số có 3 chữ số khác nhau là $\overline{abc}$. do số đó không nhỏ hơn 243 ( hay $\overline{abc}\geq 243$) nên $a\geq 2$. Vậy $a\in\{2;3;4;5;6\}$.

+ Với a = 2 để $\overline{2bc}\geq 243\Rightarrow b\geq 4\Rightarrow b\in\{4;5;6\}$

Nếu b = 4, lập luận tương tự, cần $c\neq 4, c\geq 3$ do đó có 3 cách chọn c. Vậy số có dạng $\overline{24c}$ là: 1 x 3 = 3 ( số).
Nếu b = 5, 6 thì c có thể chọn bất kì trong 4 số còn lại. vậy số các số có dạng $\overline{25c}$ hoặc $\overline{26c}$ là:
1 x 2 x 4 = 8 (số).

+ Với a = 3; 4; 5; 6 ta có thể chọn b, c là 2 số bất kì trong 5 số còn lại sau khi chọn a. Tất cả các dạng này là:
$4.A_5^2=80$ ( số)

Vậy từ 6 số đã cho, ta có thể lập được 3 + 8 + 80 = 91 ( số)có 3 chữ số khác nhau không nhỏ hơn 243..

9) Ta có: $\overline{abc}<243\quad(*)$
Từ 6 số đã cho, thành lập được $A_6^3=120$ ( số) có 3 chữ số khác nhau. Trong đó số các số không nhỏ hơn 243 là 91 số. Vậy số các số thoả mãn (*) là: 120 – 91 = 29 ( số).

**Câu 43:** Một lớp 12 có 15 học sinh nữ và 25 học sinh nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra những tổ có 5 người:

1) Nam, nữ tuỳ ý, không phân biệt nhiệm vụ.
2) Có 3 nam, không phân biệt nhiệm vụ.
3) Có ít nhất 2 nữ, không phân biệt nhiệm vụ.
4) Tổ trưởng là nữ, số còn lại không phân biệt nhiệm vụ.
5) Tổ trưởng là nam và có ít nhất 2 nam nữ.
6) 1 tổ trưởng, 1 tổ phó và 3 tổ viên.
7) Mỗi người sẽ phụ trách một trong 5 đội thiếu niên cụ thể của phường.

**Giải:**

1) Số học sinh trong lớp là: 15 + 25 = 40 ( học sinh)
Do đó số cách chọn 1 tổ 5 người theo yêu cầu đề bài là:
$C_{40}^5=658008$ ( Cách)

2) Để chọn một tổ có 5 người: Gồm 3 nam: có $C_{25}^3=2300$ ( Cách chọn). 2 nữ: có $C_{15}^2=150$ ( cách chọn).
Theo quy tắc nhân, số cách chọn tổ là: $C_{25}^3.C_{15}^2=241500$ ( cách).

3) **Cách 1:** Số học sinh nữ trong tổ có thể là: 2, 3, 4 hoặc 5.
Số cách chọn một tổ gồm 2 nữ, 3 nam là:
$C_{15}^2.C_{25}^3=241500$
Số cách chọn một tổ gồm 3 nữ, 2 nam là:
$C_{15}^3.C_{25}^2=136500$
Số cách chọn một tổ gồm 4 nữ, 1 nam là: $C_{15}^4.C_{25}^1=34125$
Số cách chọn một tổ gồm 5 nữ là: $C_{15}^5=3003$

**Cách 2:** Tính số tổ có 1 nữ và số tổ không có nữ là:
$C_{25}^5+15C_{25}^4$. Số tổ phải tìm là: $C_{40}^5-(C_{25}^5+15C_{25}^4)$

4) Để tổ trưởng là nữ, có $C_{15}^1=15$ cách chọn.
Bốn tổ viên được chọn trong 39 học sinh còn lại, có:
$C_{39}^4=82251$ cách chọn. Vậy số cách chọn tổ là:
$C_{15}^1.C_{39}^4=1233765$ ( cách chọn).

5) Để tổ trưởng là nam, có $C_{25}^1=25$ cách chọn.
Bốn người còn lại trong tổ gồm:

+ 2 nam, 2 nữ: $C_{24}^2.C_{15}^2 = 28980$ ( cách chọn)
+ 3 nam, 1 nữ: $C_{24}^3.C_{15}^1 = 30360$ ( cách chọn)
+ 4 nam: $C_{24}^4 = 10626$ ( cách chọn).
Tổng số cách chọn là:
$25.(28980 + 30360 + 10626) = 1749150$

6) Một tổ trưởng và một tổ phó có thể coi là một chỉnh hợp chập 2 của 40 học sinh trong lớp:
$A_{40}^2 = 1560$ ( cách chọn)
Ba tổ viên là một tổ hợp chập 3 của 38 học sinh còn lại ( sau khi đã chọn tổ trưởng và tổ phó ) :
$C_{38}^2 = 8436$ ( cách chọn)
Vậy số cách chọn tổ là: $A_{40}^2.C_{38}^2 = 13160160$

7) Do mỗi người sẽ phụ trách một đội thiếu niên khác nhau nên có thể mỗi tổ là một chỉnh hợp chập 5 của 40 học sinh.
Vậy số cách chọn tổ là: $A_{40}^5 = 78960960$

**Câu 44:** Từ 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể viết được bao nhiêu số?
1) Có 5 chữ số khác nhau.
2) Có 5 chữ số.
3) Có 3 chữ số khác nhau.
4) Có 3 chữ số khác nhau và là số lẻ.
5) Có 3 chữ số khác nhau và nhất thiết có mặt chữ số 2.

**Giải:**

1) Gọi số có 5 chữ số khác nhau là: $\overline{abcde}$ . vì $a \neq 0$ nên có 4 cách chọn. Bộ số $\overline{bcde}$ có thể coi là một hoán vị của 4 số còn lại sau khi đã chọn số a, vậy có $P_4 = 4! = 24$ ( Số)
Số cách thành lập số có 5 chữ số khác nhau là: 4 x 24 = 96 ( cách)

2) Để thành lập một số có 5 chữ số, ta chọn lần lượt từng hàng, $a \neq 0$ nên có 4 cách chọn a; 5 cách chọn b; 5 cách chọn c; 5 cách chọn d; 5 cách chọn e. Vậy số các số có 5 chữ số thành lập từ 5 chữ số đã cho là:
$4.5^4 = 2500$ ( số).

3) Gọi số có 3 chữ số khác nhau là: $\overline{abc}$ . Vì $a \neq 0$ nên có 4 cách chọn. Bộ số $\overline{bc}$ có thể coi là một chỉnh hợp chập 2 của 4 phần tử, số các chỉnh hợp là: $A_4^2 = 12$
Vậy các số thoả mãn đề bài: 4 x 12 = 48 ( số)

4) Gọi số có 3 chữ số khác nhau là $\overline{abc}$ , để số đó là số lẻ thì $c \in \{1;3\}$ , vậy có 2 cách chọn c. Còn lại 4 số ( gồm cả số 0) để chọn a và b; do $a \neq 0$ nên có 3 cách chọn số a, từ đó còn 3 cách chọn b.
Vậy số các số lẻ có 3 chữ số khác nhau là: 2 x 3 x 3 = 18 (số).

5) Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$ , trong đó nhất thiết có một vị trí là số 2:
+ Số 2 ở vị trí của a; các số b, c chọn trong 4 số còn lại nên là một chỉnh hợp chập 2 của 4 số nên có $A_4^2 = 12$ số loại này.
+ Số 2 ở vị trí của số b; khi đó có 3 cách chọn a; 3 cách chọn c nên có 3 x 3 = 9 số loại này.
+ Số 2 ở vị trí của c; tương tự, ta được 9 số.
Vậy có tất cả: 12 + 9 + 9 = 30 số thoả mãn đề bài.

**Câu 45:** 1) Tính hệ số của số hạng chứa $x^3$ trong khai triển của: $P(x) = (2x+1)^3 - (3x+1)^4 + (x+1)^7$

2) Khai triển của $\left(x - \frac{1}{x}\right)^n$ có tổng các hệ số của 3 số hạng đầu là 28. tìm số hạng thứ 5 của khai triển đó.

3) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{10}$

4) Xét khai triển của $(x^3 + xy)^{15}$
a) Tìm hai hạng tử chính giữa.
b) Tính hệ số của hạng tử chứa $x^{21}y^{12}$

**Giải:**

1) Số hạng chứa $x^3$ trong khai triển của $(2x+1)^3$ là $8x^3$
Số hạng chứa $x^3$ trong khai triển của $(3x+1)^4$ là:
$C_4^1(3x)^3 = 108x^3$
Số hạng chứa $x^3$ trong khai triển của $(x+1)^7$ là:
$C_7^4x^3 = 35x^3$
Vậy hệ số của $x^3$ trong đa thức P(x) là: 8 – 108 + 35 = - 65

2) Ta có: $\left(x - \frac{1}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{n-k}.\left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{n-2k}$ .
Theo giả thiết ta có: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 = 38$ .
Điều kiện:
$n \in N \quad (n \geq 2) \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 28 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 54 = 0$
Phương trình có nghiệm n = 9 thoả mãn điều kiện.
Khi đó số hạng thứ 5 của khai triển là: $(-1)^4C_9^4x^{9-2.4} = 126x$

3) Ta có:
$\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{10}^k (2x)^{10-k}.\left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{10-k}.C_{10}^k x^{10-2k}$
.
Do đó số hạng không chứa x tương ứng với
$10 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 5$
Vậy số hạng cần tìm là: $(-1)2^5.C_{10}^5 = -8064$

4) Khai triển của $(x^3 + xy)^{15}$ gồm 16 hạng tử:
Số hạng tổng quát của khai triển là:
$C_{15}^k(x^3)^{15-k}.(xy)^k = C_{15}^k x^{45-2k}y^k$
a) Hai hạng tử chính giữa trong khai triển là số hạng thứ 8 và thứ 9 trong dãy:
$C_{15}^7x^{45-2.7}y^7 = 6435.x^{31}.y^7; C_{15}^8x^{45-2.8}y^8 = 6435.x^{29}.y^8$
b) Hạng tử chứa $x^{21}y^{12}$ tương ứng với k = 12. Vậy hệ số của hạng tử đó là: $C_{15}^{12} = 455$