

CÁC BÀI TOÁN BĐT TỪ VMF 2013

Bài Toán 1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{4}{5}b \geq a - c \geq \frac{3}{5}b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{12(a-b)}{c} + \frac{12(b-c)}{a} + \frac{25(c-a)}{b}$$

Lời Giải.

Bài Toán 2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{33}{4}$$

Lời Giải.

Bài Toán 3. Cho a, b, c là các số thực thuộc $[\frac{1}{3}; 3]$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{7}{5}$$

Lời Giải.

Bài Toán 4. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + 8y^2 + 9z^2 \leq 4xyz$. Tìm GTNN của biểu thức :

$$P = \frac{4x + 2y^2 + z^3}{\sqrt{6(36y - 11\sqrt{2z})} - 11x}$$

Lời Giải.

Bài Toán 5. Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $[\frac{1}{2}; 2]$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$8 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \geq 5 \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} \right) + 9$$

Lời Giải.

Bài Toán 6. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $2x + 3y + z = 40$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = 2\sqrt{x^2 + 1} + 3\sqrt{y^2 + 16} + \sqrt{z^2 + 36}$$

Lời Giải.

Bài Toán 7. Cho $x, y, z \geq 0$, tìm min của P thỏa mãn:

$$P = (xy + yz + zx) \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{z^2 + x^2} \right)$$

Lời Giải.

Bài Toán 8. Tìm GTNN của $\left(\frac{a}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c-a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a-b}\right)^2$, với $a \neq b \neq c$

Lời Giải.

Bài Toán 9. Cho ba số $x, y, z \in (0; 1]$ thỏa mãn $x + y \geq 1 + z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{xy+z^2}$$

Lời Giải.

Bài Toán 10. Cho các số thực x, y, z thuộc $[1; 3]$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 14$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(1 - \frac{y}{x}\right) \left(2 + \frac{z}{x}\right)$$

Lời Giải.

Bài Toán 11. Cho x, y, z là các số thực $\in [1; 4]$ và $x = \max(x, y, z)$. Tìm GTNN :

$$N = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

Lời Giải.

Bài Toán 12. Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$ thỏa mãn $4a + 2b + c = 11$. Chứng minh rằng

$$\frac{33}{10} \leq \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \leq \frac{11}{2}$$

Lời Giải.

Bài Toán 13. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Trích : Đề thi thử lần 1 năm 2013 Trường THPT Chuyên KHTN Hà Nội.

Lời Giải.

Bài Toán 14. Cho các số thực dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+4a} + \frac{c+a}{c+a+16b}$$

Lời Giải.

Bài Toán 15. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{3c}{\sqrt{1 + c^2}} \leq \sqrt{10}$$

Lời Giải.

Bài Toán 16. Cho a, b, c là các số thực không âm và đôi một khác nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = [(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2] \left[\frac{1}{(a - b)^2} + \frac{1}{(b - c)^2} + \frac{1}{(c - a)^2} \right]$$

Lời Giải.

Bài Toán 17. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2a + b = 1$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{5a^3}{bc} + \frac{4b^3}{ca} + \frac{3c^3}{ab} \geq 4$$

Lời Giải.

Bài Toán 18. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a \leq b \leq c$ và $abc = 1$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$a + b^2 + c^3 \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^3}$$

Lời Giải.

Bài Toán 19. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $3a + 2b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{1}{1 + |a|} + \frac{1}{1 + |b|} + \frac{1}{1 + |c|}$$

Lời Giải.

Bài Toán 20. Cho $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a^2 - b^2)(b - c) + c^2(1 - c)$.

Lời Giải.

Bài Toán 21. Cho các số thực dương a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $2a \leq c$ và $ab + bc = 2c^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-a}$$

Lời Giải.

Bài Toán 22. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{b^2 - 2b + 3} + \frac{2b^3}{c^3 + a^2 - 2a - 3c + 7} + \frac{3c^3}{a^4 + b^4 + a^2 - 2b^2 - 6a + 11} \leq \frac{3}{2}$$

(Trích đề thi thử số 4 THPT số 427)

Lời Giải.

Bài Toán 23. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{3(b+c)}{2a} + \frac{4a+3c}{3b} + \frac{12(b-c)}{2a+3c}$$

Lời Giải.

Bài Toán 24. Cho tam giác ABC không có góc tù và $A, B, C \geq \frac{\pi}{4}$. Chứng minh rằng :

$$\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A + 3 \leq 4(2 - \sqrt{2})(\tan A + \tan B + \tan C)$$

Lời Giải.

Bài Toán 25. Cho các góc x, y, z thỏa mãn $|\sin x + \sin y + \sin z| \geq 2$. Chứng minh rằng :

$$|\cos x + \cos y + \cos z| \leq \sqrt{5}$$

Lời Giải.

Bài Toán 26. Cho năm số dương a, b, c, d, e thỏa mãn a là số nhỏ nhất và $a + b + c + d + e = 1$. Tìm $\text{Max } P = abc + bcd + cde + dea + eab$ (Trích đề thi thử chuyên DHSP Hà Nội)

Lời Giải.

Bài Toán 27. Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn: $a + b - c \geq 0, b + c - a \geq 0, c + a - b \geq 0, (a + b + c)^2 = 4(ab + bc + ca - 1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \sqrt{\frac{b+a}{c} - 1} + \sqrt{\frac{a+b}{c} - 1} + \sqrt{\frac{a+c}{b} - 1} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2}}$$

(Nguồn : <http://www.toanphothong.vn>)

Lời Giải.

Bài Toán 28. Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 4$. Tìm Min

$$P = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$$

Lời Giải.

Bài Toán 29. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $2(9z^2 + 16y^2) = (3z + 4y)xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x^2}{(x^2 + 2)} + \frac{y^2}{(y^2 + 3)} + \frac{z^2}{(z^2 + 4)} + \frac{5xyz}{(x + 2)(y + 3)(z + 4)}$$

Đề thi thử đại học số 7 năm 2013 của diễn đàn k2pi.net

Lời Giải.

Bài Toán 30. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x > 1, y > 2, z > 3$ và $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \geq 2$.
Tìm max

$$P = (x - 1)(y - 2)(z - 3)$$

Lời Giải.