

Chuyên đề 8

Nguyên Hàm - Tích Phân

§1. Nguyên Hàm

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Khái niệm nguyên hàm.

Định nghĩa 8.1. Cho hàm số f xác định trên K . Hàm số F được gọi là nguyên hàm của f trên K nếu $F'(x) = f(x)$, với mọi x thuộc K .

Nhận xét. Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì mọi nguyên hàm của f trên K đều có dạng $F(x) + C$ với $C \in \mathbb{R}$, gọi là họ tất cả các nguyên hàm của f trên K , ký hiệu là $\int f(x)dx$. Vậy $\int f(x)dx = F(x) + C$.

2. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp.

$$1. \int 0dx = C.$$

$$2. \int dx = x + C.$$

$$3. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

$$4. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$6. \int a^x du = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$9. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$$

$$10. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$$

3. Tính chất của nguyên hàm.

$$\bullet \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

$$\bullet \int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \neq 0).$$

B. Bài Tập

8.1. Tìm các họ nguyên hàm sau

$$a) \int (x^7 + 4x^3 - \sqrt{x}) dx.$$

$$b) \int \left(\sqrt[3]{x} + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

$$c) \int (3x^2 + 1)(2x - 3) dx.$$

$$d) \int \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2x)(x + 1) dx.$$

$$e) \int \left(3\sin x + \frac{2}{x} \right) dx.$$

$$f) \int (3\cos x - 3^{x-1}) dx.$$

8.2. Tìm các họ nguyên hàm sau

$$a) \int \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$b) \int \frac{x^3 + 5x^2 - 3x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx.$$

$$c) \int \frac{4^x + 1}{2^x} dx.$$

$$d) \int \frac{2^x - 1}{e^x} dx.$$

$$e) \int \tan^2 x dx.$$

$$f) \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$$

8.3. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của các hàm số sau

$$a) f(x) = 2 - x^2, \text{ biết } F(2) = \frac{7}{3}.$$

$$b) f(x) = x - \frac{1}{x^2} + 2, \text{ biết } F(1) = 2.$$

$$c) f(x) = (x+1)(x-1) + 1, \text{ biết } F(0) = 1.$$

$$d) f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 + 1, \text{ biết } F(1) = 2.$$

$$e) f(x) = ax + \frac{b}{x^2}, \text{ biết } F(-1) = 2, F(1) = 4 \text{ và } F(2) = 5.$$

8.4. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x}$ thỏa $F(1) = -1$. Tìm x để $2F(x) = \frac{1}{F(x) + 1} - 1$.

§2. Một Số Phương Pháp Tìm Nguyên Hàm

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Phương pháp đổi biến số.

Định lý 8.2. Cho hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K và hàm số $y = f(u)$ liên tục sao cho $f[u(x)]$ xác định trên K . Khi đó nếu F là một nguyên hàm của f thì $\int f[u(x)] u'(x) dx = F[u(x)] + C$.

Nhận xét. $\int f(Ax + B) dx = \frac{1}{A} F(Ax + B) + C$

2. Phương pháp nguyên hàm từng phần.

Định lý 8.3. Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì $\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$.

B. Bài Tập

8.5. Tìm các họ nguyên hàm sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } I = \int (3x + 3)^9 dx. & \text{b) } I = \int \frac{7}{2 - 9x} dx. & \text{c) } I = \int (e^{3x+1} + \cos 5x) dx. \\ \text{d) } I = \int \frac{4x - 1}{2x + 1} dx. & \text{e) } I = \int \sin^2 x dx. & \text{f) } I = \int \sin 5x \sin x dx. \end{array}$$

8.6. Tìm các họ nguyên hàm sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } I = \int x(x^2 + 1)^{2012} dx. & \text{b) } I = \int \tan x dx. & \text{c) } I = \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx. \\ \text{d) } I = \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx. & \text{e) } I = \int \cos^5 x dx. & \text{f) } I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx. \end{array}$$

8.7. Tìm các họ nguyên hàm sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } I = \int x(x - 1)^{2012} dx. & \text{b) } I = \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx. & \text{c) } I = \int x^5 \sqrt{x^3 + 1} dx. \\ \text{d) } I = \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx. & \text{e) } I = \int \frac{2 \ln x - 1}{x \ln x} dx. & \text{f) } I = \int \sin^3 x \sqrt{1 + \cos x} dx. \end{array}$$

8.8. Tìm các họ nguyên hàm sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } I = \int (x - 1) e^x dx. & \text{b) } I = \int x \cos x dx. & \text{c) } I = \int x^2 \ln x dx. \\ \text{d) } I = \int \ln(2x + 1) dx. & \text{e) } I = \int x^2 e^{2x-1} dx. & \text{f) } I = \int e^x \sin x dx. \end{array}$$

§3. Tích Phân

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Khái niệm tích phân.

Định nghĩa 8.4. Cho hàm số f liên tục trên K và a, b là hai số bất kỳ thuộc K . Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân của f từ a đến b và ký hiệu là $\int_a^b f(x) dx$.

Nhận xét.

- Hiệu số $F(b) - F(a)$ còn được ký hiệu là $F(x)|_a^b$. Khi đó $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.
- Tích phân không phụ thuộc biến số, tức là $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots = F(b) - F(a)$.

2. Tính chất của tích phân.

Định lý 8.5. Giả sử các hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c là ba số bất kỳ thuộc K . Khi đó ta có

$$\begin{array}{ll} 1) \int_a^a f(x) dx = 0. & 2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \\ 3) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx. & \\ 4) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx. & 5) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \in \mathbb{R}). \end{array}$$

3. Tích phân của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Bài toán 8.1. Tính tích phân $I = \int_a^b |f(x)| dx$.

Phương pháp.

- Cho $f(x) = 0 \Rightarrow x = x_i$ (chỉ lấy những x_i thuộc khoảng $(a; b)$).
- Khi đó $I = \int_a^{x_i} |f(x)| dx + \int_{x_i}^b |f(x)| dx$.
- Xét dấu $f(x)$ trên các khoảng $(a; x_i)$ và $(x_i; b)$ để phá giá trị tuyệt đối.

Lưu ý. Để xét dấu $f(x)$ trên $(a; x_i)$ ta lấy $x_0 \in (a; x_i)$ thay vào $f(x)$ để xác định dấu.

B. Bài Tập

8.9. Tính các tích phân sau

a) $I = \int_0^1 5x^4 dx.$

b) $I = \int_1^e \frac{dx}{x}.$

c) $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx.$

d) $I = \int_0^{\ln 2} e^{-x} dx.$

e) $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x - 1)^{2012} dx.$

f) $I = \int_{-1}^1 \sqrt{5 - 4x} dx.$

8.10. Tính các tích phân sau

a) $I = \int_0^1 e^{2-5x} dx.$

b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) dx.$

c) $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 2x} dx.$

d) $I = \int_0^1 (-2x + 1)^7 dx.$

e) $I = \int_1^2 \sqrt[3]{3x + 2} dx.$

f) $I = \int_{-1}^0 \frac{4}{(3 - 5x)^3} dx.$

8.11. Tính các tích phân sau

a) $I = \int_1^2 (6x^2 - 4x + 1) dx.$

b) $I = \int_0^{\ln 2} (e^x + 2x) dx.$

c) (CD-2010) $I = \int_0^1 \frac{2x - 1}{x + 1} dx.$

d) $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2 2x dx.$

e) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x + 1}{1 - \sin^2 x} dx.$

f) $I = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} dx.$

8.12. Tính các tích phân sau

a) $I = \int_1^4 (2x + \sqrt{x}) dx.$

b) $I = \int_2^4 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 dx.$

c) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \sin \frac{x}{2} \right) \cos \frac{x}{2} dx.$

d) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos x dx.$

e) $I = \int_0^1 \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} dx.$

f) $I = \int_0^1 x(x - 1)^{2009} dx.$

8.13. Tính các tích phân sau

a) $I = \int_{-2}^2 |x - 1| dx.$

b) $I = \int_0^4 |3 - x| dx.$

c) (D-03) $I = \int_0^2 |x^2 - x| dx.$

d) $I = \int_0^2 |x^2 - 3x + 2| dx.$

e) $I = \int_{-2}^2 |2x - |x + 1|| dx.$

f) $I = \int_{-2}^3 (|x + 1| + |x - 2|) dx.$

g) $I = \int_0^3 \left| \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 1 \right| dx.$

h) $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx.$

i) (BĐT-103) $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx.$

§4. Một Số Phương Pháp Tính Tích Phân

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Phương pháp hệ số bất định.

Bài toán 8.2. Tính tích phân $I = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx$, trong đó bậc $f(x) < \text{bậc } g(x)$.

Phương pháp. Phân tích tích phân cần tính thành tổng hoặc hiệu của các tích phân có mẫu là các nhị thức bậc nhất hoặc tam thức bậc hai có biệt thức $\Delta < 0$ hoặc các lũy thừa của chúng.

Lưu ý.

a) Nếu bậc $f(x) \geq \text{bậc } g(x)$ thì chia $f(x)$ cho $g(x)$.

b) Trong thực hành ta thường gặp các trường hợp sau

- $\frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$.
- $\frac{ax+b}{(x-x_0)^2} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2}$.
- $\frac{ax^2+bx+c}{(a_1x+b_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)} = \frac{A}{a_1x+b_1} + \frac{B}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \frac{C(2a_2x+b_2)}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ (tam thức vô nghiệm).

Sau khi phân tích như trên ta dùng phương pháp đồng nhất hệ số hoặc phương pháp trị số riêng để tìm $A, B, C, \dots$

2. Phương pháp đổi biến dạng 1.

Bài toán 8.3. Tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$.

Phương pháp.

- Đặt $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t) dt$.
- Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = \alpha; x = b \Rightarrow t = \beta$ (trong đó $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$).
- Khi đó $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$.

Lưu ý.

- $a^2 + x^2$: $x = |a| \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- $\sqrt{a^2 - x^2}$: $x = |a| \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\sqrt{x^2 - a^2}$: $x = \frac{|a|}{\sin t}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$.

3. Phương pháp đổi biến dạng 2.

Bài toán 8.4. Tính tích phân $I = \int_a^b f[u(x)] u'(x) dx$.

Phương pháp.

- Đặt $u = u(x) \Rightarrow du = u'(x) dx$.
- Đổi cận: $x = a \Rightarrow u = u(a); x = b \Rightarrow u = u(b)$.
- Khi đó $I = \int_a^b f(u) du$.

Lưu ý. $u(x)$ thường nằm trong dấu lũy thừa, lượng giác, trên số mũ, dưới mẫu hay cả dấu căn, dấu lôgarit.

4. Phương pháp tích phân từng phần.

Bài toán 8.5. Tính tích phân $I = \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$.

Phương pháp.

- Đặt $\begin{cases} u = u(x) \\ dv = v'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = u'(x) dx \\ v = \int v'(x) dx \end{cases} \quad (\text{chọn } C = 0)$.
- Khi đó $I = uv|_a^b - \int_a^b v du$.

Lưu ý. Trong tích phân từng phần ta thường gặp các trường hợp sau

- $I = \int \{P(x); e^x\} dx$ $u = P(x)$
- $I = \int \{P(x); \sin x, \cos x, \frac{1}{\cos^2 x}, \frac{1}{\sin^2 x}\} dx$ $u = P(x)$
- $I = \int \{P(x); \ln x\} dx$ $u = \ln x$
- $I = \int \{e^x; \sin x, \cos x\} dx$ $u = e^x$ (hoặc $u = \sin x, \cos x$)

B. Bài Tập

8.14. Tính các tích phân sau

a) $I = \int_3^5 \frac{1}{(x-2)(x+1)} dx.$

b) $I = \int_0^1 \frac{5x-13}{x^2-5x+6} dx.$

c) $I = \int_0^1 \frac{x^4}{x^2-1} dx.$

d) (DB-07) $I = \int_0^1 \frac{x(x-1)}{x^2-4} dx.$

e) $I = \int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9} dx.$

f) (B-2012) $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+3x^2+2} dx.$

8.15. Tính các tích phân sau

a) $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2} dx.$

b) $I = \int_1^2 \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)} dx.$

c) $I = \int_0^1 \frac{4x-2}{(x+2)(x^2+1)} dx.$

d) $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x+x^3} dx.$

e) $I = \int_1^2 \frac{1-x^4}{x+x^5} dx.$

f) $I = \int_0^1 \frac{1}{(x^2-3x+2)^2} dx.$

8.16. Tính các tích phân sau

a) $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$

b) $I = \int_0^1 \frac{1}{3+x^2} dx.$

c) $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx.$

d) $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$

e) $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

f) $I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$

8.17. Tính các tích phân sau

a) $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx.$

b) $I = \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx.$

c) $I = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx.$

d) $I = \int_0^1 \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2+x+1} dx.$

e) $I = \int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx.$

f) $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3^x+1} dx.$

8.18. Tính các tích phân sau

a) $I = \int_0^1 x^3(1+x^4)^3 dx.$

b) $I = \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+7} dx.$

c) (DB-02) $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx.$

d) (BĐT-18) $I = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx.$

e) $I = \int_0^1 x^5(x^2+1)^{2011} dx.$

f) $I = \int_1^2 \frac{(2x-1)^{10}}{(x+1)^{12}} dx.$

8.19. Tính các tích phân sau

a) (DB-03) $I = \int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2} dx.$

b) (D-2011) $I = \int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} dx.$

c) $I = \int_2^6 \frac{1}{2x+1+\sqrt{4x+1}} dx.$

d) (A-03) $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}} dx.$

e) $I = \int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx.$

f) $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+8)}} dx.$

8.20. Tính các tích phân sau

a) (D-09) $I = \int_1^3 \frac{1}{e^x-1} dx.$

b) $I = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^{-x}} dx.$

c) (A-2010) $I = \int_0^1 \frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x} dx.$

d) (DB-03) $I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}} dx.$

e) $I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x}{(10-e^x)\sqrt{e^x-1}} dx.$

f) (B-2010) $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2} dx.$

g) $I = \int_1^e \frac{1+\ln^3 x}{x} dx.$

h) $I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(\ln^2 x - 3\ln x + 2)} dx.$

i) (B-04) $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \cdot \ln x}{x} dx.$

8.21. Tính các tích phân sau

a) (D-06) $I = \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx.$

b) (CD-09) $I = \int_0^1 (e^{-2x} + x)e^x dx.$

d) (D-2012) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x) dx.$

d) (D-08) $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx.$

e) (D-04) $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx.$

f) (A-2012) $I = \int_1^3 \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} dx.$

8.22. Tính các tích phân sau

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} dx.$

d) (D-2010) $I = \int_1^e \left(2x - \frac{3}{x}\right) \ln x dx.$

c) $I = \int_{-1}^0 x(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}) dx.$

d) (B-09) $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(1+x)^2} dx.$

e) $I = \int_0^{\ln 3} \frac{xe^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx.$

f) (B-2011) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + x \sin x}{\cos^2 x} dx.$

8.23. Tính các tích phân sau

a) $I = \int_0^{\ln 2} x^2 e^x dx.$

b) (DB-07) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx.$

c) (D-07) $I = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx.$

d) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx.$

e) (BDT-37) $I = \int_0^{\pi} e^{2x} \sin^2 x dx.$

f) $I = \int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x) dx.$

g) (DB-03) $I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx.$

h) (DB-04) $I = \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx.$

i) $I = \int_{e^2}^{e^5} \frac{\ln x \cdot \ln(\ln x)}{x} dx.$

§5. Tích Phân Của Hàm Số Lượng Giác

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Dạng $\int_a^b \sin^m x \cos^n x dx.$

- Nếu m lẻ thì đặt $u = \cos x.$
- Nếu m, n dương chẵn thì hạ bậc.
- Nếu $m = 0$ và n âm chẵn thì đặt $u = \tan x.$
- Nếu $n = 0$ và m âm chẵn thì đặt $u = \cot x.$

2. Dạng $\int_a^b \{f(\sin x); \cos x\} dx$ hoặc $\int_a^b \{f(\cos x); \sin x\} dx.$ Đặt $u = \sin x$ hoặc $u = \cos x.$

3. Dạng $\int_a^b \{f(\tan x); \frac{1}{\cos^2 x}\} dx$ hoặc $\int_a^b \{f(\cot x); \frac{1}{\sin^2 x}\} dx.$ Đặt $u = \tan x$ hoặc $u = \cot x.$

B. Bài Tập

8.24. Tính các tích phân sau

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx.$

b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx.$

c) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx.$

d) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx.$

e) $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx.$

f) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 x} dx.$

g) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x dx.$

h) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx.$

i) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x \sin^2 x} dx.$

8.25. Tính các tích phân sau

a) (B-03) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx.$

b) (B-05) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx.$

c) (D-05) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx.$

$$\text{d) (A-06) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx. \text{ e) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{7 + \cos 2x}} dx.$$

$$\text{f) (A-11) } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx.$$

8.26. Tính các tích phân sau

$$\text{a) } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2 \tan x \right)} dx. \quad \text{b) (A-08) } I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx.$$

$$\text{c) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x} dx.$$

$$\text{d) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} dx.$$

$$\text{e) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx.$$

$$\text{f) (BDT-57) } I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} dx.$$

§6. Ứng Dụng Của Tích Phân

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Tính diện tích hình phẳng.

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục Ox và 2 đường thẳng $x = a$, $x = b$ là $S = \int_a^b |f(x)| dx$.
- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$ và 2 đường thẳng $x = a$, $x = b$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.
- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $x = f(y)$, $x = g(y)$ và 2 đường thẳng $y = a$, $y = b$ là $S = \int_a^b |f(y) - g(y)| dy$.

2. Tính thể tích khối tròn xoay.

- Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox là $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.
- Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ (trong đó $f(x)$ và $g(x)$ cùng dấu) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox là $V_x = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$.
- Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = a$, $y = b$ quanh trục Oy là $V_y = \pi \int_a^b g^2(y) dy$.

B. Bài Tập

8.27. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

- a) $y = x^2 - 2x$; Ox ; $x = -1$ và $x = 2$.
 b) $y = \frac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ.
 c) $y = -x^3 - 3x^2$ và trục hoành.
 d) $y = x^2 - 2x$ và $y = -x^2 + 4x$.
 a) (A-07) $y = (e+1)x$, $y = (1+e^x)x$.
 b) (B-02) $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$.

8.28. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

- a) (A-02) $y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = x + 3$.
 b) (BDT-96) $y^2 = 2x$ và $27y^2 = 8(x-1)^3$.
 c) $y = x^3$; $x + y = 2$ và trục hoành.
 d) $y = \frac{27}{x}$; $y = \frac{x^2}{27}$ và $y = x^2$.

8.29. Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường cong sau khi quay quanh Ox

- a) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$.
 b) (BDT-42) $y = xe^x$, $x = 1$ và trục hoành.
 c) (B-07) $y = x \ln x$; $y = 0$ và $x = e$.
 d) $y = 4 - x^2$ và $y = x^2 + 2$.

8.30. Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường cong sau khi quay quanh Oy

- a) (BDT-63) $y = 2x - x^2$ và $y = 0$.
 b) $y = x^2$, $y = \frac{27}{x}$ và $y = \frac{x^2}{27}$.
 c) $y^2 = (x-1)^3$ và $x = 2$.
 d) $4y = x^2$ và $y = x$.