

Chuyên đề 10

Hình Học Không Gian

§1. Quan Hệ Song Song

A. Kỹ Năng Cơ Bản

- 1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.**
Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng. Đường thẳng qua hai điểm chung là giao tuyến.
- 2. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.**
TH1: Nếu trong (α) chứa b cắt a tại I thì giao điểm của a với (α) là I .
TH2: Nếu chưa có b thì tìm (β) chứa a và cắt (α) theo b . Giao điểm của a và (α) là giao của a và b .
- 3. Chứng minh hai đường thẳng song song.**
C1: Chỉ ra hai đường thẳng cùng thuộc một mặt phẳng và sử dụng các tính chất của hình học phẳng.
C2: Sử dụng DL về giao tuyến của ba mặt phẳng.
- 4. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng.**
Chỉ ra đường thẳng song song với một đường thẳng chứa trong mặt phẳng.
- 5. Chứng minh hai mặt phẳng song song.**
Chỉ ra mặt phẳng này song song với hai đường thẳng cắt nhau chứa trong mặt phẳng kia.

B. Bài Tập

- 10.1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB và CD không song song và M là điểm thuộc miền trong của tam giác SCD . Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng
- a) (SAC) và (SBD) .
 - b) (SAB) và (SCD) .
 - c) (SBM) và (SCD) .
 - d) (ABM) và (SCD) .
 - e) (ABM) và (SAC) .
- 10.2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC .
- a) Tìm giao điểm I của AM với (SBD) . Chứng minh $IA = 2IM$.
 - b) Tìm giao điểm F của SD và (ABM) . Chứng minh F là trung điểm của SD .
 - c) Gọi N là điểm tùy ý trên cạnh AB . Tìm giao điểm của MN với (SBD) .
- 10.3.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Kéo dài BC một đoạn $CE = a$. Kéo dài BD một đoạn $DF = a$. Gọi M là trung điểm của AB . Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (MEF) . Tính diện tích thiết diện.
- 10.4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB ; G là trọng tâm tam giác SAD .
- a) Tìm giao điểm I của GM và mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh (CGM) chứa CD .
 - b) Chứng minh (CGM) qua trung điểm của SA . Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (CGM) .
 - c) Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (AGM) .
- 10.5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi M, N là trung điểm SA, SB .
- a) Chứng minh MN song song với CD .
 - b) Gọi P là giao điểm của SC và (ADN) . Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I . Chứng minh SI, AB, CD đôi một song song. Tứ giác $SABI$ là hình gì.
- 10.6.** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi I, J lần lượt là trung điểm AC, BC ; K là điểm trên cạnh BD sao cho $KB = 2KD$.
- a) Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (IJK) . Chứng minh thiết diện là hình thang cân.
 - b) Tính diện tích thiết diện theo a .
- 10.7.** Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác ABD và M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh MG song song với (ACD) .

- 10.8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD .
- Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD) .
 - Gọi P là trung điểm SA . Chứng minh SB, SC đều song song với mặt phẳng (MNP) .
 - Gọi G_1, G_2 là trọng tâm các tam giác ABC và SBC . Chứng minh G_1G_2 song song với (SAB) .
- 10.9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, CD .
- Chứng minh hai mặt phẳng OMN và (SBC) song song với nhau.
 - Gọi I là trung điểm SC ; J nằm trên $(ABCD)$ và cách đều AB, CD . Chứng minh đường thẳng IJ song song với (SAB) .

§2. Quan Hệ Vuông Góc

A. Kỹ Năng Cơ Bản

- Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.**
Chỉ ra đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng.
- Chứng minh hai đường thẳng vuông góc.**
C1: Chỉ ra một mặt phẳng chứa đường này và vuông với đường kia.
C2: Chỉ ra hình chiếu của đường này trên mặt phẳng chứa đường kia vuông góc với đường kia.
- Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc.**
Chỉ ra một đường thẳng chứa trong mặt này và vuông với mặt kia.
- Tìm góc giữa hai đường thẳng.**
Tìm b' song song b và cắt a . Góc giữa a và b bằng góc giữa a và b' .
- Tìm góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.**
Xác định hình chiếu của đường thẳng lên mặt phẳng. Góc giữa đường thẳng và hình chiếu là góc cần tìm.
- Tìm góc giữa hai mặt phẳng.**
Tìm a, b nằm trong hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến và cắt giao tuyến tại một điểm.
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.**
C1: Tìm đoạn vuông góc chung.
C2: Xác định (α) chứa b và song song với a . Khoảng cách giữa a và b là khoảng cách từ $M \in a$ đến (α) .

B. Bài Tập

- 10.10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a , SA vuông góc với $(ABCD)$, $SA = 2a$.
- Chứng minh các mặt của hình chóp là các tam giác vuông.
 - Gọi H là hình chiếu của A lên SB . Chứng minh $AH \perp SC$ và $(SAC) \perp (SBD)$.
 - Gọi K là hình chiếu của O lên SC . Chứng minh $OK \perp BD$. Từ đó tính khoảng cách giữa BD và SC .
- 10.11.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{2}$ và $AB = a$, O là tâm đáy.
- Chứng minh SA vuông góc với BC .
 - Tính góc giữa SA và (ABC) .
 - Tính góc giữa (SBC) và (ABC) .
 - Tính khoảng cách giữa BC và SA .
- 10.12.** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông tại B ; $SA = AB = BC = a$ và SA vuông góc với (ABC) . Gọi I là trung điểm AB ; H, K lần lượt là hình chiếu của A, I lên SB .
- Chứng minh BC vuông góc với (SAB) và AH vuông góc với SC . Tính góc giữa AC và (SBC) .
 - Chứng minh tam giác IKC vuông. Từ đó tính diện tích tam giác IKC theo a .
- 10.13.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SO = a$ và SO vuông góc với $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ O đến (SBC) và khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB .
- 10.14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi O là giao của AC và BD . Đường thẳng SO vuông góc với $(ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của BC , F là trung điểm của BE . Chứng minh $(SOF) \perp (SBC)$. Tính khoảng cách từ O và A đến (SBC) .
- 10.15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SC = a$, $SD = x$. Chứng minh AC vuông góc với (SBD) và tam giác SBD vuông. Tìm x để SD hợp với $(ABCD)$ một góc bằng 30° .
- 10.16.** (A-02) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC . Tính theo a diện tích tam giác AMN , biết rằng $(AMN) \perp (SBC)$.
- 10.17.** (D-07) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB . Chứng minh tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến (SCD) .

10.18. (B-07) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA , M trung điểm AE , N trung điểm BC . Chứng minh $MN \perp BD$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC .

10.19. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$; $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm của cạnh AC . Chứng minh SI vuông góc với (ABC) và tính khoảng cách từ S đến (ABC) .

10.20. (B-02) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Tính theo a khoảng cách giữa $A'B$ và $B'D$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $BB', CD, A'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và $C'N$.

10.21. Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Gọi K trung điểm DD' . Tính góc và khoảng cách giữa CK và $A'D$. Tính độ dài đoạn vuông góc chung giữa $A'C'$ và $B'C$.

§3. Thể Tích Khối Đa Diện

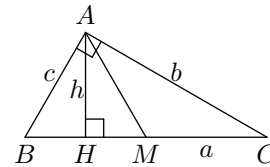
A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Công thức tính thể tích của một số khối đa diện.

- Khối chóp: $V = \frac{1}{3}Bh$.
- Khối lăng trụ: $V = Bh$.
- Khối hộp chữ nhật: $V = abc$.
- Khối lập phương: $V = a^3$.

2. Hệ thức lượng trong tam giác vuông.

- Định lý Pitago: $a^2 = b^2 + c^2$.
- Đường cao: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$; $h = \frac{bc}{a}$.
- Góc: $\sin B = \cos C = \frac{b}{a}$; $\tan B = \cot C = \frac{b}{c}$.
- Diện tích: $S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}ah$.



- Tính chất trung tuyến: $\triangle ABC$ vuông tại $A \Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}BC$.

3. Tỷ số thể tích.

Cho hình chóp $S.ABC$ có A', B', C' lần lượt nằm trên SA, SB, SC . Ta có: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$.

B. Phương Pháp Tính Thể Tích

- **PP1:** Sử dụng công thức.
- **PP2:** Sử dụng tỷ số thể tích.
- **PP3:** Sử dụng phương pháp tọa độ.

C. Bài Tập

10.22. (TN-08) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh SA vuông góc với BC . Tính thể tích khối chóp $S.ABI$ theo a .

10.23. Cho chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng a . Tính thể tích khối chóp biết góc giữa cạnh bên và đáy bằng 60° .

10.24. Cho chóp tứ giác đều $S.ABCD$ đáy a . Tính thể tích khối chóp biết góc giữa mặt bên và đáy bằng 60° .

10.25. (CD-09) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB và CD . Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với đường thẳng SP . Tính theo a thể tích của khối tứ diện $AMNP$.

10.26. (B-04) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ , ($0 < \varphi < 90^\circ$). Tính tan góc giữa (SAB) và $(ABCD)$ theo φ . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a và φ .

10.27. (B-2012) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $SA = 2a, AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC . Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (ABH) . Tính thể tích của khối chóp $S.ABH$ theo a .

10.28. (TN-07) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = AC$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

10.29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B ; $AB = a, AC = a\sqrt{3}$; SA vuông góc với (ABC) ; cạnh bên SB lập với (ABC) một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- 10.30.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a ; SA vuông góc với (ABC) . Biết góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.
- 10.31.** (TN-09) Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết $\widehat{BAC} = 120^\circ$, tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a .
- 10.32.** (TN-2011) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AD = CD = a$, $AB = 3a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và cạnh bên SC tạo với đáy một góc 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .
- 10.33.** Cho hình chóp $S.ABC$. Đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh SA vuông góc với đáy, $\widehat{ACB} = 60^\circ$, $BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm cạnh SB . Chứng minh (SAB) vuông góc với (SBC) và tính thể tích khối tứ diện $MABC$.
- 10.34.** (CD-2011) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$; SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30° . Gọi M là trung điểm của cạnh SC . Tính thể tích khối chóp $S.ABM$ theo a .
- 10.35.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Đường cao $SA = a$. Trên hai cạnh AB, AD lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $AM = DN = x$, ($0 < x < a$). Tính thể tích khối chóp $S.AMCN$ theo a và x . Tìm x để MN nhỏ nhất.
- 10.36.** (B-06) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC ; I là giao điểm của BM và AC . Chứng minh (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB) . Tính thể tích của khối tứ diện $ANIB$.
- 10.37.** (D-06) Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a ; $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC . Tính thể tích khối chóp $A.BCNM$.
- 10.38.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N . Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$.
- 10.39.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $A.BCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi C' là trung điểm của SC . Mặt phẳng (P) đi qua AC' và song song với BD , cắt các cạnh SB, SD của hình chóp lần lượt tại B', D' . Tính thể tích của khối chóp $S.AB'C'D'$.
- 10.40.** (A-2011) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là trung điểm AB ; mặt phẳng qua SM và song song với BC , cắt AC tại N . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a .
- 10.41.** (CD-2010) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = SB$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45° . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.
- 10.42.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $SD = a\sqrt{13}$, tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD .
- 10.43.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt trung điểm các cạnh SB, BC, CD . Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích tứ diện $CMNP$.
- 10.44.** (D-2011) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BA = 3a, BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a .
- 10.45.** (B-08) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a, SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC . Tính theo a thể tích khối chóp $S.BMDN$ và tính góc giữa hai đường thẳng SM và DN .
- 10.46.** (A-2012) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .
- 10.47.** Cho hình chóp $S.ABC$ có hai tam giác ABC và SBC đều cạnh a ; góc giữa SA và ABC bằng 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

- 10.48.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = CA = AD = DB = a\sqrt{2}, CD = 2a$. Chứng minh AB vuông góc với CD . Xác định đường vuông góc chung của AB và CD . Tính thể tích của tứ diện $ABCD$.
- 10.49.** (D-2010) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC , $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC . Chứng minh M là trung điểm SA và tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo a .
- 10.50.** (A-2010) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD ; H là giao điểm của CN với DM . Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC .
- 10.51.** (A-09) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ; $AB = AD = 2a, CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi I là trung điểm cạnh AD . Biết mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .
- 10.52.** Tính thể tích hình chóp $S.ABC$, biết $SA = SB = SC = a, \widehat{ASB} = 60^\circ, \widehat{BSC} = 90^\circ, \widehat{CSA} = 120^\circ$.
- 10.53.** Tính thể tích của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a và $AA' = AC$.
- 10.54.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a, BC = a\sqrt{3}, AC' = 2a$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
- 10.55.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a, AA' = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và $B'C$. Gọi M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AM = 3MD$, tính khoảng cách từ M đến $(AB'C)$ và tính thể tích tứ diện $AB'D'C$.
- 10.56.** Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = AD = a, AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'D'$ và $A'B'$. Chứng minh AC' vuông góc với $BDMN$ và tính thể tích khối chóp $A.BDMN$.
- 10.57.** (D-2012) Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Tính thể tích của khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a .
- 10.58.** (D-09) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ A đến (IBC) .
- 10.59.** (D-08) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = AC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.
- 10.60.** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Góc giữa $A'A$ với (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ, biết hình chiếu của A' trên (ABC) trùng với tâm của tam giác ABC .
- 10.61.** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a, AC = a\sqrt{2}$, hình chiếu của A' trên (ABC) trùng trung điểm BC . Tính thể tích khối lăng trụ, biết $CC' = 2a$.
- 10.62.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có mặt bên $AA'D'D$ là hình thoi cạnh $2a$, nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$ và cách BC một khoảng bằng a . Biết cạnh bên AA' hợp với $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.
- 10.63.** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a và điểm A' cách đều các điểm A, B, C . Cạnh bên AA' tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính thể tích của khối lăng trụ.
- 10.64.** (A-08) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.
- 10.65.** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30° và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
- 10.66.** (B-09) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° ; tam giác ABC vuông tại C và góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Tính thể tích tứ diện $A'ABC$ theo a .
- 10.67.** (B-2011) Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ theo a .

§4. Mặt Nón - Mặt Trụ - Mặt Cầu

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Diện tích và thể tích.

- Khối nón: $S_{xq} = \pi rl$; $S_{tp} = S_{xq} + S_d$; $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
- Khối trụ: $S_{xq} = 2\pi rl$; $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d$; $V = Bh = \pi r^2 h$.
- Khối cầu: $S = 4\pi R^2$; $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

2. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu.

- $d > R$: Mặt phẳng không cắt mặt cầu.
- $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại một điểm.
- $d < R$: Mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính .

B. Bài Tập

10.68. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , $\widehat{SAB} = 60^\circ$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của khối nón đỉnh S , đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

10.69. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính diện tích xung quanh và thể tích của khối nón có đỉnh O là tâm hình vuông $ABCD$ và đáy nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$.

10.70. Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng qua trục được tam giác vuông cân cạnh huyền $a\sqrt{2}$. Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón. Cho dây cung BC của đường tròn đáy sao cho (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính diện tích tam giác SBC .

10.71. Cho hình nón đỉnh S , đường cao SO . Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\widehat{SAO} = 30^\circ, \widehat{SAB} = 60^\circ$. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón.

10.72. Cắt hình trụ tròn xoay bởi mặt phẳng (α) được thiết diện $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết (α) tạo với đáy một góc 45° , tính diện tích xung quanh và thể tích khối trụ.

10.73. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $2a$ và khoảng cách giữa hai đáy bằng a . Cắt khối trụ bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng a . Tính diện tích thiết diện tạo thành.

10.74. (A-06) Cho hình trụ có đáy là hai hình tròn tâm O và O' , bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a . Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A , trên đường tròn tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Tính thể tích tứ diện $OO'AB$.

10.75. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a, BC = a\sqrt{2}, SB = 2a$. Biết SA vuông góc với đáy. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

10.76. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Biết $AB = 2a, SA = BC = a, CD = 2a\sqrt{5}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SACD$.

10.77. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Tính diện tích và thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp.

10.78. (CD-2012) Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB = a\sqrt{2}, SA = SB = SC$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a .

10.79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = a\sqrt{2}, BC = a\sqrt{6}$ và độ dài các cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi giao điểm của AC và BD là H . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $SHAB$.

10.80. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân, $AB = AC = a, (SBC) \perp (ABC)$ và $SA = SB = a$. Chứng minh SBC là tam giác vuông. Biết $SC = x$, xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

10.81. (D-03) Cho (P) và (Q) vuông góc với nhau cắt nhau theo giao tuyến Δ . Trên Δ lấy A, B với $AB = a$. Trong (P) lấy điểm C , trong (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và tính khoảng cách từ A đến (BCD) theo a .

10.82. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ biết $AA' = AB = a; AC = 2a$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M là giao điểm của $A'C$ và AC' . Tính thể tích tứ diện $MBB'C$ và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

10.83. (B-2010) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a .