Bất đẳng thức
và
Phương pháp chứng minh

Giáo viên hướng dẫn: PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ
Tác giả: Nguyễn Tiến Thành
Khoa Toán - Trường Đại học Khoa học Thái Nguyên

MỞ ĐẦU

Bất đẳng thức là một vấn đề khá cổ điển, nhưng xuất hiện trong mọi lĩnh vực của toán học. Trong chương trình toán phổ thông, bất đẳng thức có mặt ở tất cả các bộ môn Số học, Đại số, Giải tích, Hình học và Lượng giác. Đặc biệt, trong kỳ thi Đại học, Học sinh giỏi quốc gia và quốc tế đều có bài bất đẳng thức. Chính vì thế mà chuyên đề bất đẳng thức rất thiết thực đối với những ai muốn tìm hiểu sâu về toán sơ cấp. Hơn nữa, bất đẳng thức còn liên quan đến sự đánh giá, tìm cái chặn hoặc cực trị cho một biểu thức. Bởi vậy bất đẳng thức là một trong số những bài toán được rất nhiều người thuộc nhiều lĩnh vực quan tâm đến.

Bất đẳng thức không phải là bài toán khó, nhưng chọn cách chứng minh như thế nào cho đơn giản. Sáng tác bất đẳng thức cũng không khó, nhưng biểu diễn hình thức ở hai vế thế nào cho đẹp mắt. Nếu để ý sẽ thấy các bài toán bất đẳng thức được chia ra làm hai nhóm. Nhóm I là vận dụng một số bất đẳng thức luôn đúng để chứng minh một bất đẳng thức mới qua các phép biến đổi và nhóm II là tìm cực trị một biểu thức. Đây chính là bài toán tìm một cái chặn và xét xem khi nào biểu thức sẽ đạt được cái chặn ấy. Như vậy, chuyên đề trình bày ở đây nhằm giải quyết được hai vấn đề chính:

(i) Chứng minh lại, nhưng theo phương pháp sáng tác, một số bất đẳng thức gắn liền với tên tuổi những nhà toán học và trình bày việc vận dụng để giải quyết một vài ví dụ.

(ii) Tìm cực trị cho một số biểu thức để từ đó suy ra tính chất đặc biệt cần quan tâm của một đối tượng nào đó.

Luận văn này gồm ba chương. Chương 1 trình bày khái niệm và một vài tính chất đặc biệt của bất đẳng thức được nhắc lại cùng với một vài ví dụ vận dụng ở mục 1.1. Mục 1.2 giới thiệu một vài phương pháp đơn giản thường sử dụng để chứng minh bất đẳng thức.

Chương 2: Tập trung trình bày phương pháp hàm số để xây dựng bất đẳng thức cùng với việc chứng minh lại một số bất đẳng thức cổ điển.

Chương 3: Một số ứng dụng bất đẳng thức về việc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một biểu thức ở mục 3.1, chứng minh bất đẳng thức trong hình sơ cấp ở mục 3.2, áp dụng giải phương trình và hệ phương trình với những điều kiện nhất định ở mục 3.3 .

Dù đã rất cố gắng, nhưng chắc chắn nội dung được trình bày trong luận văn không tránh khỏi những thiếu xót nhất định và tác giả rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô giáo và các bạn.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS. TS. Đàm Văn Nhỉ. Xin được tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới thầy. Tác giả xin cảm ơn chân thành tới Trường Đại học Khoa Học Thái Nguyên, nơi tác giả đã nhận được một học vấn sau đại học căn bản và cuối cùng, xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã cảm thông, ủng hộ và giúp đỡ trong suốt thời gian trong thời gian tác giả học Cao học và viết luận văn.

Hà Nội, ngày 09 tháng 09 năm 2011
Nguyễn Tiến Thành

Mục lục

Chương 1

Bất đẳng thức

1.1 Khái niệm và một vài tính chất của bất đẳng thức

Định nghĩa 1.1.1. Cho hai số thực a và b. a được gọi là *lớn hơn* b, ký hiệu $a > b$, nếu hiệu $a - b$ là một số dương; a được gọi là *lớn hơn hoặc bằng* b, ký hiệu $a \geqslant b$, nếu hiệu $a - b$ là một số không âm; a được gọi là *nhỏ hơn* b, ký hiệu $a < b$, nếu hiệu $a - b$ là một số âm; a được gọi là *nhỏ hơn hoặc bằng* b, ký hiệu $a \leqslant b$, nếu hiệu $a - b$ là một số không dương.
Giá trị tuyệt đối của a là $|a| = \begin{cases} \ \ a \text{ khi } a \geqslant 0 \\ -a \text{ khi } a < 0. \end{cases}$

Tính chất 1.1.2. *Với các số thực a, b, c và số tự nhiên n luôn có tính chất:*

$$\begin{aligned}
a > b &\iff a - b > 0 \\
a > b &\iff a + c > b + c \\
a > b &\iff a^{2n+1} > a^{2n+1} \\
|a| > |b| &\iff a^{2n} > a^{2n} \\
a \geqslant b &\iff \left[\begin{smallmatrix} a=b \\ a>b. \end{smallmatrix}\right. \\
\textit{Với } a > b,\ \ c > 0 &\iff ac > bc \\
c < 0 &\iff ac < bc. \\
a > b, b > c &\implies a > c. \\
|a| \leqslant \alpha &\iff \begin{cases} \alpha \geqslant 0 \\ -\alpha \leqslant a \leqslant \alpha. \end{cases}
\end{aligned}$$

Khi chứng minh bất đẳng thức, những đồng nhất thức thường được sử dụng:

Mệnh đề 1.1.3. *Với các số thực* a, b, c, x, y, z *và* $d \neq 0$ *có các đồng nhất thức sau đây:*

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *và* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

(ii) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$.

(iii) $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$ *và* $(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$.

(iv) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

(v) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ *và* $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

(vi) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$.

(vii) $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$.

(viii) $|ab| = |a||b|, |\frac{a}{d}| = \frac{|a|}{|d|}$ *và* $|a| = |b|$ *khi và chỉ khi* $a = \pm b$.

Ba bổ đề dưới đây trình bày các bất đẳng thức thường được sử dụng sau này.

Bổ đề 1.1.4. *Với các số thực* a, b, c, x, y, z *và* $d \neq 0$ *có các kết quả sau:*

(i) $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

(ii) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geqslant (ax + by)^2$.

(iii) $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant (ax + by + cz)^2$.

(iv) $||a| - |b|| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Bài giải: (i) Bởi vì $(a-b)^2 \geqslant 0$ nên $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Dấu = xẩy ra khi và chỉ khi $a = b$.
(ii) Do bởi $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 \geqslant (ax + by)^2$ nên $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geqslant (ax + by)^2$. Dấu = xẩy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.
(iii) Do $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 \geqslant (ax+by+cz)^2$ nên $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqslant (ax+by+cz)^2$. Dấu = xẩy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.
(iv) Ta luôn có $|a| \geqslant \pm a, |b| \geqslant \pm b$. Khi $a+b \geqslant 0$ thì $|a+b| = a+b \leqslant |a|+|b|$; Còn khi $a+b < 0$ thì $|a+b| = -a-b \leqslant |a|+|b|$. Tóm lại $|a+b| \leqslant |a|+|b|$. Bởi

vì $|a| = |a+b+(-b)| \leqslant |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|$ nên $|a| - |b| \leqslant |a+b|$. Tương tự $|b| = |a+b+(-a)| \leqslant |a+b| + |-a| = |a+b| + |a|$ nên $|b| - |a| \leqslant |a+b|$. Tóm lại $||a| - |b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|$. □

Bổ đề 1.1.5. *Với* $a, b, c, x, y, z, u, v, t \geqslant 0$ *luôn có các bất đẳng thức sau:*

(i) $a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$.

(ii) $\sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)} \geqslant \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz}$.

(iii) $\sqrt[3]{(a+x+u)(b+y+v)(c+z+t)} \geqslant \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{uvt}$.

Bài giải: (i) Vì $a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geqslant 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{c\sqrt[3]{abc}} \geqslant 4\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}$ nên $a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geqslant 4\sqrt[3]{abc}$ hay $a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$.
(ii) Nếu một trong ba số $a + x, b + y, c + z$ bằng 0, chẳng hạn $a + x = 0$, thì $a = x = 0$ và bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Xét $a + x, b + y, c + z \neq 0:$
Theo (i) ta có $\begin{cases} \dfrac{a}{a+x} + \dfrac{b}{b+y} + \dfrac{c}{c+z} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{abc}{(a+x)(b+y)(c+z)}} \\ \dfrac{x}{a+x} + \dfrac{y}{b+y} + \dfrac{z}{c+z} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{xyz}{(a+x)(b+y)(c+z)}} \end{cases}$ và cộng vế theo vế được $3 \geqslant 3\dfrac{\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz}}{\sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)}}$. Từ đây suy ra (ii).
(iii) Vì $\sqrt[3]{(a+x+u)(b+y+v)(c+z+t)} \geqslant \sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)} + \sqrt[3]{uvt}$ nên $\sqrt[3]{(a+x+u)(b+y+v)(c+z+t)} \geqslant \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{uvt}$. □

Bổ đề 1.1.6. *Cho ba số thực* $a, b, c \geqslant 0$. *Chứng minh các bất đẳng thức sau:*

(i) $\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} \geqslant \dfrac{2}{1+ab}$ *khi* $ab \geqslant 1$.

(ii) $\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} + \dfrac{1}{1+c^2} \geqslant \dfrac{3}{1+abc}$ *khi* $a, b, c \geqslant 1$.

(iii) $\dfrac{1}{(1+a)^2} + \dfrac{1}{(1+b)^2} \geqslant \dfrac{1}{1+ab}$.

(iv) $\dfrac{1}{(1+a)^2} + \dfrac{1}{(1+b)^2} \leqslant \dfrac{2}{1+ab}$ *khi* $ab \leqslant 1$.

(v) $\dfrac{1}{(1+a)^2} + \dfrac{1}{(1+b)^2} + \dfrac{1}{(1+c)^2} \leqslant \dfrac{3}{1+abc}$ *khi* $a, b, c \leqslant 1$.

(vi) $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{1+\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)^2}}$ *và* $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}\geqslant\dfrac{3}{\sqrt{1+\Big(\dfrac{a+b+c}{3}\Big)^2}}$ *khi* $a,b,c\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài giải: (i) Bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức $(ab-1)(a-b)^2\geqslant 0$. Vậy $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\geqslant\dfrac{2}{1+ab}$ khi $ab\geqslant 1$.

(ii) Vì $a,b,c\geqslant 1$ nên từ $\begin{cases}\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}\geqslant\dfrac{2}{1+ab}\geqslant\dfrac{2}{1+abc}\\ \dfrac{1}{1+b^2}+\dfrac{1}{1+c^2}\geqslant\dfrac{2}{1+bc}\geqslant\dfrac{2}{1+abc}\\ \dfrac{1}{1+c^2}+\dfrac{1}{1+a^2}\geqslant\dfrac{2}{1+ca}\geqslant\dfrac{2}{1+abc}\end{cases}$ ta suy ra $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}+\dfrac{1}{1+c^2}\geqslant\dfrac{3}{1+abc}$.

(iii) Bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức $(ab-1)^2+ab(a-b)^2\geqslant 0$. Vậy $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}\geqslant\dfrac{1}{1+ab}$.

(iv) là hiển nhiên qua quy đồng hai vế.

(v) Vì $a,b,c\leqslant 1$ nên từ $\begin{cases}\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}\leqslant\dfrac{2}{1+ab}\leqslant\dfrac{2}{1+abc}\\ \dfrac{1}{(1+b)^2}+\dfrac{1}{(1+c)^2}\leqslant\dfrac{2}{1+bc}\leqslant\dfrac{2}{1+abc}\\ \dfrac{1}{(1+c)^2}+\dfrac{1}{(1+a)^2}\leqslant\dfrac{2}{1+ca}\leqslant\dfrac{2}{1+abc}\end{cases}$ ta suy ra $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}+\dfrac{1}{(1+c)^2}\leqslant\dfrac{3}{1+abc}$.

(vi) Hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ với $x>0$ có $y'=-x(1+x^2)^{-3/2}<0$. Vậy y đơn điệu giảm. Ta lại có $y" =3x^2(1+x^2)^{-5/2}-(1+x^2)^{-3/2}=\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{(1+x^2)^5}}\geqslant 0$ khi $x\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và như vậy y là hàm lồi. Vậy $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{1+\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)^2}}$ và $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}\geqslant\dfrac{3}{\sqrt{1+\Big(\dfrac{a+b+c}{3}\Big)^2}}$

khi $a, b, c \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. ☐

Chú ý 1.1.7. *Khi* $ab > 1$ *sẽ không có (iv). Thật vậy, khi* $a = 2, b = 1$ *có* $ab = 2 > 1$ *và* $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} < \frac{2}{3} = \frac{2}{1+ab}$; *còn khi* $a = 9, b = 1$ *có* $ab = 9 > 1$ *và* $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} = \frac{1}{100} + \frac{1}{4} > \frac{2}{10} = \frac{2}{1+ab}$.

1.2 Một vài phương pháp chứng minh đơn giản

Sử dụng định nghĩa

Để chứng minh $A \geqslant B$ ta có thể xét hiệu $A - B$ và chỉ ra $A - B \geqslant 0$.

Ví dụ 1.2.1. *Với ba số thực* a, b, c *luôn có* $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$.

Bài giải: Vì $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}\big[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\big] \geqslant 0$ nên $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$. ☐

Ví dụ 1.2.2. *Với số thực* $a < 1$ *luôn có bất đẳng thức*

$$T = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)\ldots(1+a^{64}) \leqslant \frac{1}{1-a}.$$

Bài giải: Vì $T = \frac{(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\ldots(1+a^{64})}{1-a} = \frac{1-a^{128}}{1-a}$ nên $T = \frac{1-a^{128}}{1-a} \leqslant \frac{1}{1-a}$. ☐

Ví dụ 1.2.3. *Giả sử* a, b, c *là độ dài ba cạnh một tam giác. Khi đó ta có*

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Bài giải: Vì $a^2 > (b-c)^2, b^2 > (c-a)^2$ và $c^2 > (a-b)^2$ nên $a^2+b^2+c^2 > (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ hay $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$. ☐

Ví dụ 1.2.4. *Giả sử* a, b, c *là độ dài ba cạnh một tam giác vuông với* $a^2 = b^2 + c^2$. *Chứng minh rằng, nếu hai số thực* x *và* y *thỏa mãn* $bx + cy = a$ *thì* $x^2 + y^2 \geqslant 1$.

Bài giải: Vì $(b^2 + c^2)(x^2 + y^2) \geqslant (bx + cy)^2 = a^2$ nên $x^2 + y^2 \geqslant 1$. ☐

Ví dụ 1.2.5. *Với hai số thực* $a, b \in [1; 2]$ *luôn có* $\big(a+b\big)\big(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\big) \leqslant \dfrac{9}{2}$.

Bài giải: Vì $a, b, c \in [1; 2]$ nên $(a-1)(a-2) \leqslant 0$ và $(b-1)(b-2) \leqslant 0$. Từ đây suy ra $a^2+2 \leqslant 3a, b^2+2 \leqslant 3b$ hay $a+\dfrac{2}{a} \leqslant 3$ và $b+\dfrac{2}{b} \leqslant 3$. Do bởi $6 \geqslant \big(a+b\big)+\big(\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}\big) \geqslant 2\sqrt{\big(a+b\big)\big(\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}\big)}$ nên $\big(a+b\big)\big(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\big) \leqslant \dfrac{9}{2}$. □

Ví dụ 1.2.6. *Với ba số thực* $a, b, c \in [-2; 3]$ *thỏa mãn* $a+b+c=0$ *luôn có bất đẳng thức* $a^2+b^2+c^2 \leqslant 18$.

Bài giải: Vì $a, b, c \in [-2; 3]$ nên $(a+2)(a-3) \leqslant 0, (b+2)(b-3) \leqslant 0$ và $(c+2)(c-3) \leqslant 0$. Từ đây suy ra $a^2-a \leqslant 6, b^2-b \leqslant 6$ và $c^2-c \leqslant 6$. Do bởi $a+b+c=0$ nên sau khi cộng ba bất đẳng thức này, vế theo vế, được $a^2+b^2+c^2 \leqslant 18$. □

Ví dụ 1.2.7. *Giả sử* $a, b, c \in [0; 4]$ *thỏa mãn* $a+b+c=6$. *Khi đó ta có* $a^2+b^2+c^2 \leqslant 20$. *Khi nào dấu bằng xẩy ra.*

Bài giải: Không hạn chế có thể giả thiết $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$. Khi đó $2 \leqslant a \leqslant 4$. Ta có $a^2+b^2+c^2 = a^2+(b+c)^2-2bc \leqslant a^2+(6-a)^2 = 2a^2-12a+36$. Như vậy $a^2+b^2+c^2 \leqslant 2(a^2-6a+18) = 2[(a-2)(a-4)+10] \leqslant 20$. Dấu bằng xẩy ra khi $a=4, b=2, c=0$. □

Ví dụ 1.2.8. *Với* $a \geqslant b \geqslant c$ *luôn có* $a^4+b^4+c^4 \geqslant a^3b+b^3c+c^3a$.

Bài giải: Xét $T = a^4+b^4+c^4-a^3b-b^3c-c^3a$. Biến đổi biểu thức

$$\begin{aligned} T &= a^3(a-b)+b^3(b-c)+c^3(c-a)\\ &= a^3(a-b)+b^3(b-c)-c^3[(a-b)+(b-c)]\\ &= (a-b)(a^3-c^3)+(b-c)(b^3-c^3) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Do đó có bất đẳng thức $a^4+b^4+c^4 \geqslant a^3b+b^3c+c^3a$. □

Ví dụ 1.2.9. *Với các số thực* $a, b, c \geqslant 0$ *ta luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \leqslant \frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

Bài giải: Xét hiệu $\dfrac{a^2}{b^2+c^2} - \dfrac{a}{b+c} = \dfrac{a^2(b+c) - a(b^2+c^2)}{(b^2+c^2)(b+c)}$. Khi đó ta có $\dfrac{a^2}{b^2+c^2} - \dfrac{a}{b+c} = \dfrac{ab(a-b)+ac(a-c)}{(b^2+c^2)(b+c)}$. Tương tự xét các hiệu khác và như vậy được

$$\begin{aligned} T &= \Big(\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}\Big) - \Big(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\Big)\\ &= ab(a-b)\Big[\frac{1}{(b^2+c^2)(b+c)} - \frac{1}{(c^2+a^2)(c+a)}\Big]\\ &+ bc(b-c)\Big[\frac{1}{(c^2+a^2)(c+a)} - \frac{1}{(a^2+b^2)(a+b}\Big]\\ &+ ca(c-a)\Big[\frac{1}{(a^2+b^2)(a+b} - \frac{1}{(b^2+c^2)(b+c)}\Big]. \end{aligned}$$

Nếu $a \leqslant b$ thì $(c^2+a^2)(c+a) \leqslant (b^2+c^2)(b+c)$; còn nếu $a > b$ thì $(c^2+a^2)(c+a) > (b^2+c^2)(b+c)$. Do đó ta nhận được bất đẳng thức

$$ab(a-b)\Big[\frac{1}{(b^2+c^2)(b+c)} - \frac{1}{(c^2+a^2)(c+a)}\Big] \geqslant 0.$$

Tương tự, hai số hạng còn lại trong tổng cũng đều $\geqslant 0$. Do đó $T \geqslant 0$. □

Ví dụ 1.2.10. *Với hai số thực a và b thỏa mãn $a+b \geqslant 0$ có bất đẳng thức*

(i) $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geqslant \Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)^3$.

(ii) $a^3+b^3+2 \geqslant 2ab+a+b$.

Bài giải: (i) Hiệu $T = \dfrac{a^3+b^3}{2} - \Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)^3 = \dfrac{3}{8}(a+b)(a-b)^2 \geqslant 0$.

(ii) Từ (i) và $2ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a+b)^2$ suy ra hiệu $T = a^3+b^3+2-2ab-a-b \geqslant \dfrac{1}{4}(a+b)^3 - \dfrac{1}{2}(a+b)^2 - (a+b) + 2 = \dfrac{1}{4}(a+b+2)(a+b-2)^2 \geqslant 0$. Vậy $a^3+b^3+2 \geqslant 2ab+a+b$. □

Ví dụ 1.2.11. *Với các số thực $a, b, c \geqslant 0$ ta luôn có bất đẳng thức dưới đây:*

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geqslant a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c.$$

Bài giải: Hiển nhiên có $\begin{cases} a^2 \geqslant a^2 - (b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c) \\ b^2 \geqslant b^2 - (c-a)^2 = (a+b-c)(-a+b+c) \\ c^2 \geqslant c^2 - (a-b)^2 = (-a+b+c)(a-b+c). \end{cases}$
Nếu $a+b-c < 0$ thì $a-b+c > 0, -a+b+c > 0$. Như vậy $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) < 0 \leqslant abc$. Tương tự xét các trường hợp khác. Nếu $a+b-c \geqslant 0$, $a-b+c \geqslant 0$ và $-a+b+c \geqslant 0$ thì $a^2b^2c^2 \geqslant (a+b-c)^2(a-b+c)^2(-a+b+c)^2$. Từ đây suy ra $abc \geqslant (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$. Đây chính là bất đẳng thức cần chứng minh. □

Ví dụ 1.2.12. [Vasilev Cirtoaje] *Với các số thực a, b, c ta có bất đẳng thức*

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant 3(a^3b+b^3c+c^3a).$$

Bài giải: Khi $a = b = c = 0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Khi a, b, c không đồng thời bằng 0, chẳng hạn $a \neq 0$, đặt $b = xa, c = ya$. Bất đẳng thức trở thành $(1+x^2+y^2)^2 \geqslant 3(x+x^3y+y^3)$.

$$\begin{aligned} & 4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\Big((a^2+b^2+c^2)^2 - 3(a^3b+b^3c+c^3a)\Big) \\ = {} & \Big((a^3+b^3+c^3) - 5(a^2b+b^2c+c^2a) + 4(ab^2+bc^2+ca^2)\Big)^2 \\ + {} & 3\Big((a^3+b^3+c^3) - (a^2b+b^2c+c^2a) - 2(ab^2+bc^2+ca^2) + 6abc\Big)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. □

Biến đổi tương đương

Dùng phép biến đổi tương đương, đưa bất đẳng thức cần chứng minh về bất đẳng thức đơn giản hơn hoặc đã biết cách chứng minh.

Ví dụ 1.2.13. *Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geqslant a+b+c$. Khi đó ta có bất đẳng thức $a+b+c \geqslant 3abc$.*

Bài giải: Điều kiện $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geqslant a+b+c$ tương đương $ab+bc+ca \geqslant (a+b+c)abc$. Vì $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$ nên $(a+b+c)^2 \geqslant 3(a+b+c)abc$. Vậy $a+b+c \geqslant 3abc$. □

Ví dụ 1.2.14. *Với ba số* $a, b, c > 0$ *ta luôn có bất đẳng thức sau đây:*

$$\frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} + \frac{a^2+b^2}{c} \geqslant 2(a+b+c).$$

Bài giải: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau

$$\frac{b^2+c^2}{a} + a + \frac{c^2+a^2}{b} + b + \frac{a^2+b^2}{c} + c \geqslant 3(a+b+c)$$

hay $3(a^2+b^2+c^2)\big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\big) \geqslant 9(a+b+c)$. Vì $3(a^2+b^2+c^2) \geqslant (a+b+c)^2$ nên $3(a^2+b^2+c^2)\big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\big) \geqslant (a+b+c)^2\big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\big) \geqslant 9(a+b+c)$. □

Ví dụ 1.2.15. *Giả sử* $a, b, c, d > 0$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}.$$

Bài giải: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức

$$(a+c)(a+b)(b+d)(c+d) - (a+b+c+d)[(c+d)ab + (a+b)cd] \geqslant 0$$

hay $(ad-bc)^2 \geqslant 0$. Do vậy bất dẳng thức là đúng. □

Ví dụ 1.2.16. *Cho* $a, b, c, d > 0$ *và* $a+b+c+d = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \leqslant (a+c)(b+d).$$

Bài giải: Từ $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}} = \frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}$ suy ra $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \leqslant (a+c)(b+d)$. □

Ví dụ 1.2.17. *Giả sử* $|a|, |b| \leqslant 1$. *Khi đó ta có bất đẳng thức*

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leqslant 2\sqrt{1-(\frac{a+b}{2})^2}.$$

Bài giải: Vì hai vế đều dương nên $\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2} \leqslant 2\sqrt{1-(\frac{a+b}{2})^2}$ tương đương bất đẳng thức $\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leqslant 1-ab$. Bất đẳng thức cuối cùng này tương đương với $(1-a^2)(1-b^2) \leqslant (1-ab)^2$ hay $(a-b)^2 \geqslant 0$. Vậy bất đẳng thức $\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2} \leqslant 2\sqrt{1-(\frac{a+b}{2})^2}$ là đúng. □

Ví dụ 1.2.18. *Cho* $a, b, c \in [1; 2]$. *Chứng minh rằng* $a^3+b^3+c^3 \leqslant 5abc$.

Bài giải: Không hạn chế có thể coi $a \geqslant b \geqslant c$. Vì $a, b, c \in [1; 2]$ nên ta có

(i) $a^3+2 \leqslant 5a$ tương đương $(a-2)(a^2+2a-1) \leqslant 0$: đúng.

(ii) $5a+b^3 \leqslant 5ab+1$ tương đương $(b-1)(b^2+b+1-5a) \leqslant 0$: đúng vì $b^2+b+1 \leqslant a^2+a+1 \leqslant 2a+a+1 \leqslant 5a$.

(iii) $5abc+c^3 \leqslant 5abc+1$ tương đương $(c-1)(c^2+c+1-5ab) \leqslant 0$: đúng do bởi $c^2+c+1 \leqslant a^2+a+1 \leqslant 5a \leqslant 5ab$.

Cộng vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xẩy ra khi $a = 2, b = c = 1$. □

Ví dụ 1.2.19. [Olympiad 30-4] *Với* $a, b, c \in [1; 2]$ *ta có bất đẳng thức sau:*

$$(a+b+c)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big) \leqslant 10.$$

Bài giải: Bất đẳng thức tương đương $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b} \leqslant 7$. Không làm mất tính chất tổng quát, có thể giả thiết $a \geqslant b \geqslant c$. Khi đó ta sẽ có:

(i) Từ $(a-b)(b-c) \geqslant 0$ suy ra $ab+bc \geqslant b^2+ac$ hay $\frac{a}{c}+1 \geqslant \frac{a}{b}+\frac{b}{c}$.

(ii) Từ $ab+bc \geqslant b^2+ac$ suy ra $\frac{c}{a}+1 \geqslant \frac{c}{b}+\frac{b}{a}$.

Do đó $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a} \leqslant \frac{a}{c}+\frac{c}{a}+2$. Như vậy $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \leqslant 2+2\Big(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\Big)$. Đặt $x = \frac{a}{c}$. Khi đó $1 \leqslant x \leqslant 2$. Vậy $(x-2)(x-1) \leqslant 0$ hay $x+\frac{2}{x} \leqslant 3$. Vì $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x}$ nên $x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2} \leqslant x+\frac{2}{x} \leqslant 3$. Từ đây có $x+\frac{1}{x} \leqslant \frac{5}{2}$. Tóm lại $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b} \leqslant 7$. □

Ví dụ 1.2.20. [Japan MO 2001] *Với các số thực a, b, c luôn có bất đẳng thức*

$$(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 \geqslant (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2).$$

Bài giải: Ta chỉ cần xét bài toán với a^2, b^2, c^2 là độ dài ba cạnh của một tam giác, bởi vì nếu không thế thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $(b^2-(a-c)^2)(c^2-(a-b)^2)(a^2-(b-c)^2) \geqslant (-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$. Trước tiên chứng minh

$$(b^2-(a-c)^2)^2 \geqslant (-a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2).$$

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với

$b^4-2b^2(a-c)^2+(a-c)^4 \geqslant b^4-(a^2-c^2)^2$ hay $(a-c)^2(a^2-b^2+c^2) \geqslant 0.$

Tương tự có $(c^2-(a-b)^2)^2 \geqslant (c^2-a^2+b^2)(c^2-b^2+a^2)$ và $(a^2-(b-c)^2)^2 \geqslant (a^2-b^2+c^2)(a^2-c^2+b^2)$. Nhân các bất đẳng thức trên, vế theo vế, nhận được bất đẳng thức cần chứng minh. □

Ví dụ 1.2.21. [Việt Nam TST 2006] *Chứng minh rằng, với các số thực $a, b, c \in [1; 2]$ ta có bất đẳng thức*

$$(a+b+c)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big) \geqslant 6\Big(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\Big).$$

Bài giải: Điều kiện $a, b, c \in [1; 2]$ tương đương với điều kiện a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác, (kể cả suy biến). Sử dụng các đẳng thức

$$(a+b+c)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)-9 = \frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}$$

$$6\Big(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\Big)-3 = \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{(b-c)^2}{(b+a)(c+a)}+\frac{(c-a)^2}{(c+b)(a+b)}.$$

Vậy bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \geqslant 0.$$

Trong đó các hệ số S_a, S_b, S_c được xác định bởi

$$S_a = \frac{1}{bc}-\frac{3}{(a+b)(a+c)},$$

$$S_a = \frac{1}{ca} - \frac{3}{(b+c)(b+a)},$$
$$S_a = \frac{1}{bc} - \frac{3}{(c+a)(c+b)}.$$

Không mất tính tổng quát của bài toán giả sử rằng $a \geqslant b \geqslant c$, khi đó $S_a \geqslant S_b \geqslant S_c$. Ta sẽ chứng minh $S_b + S_c \geqslant 0$, thật vậy

$$S_b + S_c = \frac{1}{a}\Big(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\Big) - \frac{3}{b+c}\big(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}\big) \geqslant 0$$

tương đương $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geqslant \dfrac{3}{b+c}\Big(\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{a}{a+c}\Big)$. Do $a \leqslant b + c$ nên dễ thấy

$$VP \leqslant \frac{3}{b+c}\Big(\frac{b+c}{2b+c} + \frac{b+c}{2c+b}\Big) = \frac{3}{2b+c} + \frac{3}{2c+b}.$$

Phần còn lại của bài toán ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{3}{2b+c} + \frac{3}{2c+b}$$

Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì

$$\frac{1}{b} + \frac{2}{c} \geqslant \frac{9}{2c+b},$$
$$\frac{1}{c} + \frac{2}{b} \geqslant \frac{9}{2b+c}.$$

Do đó $S_b + S_c \geqslant 0 \Rightarrow S_b \geqslant 0$.Vậy

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geqslant (S_b + S_c)(a-b)^2 \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hoặc $a = 2, b = c = 1$ hoặc các hoán vị. □

Ví dụ 1.2.22. *Chứng minh rằng, nếu $a, b, c \geqslant 0, a + b + c = 3$, thì luôn có*

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3 \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Bài giải: Không làm mất tính chất tổng quátcó thể giả thiết $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Đặt $x = \dfrac{a+b}{2}, y = \dfrac{a-b}{2}$. Khi đó $a = x + y$ và $b = x - y$. Vì $x^2 - y^2 = ab \geqslant c^2$ nên $2x^2 - 2c^2 - y^2 \geqslant 0$. Do đó ta có

$$\begin{aligned} a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= c^2(a^2 + b^2) + a^2b^2 = c^2(2x^2 + 2y^2) + (x^2 - y^2)^2 \\ &= x^4 + 2c^2x^2 - y^2(2x^2 - 2c^2 - y^2) \leqslant x^4 + 2c^2x^2. \end{aligned}$$

Mặt khác, hiển nhiên $a^2 + b^2 + c^2 = 2x^2 + 2y^2 + c^2 \geqslant 2x^2 + c^2$. Vậy, để có bất đẳng thức ta chỉ cần chứng minh $2x^4 + 4x^2c^2 + 3 \leqslant 3(2x^2 + c^2)$. Thay $c = 3 - 2x$ ta phải chỉ ra $2x^4 + 4x^2(3 - 2x)^2 + 3 \leqslant 6x^2 + 3(3 - 2x)^2$ hay $3x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 6x - 4 \leqslant 0$. Bất đẳng thức này tương đương

$$(x - 1)^2(3x^2 - 2x - 4) \leqslant 0.$$

Vì $2x = a + b \leqslant 3$ nên $1 \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{2}$ và như vậy $3x^2 - 2x - 4 \leqslant 0$. Tóm lại, bất đẳng thức đã được chứng minh. Dấu = xẩy ra khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 1.2.23. [Moldova TST 2006] *Cho a, b, c là dộ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh bất đẳng thức*

$$a^2\Big(\frac{b}{c} - 1\Big) + b^2\Big(\frac{c}{a} - 1\Big) + c^2\Big(\frac{a}{b} - 1\Big) \geqslant 0.$$

Bài giải: Bất đẳng thức tương đương $a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 \geqslant abc(a^2 + b^2 + c^2)$. Ta sử dụng đồng nhất thức sau đây:

$$a^2(b^3 - c^3) + b^2(c^3 - a^3) + c^2(a^3 - b^3) = a^2(b - c)^3 + b^2(c - a)^3 + c^2(a - b)^3.$$

Hiệu $T = 2(a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2) - 2abc(a^2 + b^2 + c^2)$ biểu diễn được thành:

$$\begin{aligned} T &= a^3(b^2 - 2bc + c^2) + b^3(c^2 - 2ca + a^2) + c^3(a^2 - 2ab + b^2) \\ &- a^2(b^3 - c^3) - b^2(c^3 - a^3) - c^2(a^3 - b^3) \\ &= a^3(b - c)^2 + b^3(c - a)^2 + c^3(a - b)^2 - a^2(b - c)^3 \\ &- b^2(c - a)^3 - c^2(a - b)^3 \\ &= a^2(b - c)^2(a - b + c) + b^2(c - a)^2(b - c + a) \\ &+ c^2(a - b)^2(c - a + b) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác. □

Ví dụ 1.2.24. *Qui ước $\dfrac{0}{0}$ là một số thực dương tùy ý. Với ba số thực $a, b, c \geqslant 0$ ta luôn có bất đẳng thức sau đây:*

$$T = \frac{a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)}{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)} \geqslant 3\sqrt[3]{abc}.$$

Bài giải: Do bởi $T = \dfrac{(b - c)(c - a)(a - b)(a + b + c)}{(b - c)(c - a)(a - b)} = a + b + c$ nên $T \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$ theo Bổ đề 1.1.5(i). □

Ví dụ 1.2.25. *Với ba số thực $a, b, c > 0$ ta luôn có bất đẳng thức sau đây:*

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3} \geqslant \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

Bài giải: Vì $\sqrt[3]{\big(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}\big)\big(1+1+1\big)\big(1+1+1\big)} \geqslant \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ theo Bổ đề 1.1.5(iii) nên $\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3} \geqslant \frac{1}{9}\big(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\big)^3 \geqslant \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$. □

Ví dụ 1.2.26. *Cho ΔABC. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây:*

(i) $\dfrac{1}{\big(1+\sin A\big)^2}+\dfrac{1}{\big(1+\sin B\big)^2}+\dfrac{1}{\big(1+\sin C\big)^2} \leqslant \dfrac{3}{1+\sin A\sin B\sin C}$.

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2 A}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2 B}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2 C}} \geqslant \dfrac{6}{\sqrt{7}}$ *khi* $\dfrac{\pi}{2} \geqslant \angle A, \angle B, \angle C \geqslant \dfrac{\pi}{4}$.

Bài giải: (i) Suy ra từ Ví dụ 1.1.6(v).

(ii) Vì $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{3} \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên (ii) có được từ Ví dụ 1.1.6(vi). □

Ví dụ 1.2.27. *Cho ba số thực $a, b, c \geqslant 0$ và $a+b+c \leqslant 3$. Chứng minh bất đẳng thức sau đây:*

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2} \leqslant \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}.$$

Bài giải: Vì $1+a^2 \geqslant 2a$ nên có bất đẳng thức $\dfrac{a}{1+a^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Tương tự, $\dfrac{b}{1+b^2} \leqslant \dfrac{1}{2}, \dfrac{c}{1+c^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Như vậy $\dfrac{a}{1+a^2}+\dfrac{b}{1+b^2}+\dfrac{c}{1+c^2} \leqslant \dfrac{3}{2}$. Đặt $x=1+a, y=1+b, z=1+c$. Khi đó ta có $x, y, z > 0$ và $x+y+z \leqslant$ 6. Do đó $\begin{cases} 1+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x} \leqslant \dfrac{6}{x} \\ 1+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{y} \leqslant \dfrac{6}{y} \\ 1+\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z} \leqslant \dfrac{6}{z}. \end{cases}$ Cộng các bất đẳng thức, vế theo vế, được $6\big(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\big) \geqslant 3+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z} \geqslant 9$. Từ đây suy ra

$\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geqslant\dfrac{3}{2}$ và có bất đẳng thức sau đây: $\dfrac{a}{1+a^2}+\dfrac{b}{1+b^2}+\dfrac{c}{1+c^2}\leqslant\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}.$ □

Ví dụ 1.2.28. *Cho ba số thực* $a,b,c,d>0$. *Chứng minh các bất đẳng thức:*

(i) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}.$

(ii) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{d+a}+\dfrac{d}{a+b}\geqslant 2.$

(iii) $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}>2.$

(iv) $\sqrt{\dfrac{a}{b+c+d}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+d+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{d+a+b}}+\sqrt{\dfrac{d}{a+b+c}}>2.$

Bài giải: (i) Bất đẳng thức tương đương với $2[1+\dfrac{a}{b+c}+1+\dfrac{b}{c+a}+1+\dfrac{c}{a+b}]\geqslant 9$ hay $(b+c+c+a+a+b)(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b})\geqslant 9$: đúng.
(ii) Xét các biểu thức với $M+N=4$ sau đây:

$$\begin{aligned}S&=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\\ M&=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}+\frac{a}{a+b}\\ N&=\frac{c}{b+c}+\frac{d}{c+d}+\frac{a}{d+a}+\frac{b}{a+b}.\end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\begin{aligned}M+S&=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+d}+\frac{c+d}{d+a}+\frac{d+a}{a+b}\geqslant 4\\ N+S&=\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{a+c}{d+a}+\frac{b+d}{a+b}\\ &=\frac{a+c}{b+c}+\frac{a+c}{a+d}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{b+d}{a+b}\\ &\geqslant\frac{4(a+c)}{a+b+c+d}+\frac{4(b+d)}{a+b+c+d}=4.\end{aligned}$$

Vậy $M + N + 2S \geqslant 8$ và từ đây suy ra bất đẳng thức $S \geqslant 2$.

(iii) Bởi vì $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{a}{b+c}} \geqslant \dfrac{2a}{a+b+c} \\ \sqrt{\dfrac{b}{c+a}} \geqslant \dfrac{2b}{a+b+c} \\ \sqrt{\dfrac{c}{a+b}} \geqslant \dfrac{2c}{a+b+c} \end{cases}$ nên $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}} + \sqrt{\dfrac{b}{c+a}} + \sqrt{\dfrac{c}{a+b}} \geqslant 2$.

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $a = b + c, b = c + a, c = a + b$. Khi đó $a = b = c = 0$: mâu thuẫn. Do đó $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}} + \sqrt{\dfrac{b}{c+a}} + \sqrt{\dfrac{c}{a+b}} > 2$.

(iv) Tương tự như trong (iii) ta có $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{a}{b+c+d}} \geqslant \dfrac{2a}{a+b+c+d} \\ \sqrt{\dfrac{b}{c+d+a}} \geqslant \dfrac{2b}{a+b+c+d} \\ \sqrt{\dfrac{c}{d+a+b}} \geqslant \dfrac{2c}{a+b+c+d} \\ \sqrt{\dfrac{d}{a+b+c}} \geqslant \dfrac{2d}{a+b+c+d} \end{cases}$ nên suy ra được $\sqrt{\dfrac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\dfrac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\dfrac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\dfrac{d}{a+b+c}} \geqslant 2$. Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $a = b+c+d, b = c+d+a, c = d+a+b, d = a+b+c$. Khi đó $a = b = c = d = 0$: mâu thuẫn. Do đó có ngay bất đẳng thức $\sqrt{\dfrac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\dfrac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\dfrac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\dfrac{d}{a+b+c}} > 2$. □

Ví dụ 1.2.29. *Với ba số thực tùy ý a, b, c ta luôn có bất đẳng thức sau đây:*

$$a^6b^6 + b^6c^6 + c^6a^6 + 3a^4b^4c^4 \geqslant 2(a^3 + b^3 + c^3)a^3b^3c^3.$$

Bài giải: Nếu $a = 0$ hay $b = 0$ hoặc $c = 0$ thì bất đẳng thức đúng là hiển nhiên. Xét $abc \neq 0$. Chia hai vế cho $a^4b^4c^4$ và đặt $x = \dfrac{ab}{c^2}, y = \dfrac{bc}{a^2}, z = \dfrac{ca}{b^2}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} + 3 \geqslant 2(x + y + z)$ với $xyz = 1$. Vì $xyz = 1$ nên 2 trong ba số x, y, z phải có hai số ở cùng một phía so với 1, chẳng hạn x, y. Khi đó $(x - 1)(y - 1) \geqslant 0$. Vì bất đẳng thức

$$\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big)^2 + 2(x - 1)(y - 1) + (xy - 1)^2 \geqslant 0$$

luôn đúng và $x^2y^2 = \dfrac{1}{z^2}$ nên $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} + 3 \geqslant 2(x + y + z)$. □

Ví dụ 1.2.30. *Với ba số thực $a, b, c > 0$ ta luôn có bất đẳng thức sau đây:*

$$3 + (a + b + c) + (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) + (\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}) \geqslant \frac{3(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1}.$$

Bài giải: Đặt $x = a+b+c, y = ab+bc+ca, z = abc$ và $t = a^2c+b^2a+c^2b$. Bất đẳng thức tương đương $3 + [xz + y + t](z + 1) \geqslant 3 + 3z(x + y)$ hay ta có $xz^2 - 2xz + t + zt - 2yz + y \geqslant 0$. Vì bất đẳng thức này tương đương $ab(b + 1)(ca - 1)^2 + bc(c + 1)(ab - 1)^2 + ca(a + 1)(bc - 1)^2 \geqslant 0$. □

Ví dụ 1.2.31. [China 2004] *Chứng minh rằng, nếu các số thực $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $abcd = 1$ thì $T = \dfrac{1}{(1+a)^2} + \dfrac{1}{(1+b)^2} + \dfrac{1}{(1+c)^2} + \dfrac{1}{(1+d)^2} \geqslant 1$.*

Bài giải: Vì $\dfrac{1}{(1+a)^2} + \dfrac{1}{(1+b)^2} \geqslant \dfrac{1}{1+ab}, \dfrac{1}{(1+c)^2} + \dfrac{1}{(1+d)^2} \geqslant \dfrac{1}{1+cd}$ theo Ví dụ 1.1.6 nên $T \geqslant \dfrac{1}{1+ab} + \dfrac{1}{1+cd} = \dfrac{ab+cd+2}{(ab+1)(cd+1)} = 1$. □

Ví dụ 1.2.32. *Với các số $a, b, c > 0$ ta luôn luôn có bất đẳng thức sau đây:*

$$\frac{2a+3b}{2c+3b} + \frac{2b+3c}{2a+3c} + \frac{2c+3a}{2b+3a} \geqslant 3.$$

Bài giải: Quy đồng và rút gọn, bất đẳng thức trở thành bất đẳng thức:

$$12(a^3 + b^3 + c^3) + 12abc \geqslant 10(a^2b + b^2c + c^2a) + 6(a^2c + c^2b + b^2a).$$

Không làm mất tính tổng quát có thể coi $c = \min\{a, b, c\}$. Đặt $a = c+u, b = c + v$ với $u, v \geqslant 0$. Thay vào bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} VT &= 48c^3 + 48(u+v)c^2 + (36u^2 + 36v^2 + 12uv)c + 12(u^3 + v^3) \\ VP &= 48c^3 + 48(u+v)c^2 + 16(u+v)^2c + 10u^2v + 6uv^2 \\ VT - VP &= 20(u^2 + v^2 - uv)c + (12u^3 + 12v^3 - 10u^2v - 6uv^2) \\ &\geqslant 12(u^3 + v^3 - u^2v - uv^2) = 12(u-v)^2(u+v) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u = v = 0$ hay $a = b = c > 0$. □

Bất đẳng thức cổ điển

Sử dụng Bất đẳng thức Cauchy hoặc Bất đẳng thức Bunhiakowski với 3 số hạng trong tổng hoặc tích, xem Bổ đề 1.1.4 và Bổ đề 1.1.5, để chứng minh bất đẳng thức mới.

Ví dụ 1.2.33. *Chứng minh rằng, với $a, b, c \geqslant 0$ ta luôn có bất đẳng thức sau:*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}.$$

Bài giải: Ta có $a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$ theo Bất đẳng thức Cauchy. Vậy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$. □

Ví dụ 1.2.34. [Russia MO 2000] *Chứng minh rằng nếu $a, b, c \geqslant 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$ thì ta có bất đẳng thức $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant ab+bc+ca$.*

Bài giải: Vì $ab+bc+ca = \frac{(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2}{2} = \frac{9-a^2-b^2-c^2}{2}$ nên chỉ cần chứng minh $a^2+b^2+c^2+2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \geqslant 9$. Thật vậy, từ

$$a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a} \geqslant 3a, b^2+\sqrt{b}+\sqrt{b} \geqslant 3b, c^2+\sqrt{c}+\sqrt{c} \geqslant 3c$$

suy ra $a^2+b^2+c^2+2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \geqslant 3(a+b+c) = 9$. Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Ví dụ 1.2.35. *Giả sử $a, b, c > 0$. Khi đó ta luôn có bất đẳng thức dưới đây:*

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \geqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Bài giải: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiakowski ta có ngay bất đẳng thức

$$(a+b+c)\Big(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\Big) \geqslant \Big(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\Big)^2.$$

Tương tự, ta lại có $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{ba+bc}+\frac{c^2}{ca+cb}$ $\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geqslant \frac{3}{2}$. Từ đây suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. □

Ví dụ 1.2.36. *Cho* $a, b, c > 0$ *thỏa mãn* $a + b + c = 3$. *Chứng minh rằng*

$$T = \frac{a^2}{a + 2b^2} + \frac{b^2}{b + 2c^2} + \frac{c^2}{c + 2a^2} \geqslant 1.$$

Bài giải: Theo Bất đẳng thức Bunhiakowski ta có

$$[a^2(a + 2b^2) + b^2(b + 2c^2) + c^2(c + 2a^2)]T \geqslant (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Vậy $T \geqslant \dfrac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^3 + b^3 + c^3 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}$. Do đó chỉ cần chứng minh $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geqslant a^3 + b^3 + c^3 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ hay bất đẳng thức sau

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^3 + b^3 + c^3.$$

Thật vậy, từ $3(a^3 + b^3 + c^3) = (a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) \geqslant (a^2 + b^2 + c^2)^2$ và $3(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant (a + b + c)^2 = 9$ suy ra $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2 + b^2 + c^2$. Do bởi $(a^4 + b^4 + c^4)(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant (a^3 + b^3 + c^3)^2$ nên $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^3 + b^3 + c^3$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 1.2.37. *Giả sử* $a, b, c, d > 0$ *thỏa mãn* $a + b + c + d = abc + bcd + cda + dab$. *Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$abc + bcd + cda + dab \geqslant \sqrt{\frac{a^2 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{b^2 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{d^2 + 1}{2}}.$$

Bài giải: Từ giả thiết suy ra $(a + b)(a + c)(a + d) = (a^2 + 1)(a + b + c + d)$. Vậy $\dfrac{a^2 + 1}{a + b} = \dfrac{(a + c)(a + d)}{a + b + c + d}$. Tương tự có các hệ thức khác và suy ra được

$$\frac{a^2 + 1}{a + b} + \frac{b^2 + 1}{b + c} + \frac{c^2 + 1}{c + d} + \frac{d^2 + 1}{d + a} = \frac{(a + b + c + d)^2}{a + b + c + d} = a + b + c + d.$$

Lại có bất đẳng thức $2\big(a + b + c + d\big)\big(\dfrac{a^2 + 1}{a + b} + \dfrac{b^2 + 1}{b + c} + \dfrac{c^2 + 1}{c + d} + \dfrac{d^2 + 1}{d + a}\big) \geqslant \big(\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} + \sqrt{d^2 + 1}\big)^2$ theo Bất đẳng thức Bunhiakowski. Vậy $a + b + c + d \geqslant \sqrt{\dfrac{a^2 + 1}{2}} + \sqrt{\dfrac{b^2 + 1}{2}} + \sqrt{\dfrac{c^2 + 1}{2}} + \sqrt{\dfrac{d^2 + 1}{2}}$. □

Ví dụ 1.2.38. *Chứng minh rằng, với* $a, b, c, d > 0, abcd = 1$, *ta luôn có*

$$(a + b + c + d)^6 \geqslant 2^8(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1).$$

Bài giải: Đặt $a = x^2, b = y^2, c = z^2, d = t^2$ với $x, y, z, t > 0, xyxt = 1$. Ta sẽ chứng minh $(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^6 \geqslant 2^8(x^4 + 1)(y^4 + 1)(z^4 + 1)(t^4 + 1)$. Vì $xyzt = 1$ nên bất đẳng thức này tương đương $(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^6 \geqslant 2^8(x^3 + yzt)(y^3 + xzt)(z^3 + xyt)(t^3 + xyz)$. Theo Bất đẳng thức Cauchy có

$$4(x^3+yzt)(y^3+xzt) \leqslant (x^3+y^3+xzt+yzt)^2 = (x+y)^2(x^2-xy+y^2+zt)^2,$$

$$4(t^3+xyz)(z^3+xyt) \leqslant (z^3+t^3+xyz+xyt)^2 = (z+t)^2(z^2-zt+t^2+xy)^2.$$

Do bởi $4(x^2 - xy + y^2 + zt)(z^2 - zt + t^2 + xy) \leqslant (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2$ và $(x + y)(z + t) = xz + yt + xt + yz \leqslant x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ nên từ 4 bất đẳng thức này dễ dàng suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. □

Ví dụ 1.2.39. [Mathlinks Contests] *Với* $a, b, c > 0, abc = 1$, *luôn có*

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+1}} + \sqrt{\frac{b+c}{b+1}} + \sqrt{\frac{c+a}{c+1}} \geqslant 3.$$

Bài giải: Theo Bất đẳng thức Cauchy cho 3 số hạng trên, chỉ cần chứng minh

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant (a + 1)(b + 1)(c + 1).$$

Thật vậy, với điều kiện $abc = 1$, bất đẳng thức trên tương đương với

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geqslant a + b + c + ab + bc + ca.$$

Theo Bất đẳng thức Cauchy với nhóm 5 số hạng ta có 3 bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} a^2b + a^2b + a^2c + a^2c + bc &\geqslant 5a \\ b^2a + b^2a + b^2c + b^2c + ac &\geqslant 5b \\ c^2b + c^2b + c^2a + c^2a + ab &\geqslant 5c \end{aligned}$$

và suy ra $2[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)] \geqslant 5(a+b+c)-(ab+bc+ca)$. Tương tự, theo Bất đẳng thức Cauchy với nhóm 5 số hạng có 3 bất đẳng thức

$$\begin{aligned} b^2a + b^2a + a^2b + a^2b + c &\geqslant 5ab \\ b^2c + b^2c + c^2b + c^2b + a &\geqslant 5bc \\ a^2c + a^2c + c^2a + c^2a + b &\geqslant 5ca \end{aligned}$$

và suy ra $2[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)] \geqslant 5(ab+bc+ca)-(a+b+c)$. Cộng hai bất đẳng thức cuối có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 1.2.40. *Chứng minh rằng, nếu* $a, b, c \geqslant 0$ *thì có bất đẳng thức sau đây:*

$$\frac{1}{b(b+a)} + \frac{1}{c(c+b)} + \frac{1}{a(a+c)} \geqslant \frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$

Bài giải: Chỉ cần chỉ ra $\frac{c(a+b)+ab}{b(b+a)} + \frac{a(b+c)+bc}{c(c+b)} + \frac{b(c+a)+ca}{a(a+c)} \geqslant \frac{9}{2}$ hay $\frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geqslant \frac{9}{2}$ và nó tương đương bất đẳng thức $\frac{c+b}{b} + \frac{b+a}{a} + \frac{a+c}{c} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geqslant \frac{15}{2}$. Theo Bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{a+b}{4a} + \frac{a}{a+b} \geqslant 1, \frac{b+c}{4b} + \frac{b}{b+c} \geqslant 1, \frac{c+a}{4c} + \frac{c}{c+a} \geqslant 1.$ Do đó $\frac{a+b}{4a} + \frac{a}{a+b} + \frac{b+c}{4b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c+a}{4c} + \frac{c}{c+a} \geqslant 3.$ Mặt khác, còn có $\frac{3}{4}\Big(\frac{a+b}{a} + \frac{b+c}{b} + \frac{c+a}{c}\Big) = \frac{3}{4}\Big(3 + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\Big) \geqslant \frac{9}{2}$. Cộng hai bất đẳng thức trên lại ta có bất đẳng thức cần chứng minh. □

Ví dụ 1.2.41. *Chứng minh rằng, nếu* $a, b, c > 0$ *thỏa mãn* $a + b + c = 3$ *thì ta có bất đẳng thức* $(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \leqslant 12.$

Bài giải: Không làm mất tính chất tổng quát, có thể coi $a \geqslant b \geqslant c$. Khi đó $b^2 - bc + c^2 \leqslant b^2, a^2 - ac + c^2 \leqslant (a+c)^2, a^2 - ab + b^2 \leqslant (a+c)^2 - (a+c)b + b^2.$ Ta sẽ chứng minh $M = b^2(a+c)^2((a+c)^2 - (a+c)b + b^2) \leqslant 12$. Thật vậy, đặt $x = \frac{a-b+c}{2} \geqslant 0, s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}$. Khi đó $M = (s^2 - x^2)^2(s^2 + 3x^2)$. Theo Bất đẳng thức Cauchy có $\frac{3}{2}(s^2 - x^2)\frac{3}{2}(s^2 - x^2)(s^2 + 3x^2) \leqslant \Big(\frac{4}{3}s^2\Big)^3 = 27$ và suy ra được $\frac{9}{4}M \leqslant 27$ hay $M \leqslant 12$. Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $c = 0, s^2 = 9x^2$ hay $a = 2, b = 1, c = 0.$ □

Phương pháp đánh giá

Để chứng minh $A \leqslant B$, ta chọn C và đánh giá $A \leqslant C$. Sau đó chỉ ra $C \leqslant B$.

Ví dụ 1.2.42. *Cho số nguyên* $n > 1$. *Chứng minh* $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}.$

Bài giải: Với $n = 2, n = 3$, bất đẳng thức đúng là hiển nhiên. Với $n > 3$ có

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}\Big) \\ &\leqslant \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) < \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra $T < \frac{1}{4}$. □

Ví dụ 1.2.43. *Dãy* (a_n) *được cho như sau:* $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 10, a_4 = 15, a_5 = 21, \ldots$. *Xác định* a_n *theo* n *và chứng minh bất đẳng thức*

$$T = \Big(1 - \frac{1}{3}\Big)\Big(1 - \frac{1}{6}\Big)\Big(1 - \frac{1}{10}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{1}{a_n}\Big) < \frac{1}{3} + \frac{1}{n}.$$

Bài giải: Từ $a_1 = 3 = a_0 + 2, a_2 = 6 = a_1 + 3, a_3 = 10 = a_2 + 4$, $a_4 = 15 = a_3 + 5, a_5 = 21 = a_4 + 6$ suy ra $a_n = a_{n-1} + n + 1$ và điều này dễ dàng có được qua qui nạp. Vậy $a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ và suy ra $1 - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - 1}{a_k} = \frac{(k+1)(k+2) - 2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}$. Như vậy $1 - \frac{1}{a_k} = \Big(1 - \frac{1}{k+1}\Big)\Big(1 + \frac{1}{k+2}\Big)$ và ta có được các phép biến đổi sau:

$$\begin{aligned} T &= \Big(1 - \frac{1}{2}\Big)\Big(1 + \frac{1}{3}\Big)\Big(1 - \frac{1}{3}\Big)\Big(1 + \frac{1}{4}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)\Big(1 + \frac{1}{n+2}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{3^2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{4^2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{5^2}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\Big)\Big(1 + \frac{1}{n+2}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{3^2 - 1}{3^2}\Big)\Big(\frac{4^2 - 1}{4^2}\Big)\Big(\frac{5^2 - 1}{5^2}\Big)\ldots\Big(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\Big)\Big(1 + \frac{1}{n+2}\Big) \\ &= \frac{2.3.4^2.5^2\ldots(n-1)^2n^2(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3^2.4^2.5^2\ldots(n-1)^2n^2(n+1)^2(n+2)} = \frac{n+3}{3(n+1)} \\ &< \frac{n+3}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Tóm lại $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ và nhận được bất đẳng thức $T < \frac{1}{3} + \frac{1}{n}$. □

Ví dụ 1.2.44. *Cho* $0 < a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ *và* $a + b + c + d \leqslant 1$. *Khi đó ta có*

$$1 \geqslant a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2.$$

Bài giải: Vì $1 \geqslant (a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd \leqslant a^2+3b^2+5c^2+7d^2$ nên $1 \geqslant a^2+3b^2+5c^2+7d^2$. □

Ví dụ 1.2.45. *Nếu $a, b, c \geqslant 0$ luôn thỏa mãn $a+b+c = abc$ thì có bất đẳng thức $a^2+b^2+c^2+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} \geqslant 10$.*

Bài giải: Từ $abc = a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$, theo Bất đẳng thức Cauchy, ta suy ra $t = \sqrt[3]{(abc)^2} \geqslant 3$. Vì $T = a^2+b^2+c^2+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} \geqslant 3\Big(\sqrt[3]{(abc)^2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}\Big)$, theo Bất đẳng thức Cauchy, nên $T \geqslant 3\big(t+\dfrac{1}{t}\big)$ với $t \geqslant 3$. Như vậy $T \geqslant 3\big(t+\dfrac{1}{t}\big) \geqslant 10$ tương đương với $(t-3)(3t-1) \geqslant 0$: đúng. □

Ví dụ 1.2.46. *Giả sử các số thực a, b, c luôn thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 = 1$. Chứng minh rằng $T = abc + 2(1+a+b+c+ab+bc+ca) \geqslant 0$.*

Bài giải: Do $|a|, |b|, |c| \leqslant 1$, nên khi $abc \leqslant 0$ thì $T = 2(1+a)(1+b)(1+c) - abc \geqslant 0$; còn khi $abc > 0$ thì $T = (a+b+c+1)^2 + abc > 0$. □

Ví dụ 1.2.47. *Cho ba số thực $a, b, c \geqslant 0$ và $a+b+c \leqslant 3$. Chứng minh bất đẳng thức sau đây:*

$$\frac{a+b}{2+a^2+b^2}+\frac{b+c}{2+b^2+c^2}+\frac{c+a}{2+c^2+a^2} \leqslant \frac{2}{2+a+b}+\frac{2}{2+b+c}+\frac{2}{2+c+a}.$$

Bài giải: Vì $2+a^2+b^2 = 1+a^2+1+b^2 \geqslant 2(a+b)$ nên ta được $\dfrac{a+b}{2+a^2+b^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Tương tự, $\dfrac{b+c}{2+b^2+c^2} \leqslant \dfrac{1}{2}, \dfrac{c+a}{2+c^2+a^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Như vậy có bất đẳng thức

$$\frac{a+b}{2+a^2+b^2}+\frac{b+c}{2+b^2+c^2}+\frac{c+a}{2+c^2+a^2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Đặt $x = 1+a, y = 1+b, z = 1+c$. Khi đó $x, y, z > 0$ và $2x+2y+2z \leqslant 12$. Do đó $\begin{cases} 1+\dfrac{y+z}{x+y}+\dfrac{z+x}{x+y} \leqslant \dfrac{12}{x+y} \\ 1+\dfrac{z+x}{y+z}+\dfrac{x+y}{y+z} \leqslant \dfrac{12}{y+z} \\ 1+\dfrac{x+y}{z+x}+\dfrac{y+z}{z+x} \leqslant \dfrac{12}{z+x}. \end{cases}$ Cộng các bất đẳng thức, vế theo vế, được $12\big(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\big) \geqslant 3+\frac{y+z}{x+y}+\frac{x+y}{y+z}+\frac{z+x}{x+y}+\frac{x+y}{z+x}+\frac{x+z}{y+z}+\frac{y+z}{x+z} \geqslant 9$. Từ đây suy ra $\frac{2}{2+a+b}+\frac{2}{2+b+c}+\frac{2}{2+c+a} = \frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x} \geqslant \frac{3}{2}$ và có được bất đẳng thức cần chứng minh. □

Ví dụ 1.2.48. *Chứng minh rằng với các số thực* $a, b, c \geqslant 1$ *có bất đẳng thức*

(i) $\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)} \geqslant \frac{3}{1+abc}$.

(ii) $\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1} \geqslant \frac{3}{2+abc}$.

Bài giải: (i) Do $a, b, c \geqslant 1$ nên $(a-1)(b-1)(c+1) \geqslant 0$ tương đương $1+abc \geqslant a+b-c+ac+bc-ab$. Tương tự, ta còn có:

$$1+abc \geqslant b+c-a+ac+ab-bc, 1+abc \geqslant c+a-b+bc+ab-ca.$$

Cộng ba bất đẳng thức, vế theo vế, ta được

$$3+3abc \geqslant ab+a+bc+b+ca+c.$$

Từ $\Big(3+3abc\Big)\Big(\frac{1}{ab+a}+\frac{1}{bc+b}+\frac{1}{ca+c}\Big) \geqslant$

$$\Big(ab+a+bc+b+ca+c\Big)\Big(\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\Big) \geqslant 9$$

hay $\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)} \geqslant \frac{3}{1+abc}$.

(ii) Như trên có $\begin{cases} 2+abc \geqslant a+b-c+ac+bc-ab+1 \\ 2+abc \geqslant b+c-a+ac+ab-bc+1 \\ 2+abc \geqslant c+a-b+bc+ab-ca+1. \end{cases}$ Cộng ba bất đẳng thức, vế theo vế, ta được $6+3abc \geqslant ab+a+bc+b+ca+c+3$. Vì

$$\Big(6+3abc\Big)\Big(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}\Big) \geqslant$$
$$\Big(ab+a+1+bc+b+1+ca+c+1\Big)$$
$$\Big(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}\Big) \geqslant 9$$

nên $\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1} \geqslant \frac{3}{2+abc}$. □

Phương pháp phản chứng

Xét mệnh đề (A) và chứng minh nó là đúng. Giả sử (A) là sai. Ta chỉ ra mâu thuẫn. Vậy (A) đúng.

Ví dụ 1.2.49. *Cho bốn số thực phân biệt a, b, c, d. Chứng minh rằng trong 4 bất đẳng thức dưới đây có ít nhất hai bất đẳng thức sai:*

$$\begin{aligned} a^2+3b^2-3cd &\leqslant 0\\ b^2+3c^2-3da &\leqslant 0\\ c^2+3d^2-3ab &\leqslant 0\\ d^2+3a^2-3bc &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Bài giải: Nếu $a^2+3b^2-3cd \leqslant 0$ và $c^2+3d^2-3ab \leqslant 0$ là đúng thì có ngay $a^2+3b^2-3cd+c^2+3d^2-3ab \leqslant 0$ hay $\big(a-\frac{3}{2}b\big)^2+\frac{3}{4}b^2+\big(c-\frac{3}{2}d\big)^2+\frac{3}{4}d^2 \leqslant 0.$ Từ đây suy ra $a=b=c=d=0$: mâu thuẫn. Do vậy, trong hai bất đẳng thức nêu trên phải có ít nhất một bất đẳng thức sai. Tương tự, trong số $b^2+3c^2-3da \leqslant 0$ và $d^2+3a^2-3bc \leqslant 0$ phải có ít nhất một bất đẳng thức sai. Vậy trong bốn bất đẳng thức đã cho có ít nhất hai bất đẳng thức sai. □

Ví dụ 1.2.50. *Chứng minh rằng không tồn tại các số dương a, b, c thỏa mãn*

$$\begin{cases} 2a^2+ab+b^2 \leqslant 32\\ 2b^2+bc+c^2 = 25\\ 2c^2+ca+a^2 \geqslant 86. \end{cases}$$

Bài giải: Giả sử tồn tại các số dương a, b, c thỏa mãn đầu bài. Khi đó, từ $2a^2+ab+b^2 \leqslant 32$ suy ra $2a^2 < 32$ hay $a < 4$. Từ $2b^2+bc+c^2 = 25$ suy ra $c^2 < 25$ hay $c < 5$. Như vậy $86 \leqslant 2c^2+ca+a^2 < 2.25+5.4+16 = 86$: mâu thuẫn. □

Ví dụ 1.2.51. *Giả sử các số thực a, b, c, d thỏa mãn $ab+2(b+c+d) = c(a+b)$. Chứng minh rằng trong số ba bất phương trình dưới đây ít nhất một bất phương trình có nghiệm:*

$$\begin{aligned} x^2-ax+b &\leqslant 0\\ x^2-bx+c &\leqslant 0\\ x^2-cx+d &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Bài giải: Giả sử cả ba bất phương trình đều vô nghiệm. Khi đó ta có $x^2 - ax + b > 0, x^2 - bx + c > 0$ và $x^2 - cx + d > 0$ thỏa mãn với mọi x. Vậy $a^2 - 4b < 0, b^2 - 4c < 0, c^2 - 4d < 0$. Cộng ba bất đẳng thức này được $2(b+c+d) > \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$. Vậy $ab + 2(b+c+d) > \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} + ab = \dfrac{(a+b)^2+c^2}{2} \geqslant c(a+b)$. Từ đây suy ra $ab + 2(b+c+d) > c(a+b)$: mâu thuẫn. Điều này chứng tỏ điều giả sử sai. □

Ví dụ 1.2.52. [IMO 2001] *Giả sử các số dương* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *thỏa mãn* $a_1a_2\ldots a_n = 1$. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)a_n}} \geqslant 1.$$

Bài giải: Đặt $x_i = \dfrac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)a_i}}$ với $i = 1, 2, \ldots, n$ và $P = x_1x_2\ldots x_n$. Ta chỉ ra $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant 1$. Giả sử $x_1 + x_2 + \cdots + x_n < 1$. Khi đó $a_i = \Big(\dfrac{1}{x_i^2} - 1\Big).\dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{1-x_i^2}{(n^2-1)x_i^2}, i = 1, 2, \ldots, n$, và như vậy ta có ngay $\prod\limits_{i=1}^n (1-x_i^2) = (n^2-1)^nP^2$. Do bởi $\sum\limits_{i-1}^n x_i < 1$ nên theo Bất đẳng thức Cauchy

$$\begin{aligned} 1 - x_j &> -x_j + \sum_{i=1}^n x_i \geqslant (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{P}{x_j}} \\ 1 + x_j &> x_j + \sum_{i=1}^n x_i \geqslant (n+1)\sqrt[n+1]{x_jP}, j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Nhân vế với vế của tất cả các bất đẳng thức trên ta được $\prod\limits_{j=1}^n (1-x_j) > (n-1)^nP$ và $\prod\limits_{j=1}^n (1+x_j) > (n+1)^nP$ và như thế $\prod\limits_{j=1}^n (1-x_ij^2) > (n^2-1)^nP^2$: mâu thuẫn. Dễ dàng thấy, dấu = xảy ra khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$. □

Phương pháp hình học

Mệnh đề 1.2.53. *Với các điểm* A, B, C *và các véctơ* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ *ta luôn có*

(i) $AB + BC \geqslant AC$.

(ii) $|\vec{x}||\vec{y}| \geqslant |\vec{x}\vec{y}| \geqslant \vec{x}\vec{y}$.

(ii) $|\vec{x}| + |\vec{y}| \geqslant |\vec{x} + \vec{y}|$.

(iii) $|\vec{x}| + |\vec{y}| + |\vec{z}| \geqslant |\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}|$.

(iv) *Giả sử hai miền phẳng* $(D_1), (D_2)$ *với diện tích* S_1 *và* S_2 *tương ứng. Nếu* (D_1) *chứa trong* (D_2) *thì* $S_1 \leqslant S_2$.

Chứng minh: Hiển nhiên. □

Ví dụ 1.2.54. *Cho* $|a + b + c| \geqslant 1$. *Chứng minh bất đẳng thức sau đây:*

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} \geqslant \sqrt{3}.$$

Bài giải: Với $\vec{a} = \big(a + \frac{b}{2}; \frac{\sqrt{3}b}{2}\big), \vec{b} = \big(b + \frac{c}{2}; \frac{\sqrt{3}c}{2}\big), \vec{c} = \big(c + \frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}\big)$ ta có $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \big(\frac{3}{2}(a + b + c); \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c)\big)$. Do $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \geqslant |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ suy ra $\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} \geqslant \sqrt{3}$. □

Ví dụ 1.2.55. *Cho* a, b, c *thỏa mãn* $0 \leqslant c \leqslant a, 0 \leqslant c \leqslant b$. *Chứng minh rằng*

$$\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} \leqslant \sqrt{ab}.$$

Bài giải: Bất đẳng thức hiển nhiên đúng khi $c = 0$. Khi $c > 0$, dựng hai tam giác vuông OAB và OAC cùng vuông góc ở O với cạnh chung $OC = \sqrt{c}$ và $OA = \sqrt{b - c}, OB = \sqrt{a - c}$ ở về hai phía khác nhau so với OC. Khi đó $BC = \sqrt{a}, AC = \sqrt{b}$. Từ $S_{OAC} + S_{OBC} = S_{ABC}$ suy ra $\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} = 2S_{ABC} \leqslant \sqrt{ab}$. □

Ví dụ 1.2.56. *Với* $a, b, c, d \in [0; 1]$ *ta luôn có bất đẳng thức dưới đây:*

$$a^{2006} + b^{2006} + c^{2006} + d^{2006} \leqslant 2 + a^{2006}b + b^{2006}c + c^{2006}d + d^{2006}a.$$

Bài giải: Trên hình vuông $ABCD$ cạnh 1, lần lượt lấy các điểm M, N, P và Q trên các cạnh AB, BC, CD và DA sao cho $AQ = a, BM = b, CN = c$ và $DP = d$. Khi đó

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}a(1 - b) + \frac{1}{2}b(1 - c) + \frac{1}{2}c(1 - d) + \frac{1}{2}d(1 - a) \\ &= S_{MAQ} + S_{NBM} + S_{PCN} + S_{QDP} \leqslant S_{ABCD} = 1. \end{aligned}$$

Vậy $a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - d) + d(1 - a) \leqslant 2$. Do $a, b, c, d \in [0; 1]$ nên $a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - d) + d(1 - a) \geqslant a^{2006}b + b^{2006}c + c^{2006}d + d^{2006}a$. Vậy$a^{2006} + b^{2006} + c^{2006} + d^{2006} \leqslant 2 + a^{2006}b + b^{2006}c + c^{2006}d + d^{2006}a$. □

Phương pháp lượng giác

Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về bất đẳng thức lượng giác để sử dụng những tính chất của các hàm số lượng giác. Tất nhiên, không phải bài toán nào cũng dùng phương pháp này. Sau đây là một số dấu hiệu và phép lượng giác hóa tương ứng thường được sử dụng:

Khi $x^2 + y^2 = r^2, r > 0$, thì ta đặt $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \\ \alpha \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

Khi $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = r^2, a, b, r > 0$, thì ta đặt $\begin{cases} x = ra\cos\alpha \\ y = rb\sin\alpha \\ \alpha \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

Nếu $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1, a, b > 0$, thì đặt $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \\ \alpha \in [0; 2\pi] \\ 0 \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$

Nếu $|x| \leqslant r$ thì đặt $x = r\cos\alpha$ với $\alpha \in [0; \pi]$ hoặc $x = r\sin\alpha$ với $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Ví dụ 1.2.57. *Với hai số thực* a *và* b *thỏa mãn* $a^2 + b^2 = 2$ *ta luôn có bất đẳng thức* $2(a^3 - b^3) - 3(a - b) \leqslant 2$.

Bài giải: Đặt $a = \sqrt{2}\cos u, b = \sqrt{2}\sin u$. Khi đó $2(a^3 - b^3) - 3(a - b) = 2\cos(3u - \frac{\pi}{4}) \leqslant 2$. □

Ví dụ 1.2.58. *Với hai số thực* a *và* b *thỏa mãn* $a^2 + 4b^2 \leqslant 6a + 16b$ *ta luôn có bất đẳng thức* $3a - 8b \leqslant 18$.

Bài giải: Từ $a^2 + 4b^2 \leqslant 6a + 16b$ suy ra $(a - 3)^2 + 4(b - 2)^2 \leqslant 5^2$. Đặt $a = 3 + r\cos u, b = 2 + \frac{1}{2}r\sin u$ với $r \in [0; 5]$. Khi đó $3a - 8b = -7 + r(3\cos u - 4\sin u) = -7 + 5r\cos(u + \alpha) \leqslant -7 + 25 = 18$. □

Ví dụ 1.2.59. *Với bốn số thực* a, b, c *và* d *biến thiên thỏa mãn hệ* $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, *hãy xác định giá trị lớn nhất của biểu thức dưới đây:*

$$T = (1 - a)(1 - c) + (1 - b)(1 - d).$$

Bài giải: Đặt $a = \cos u, b = \sin u, c = \cos v, d = \sin v$. Khi đó ta có

$$T = 2 - \sqrt{2}\cos(u - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}\cos(v - \frac{\pi}{4}) + \cos(u - v) \leqslant 3 + 2\sqrt{2}.$$

Như vậy $T_{ln} = 3 + 2\sqrt{2}$ khi $u = v = \dfrac{5\pi}{4}$. □

Ví dụ 1.2.60. *Cho ba số thực phân biệt a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức*

$$T = \Big(\frac{1 + ab}{a - b}\Big)^2 + \Big(\frac{1 + bc}{b - c}\Big)^2 + \Big(\frac{1 + ca}{c - a}\Big)^2 \geqslant 1.$$

Bài giải: Đặt $a = \tan\alpha, b = \tan\beta, c = \tan\gamma, \alpha, \beta, \gamma \in [-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}]$. Khi đó

$$M = \cot^2(\alpha - \beta) + \cot^2(\beta - \gamma) + \cot^2(\gamma - \alpha).$$

Do $(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) = 0$ nên $\cot(\alpha - \beta)\cot(\beta - \gamma) + \cot(\beta - \gamma)\cot(\gamma - \alpha) + \cot(\gamma - \alpha)\cot(\alpha - \beta) = 1$. Từ đó suy ra $T \geqslant 1$. □

Ví dụ 1.2.61. *Chứng minh rằng* $\left|\dfrac{a - b}{a + b} + \dfrac{c - d}{c + d} + \dfrac{ad + bc}{ac - bd}\right| \geqslant \sqrt{3}$.

Bài giải: Đặt $M = \left|\dfrac{a - b}{a + b} + \dfrac{c - d}{c + d} + \dfrac{ad + bc}{ac - bd}\right|$. Xét các trường hợp:

Khi $a = 0$ thì $M = \left|-1 + \dfrac{c - d}{c + d} - \dfrac{c}{d}\right| = \left|-\dfrac{c}{d} - 1 + \dfrac{\frac{c}{d} - 1}{\frac{c}{d} + 1}\right|$. Đặt $x = \dfrac{c}{d} + 1$.

Ta có $M = \left|-x + \dfrac{x - 2}{x}\right| = \dfrac{x^2 + 2 - x}{|x|} \geqslant \dfrac{2\sqrt{2}|x| - |x|}{|x|} = 2\sqrt{2} - 1 > \sqrt{3}$.

Khi $c = 0$, hoàn toàn tương tự như trên, ta cũng có $M > \sqrt{3}$.

Khi $a, c \neq 0$, đặt $\dfrac{b}{a} = \tan\alpha$ và $\dfrac{d}{c} = \tan\beta$, ta có ngay

$$\begin{aligned} x &= \frac{a-b}{a+b} = \frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}} = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha} = \tan\Big(\frac{\pi}{4}-\alpha\Big)\\ y &= \frac{c-d}{c+d} = \frac{1-\frac{d}{c}}{1+\frac{d}{c}} = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\beta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\beta} = \tan\Big(\frac{\pi}{4}-\beta\Big)\\ z &= \frac{ad+bc}{ac+bd} = \frac{\frac{d}{c}+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}\frac{d}{c}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \tan(\alpha+\beta). \end{aligned}$$

Do bởi $\big(\frac{\pi}{4}-\alpha\big)+\big(\frac{\pi}{4}-\beta\big)+(\alpha+\beta) = \frac{\pi}{2}$ nên $xy+yz+zx = 1$. Kết hợp với bất đẳng thức $(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+zx)$ suy ra $M = |x+y+z| \geqslant \sqrt{3}$. Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh. □

Ví dụ 1.2.62. *Với ba số thực a, b, c ta luôn có bất đẳng thức dưới đây:*

$$(ab+bc+ca-1)^2 \leqslant (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1).$$

Bài giải: Đặt $a = \tan u, b = \tan v, c = \tan w$ với $u, v, w \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$. Khi đó $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) = \dfrac{1}{\cos^2 u}\dfrac{1}{\cos^2 v}\dfrac{1}{\cos^2 w}$. Bất đẳng thức trở thành

$\big(\sin u \sin v \cos w + \sin v \sin w \cos u + \sin w \sin u \cos v - \cos u \cos v \cos w\big)^2$

$\leqslant 1$ hay $\big(\sin v \sin(u+w) - \cos v \cos(u+w)\big)^2 = \cos^2(u+v+w) \leqslant 1.$ □

Ví dụ 1.2.63. *Với ba số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c = abc$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức dưới đây:*

$$T = a\sqrt{\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{1+a^2}} + b\sqrt{\frac{(1+c^2)(1+a^2)}{1+b^2}} + c\sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{1+c^2}}.$$

Bài giải: Đặt $a = \tan u, b = \tan v, c = \tan w$ với $u, v, w \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Khi đó $\tan u + \tan v + \tan w = \tan u \tan v \tan w$. Dễ dàng suy ra u, v, w là số đo ba góc của một tam giác nhọn. Biến đổi

$$T = \frac{\sin u}{\cos v \cos w} + \frac{\sin v}{\cos u \cos w} + \frac{\sin w}{\cos u \cos v} = 2\tan u \tan v \tan w.$$

Vì hàm $\tan x, x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, là hàm lồi nên $T \geqslant 2\tan^3 \dfrac{\pi}{3} = 6\sqrt{3}$. Như vậy $T_{nn} = 6\sqrt{3}$ khi $a = b = c = \sqrt{3}$. □

Ví dụ 1.2.64. *Với ba số thực a, b, c luôn có bất đẳng thức dưới đây:*

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} + \frac{|b-c|}{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}} \geqslant \frac{|a-c|}{\sqrt{(1+a^2)(1+c^2)}}.$$

Bài giải: Đặt $a = \tan u, b = \tan v, c = \tan w$. Khi đó bất đẳng thức trở thành $|\sin(u-v)| + |\sin(v-w)| \geqslant |\sin(u-w)|$. Từ $|\sin(x+y)| = |\sin x \cos y + \sin y \cos x| \leqslant |\sin x| + |\sin y|$ dễ dàng suy ra $|\sin(u-w)| = |\sin(u-v+v-w)| \leqslant |\sin(u-v)| + |\sin(v-w)|$. □

Ví dụ 1.2.65. *Với dãy số thực $a_0 = 1, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} = n+1, n \geqslant 1$, có*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{|a_i - a_{i+1}|}{\sqrt{a_i^2+1}\sqrt{a_{i+1}^2+1}} > \frac{2n}{3(n+2)}.$$

Bài giải: Với ba số a, b, c ta đặt $a = \tan x, b = \tan y, c = \tan z$. Khi đó bất đẳng thức $\dfrac{|a-b|}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}} + \dfrac{|b-c|}{\sqrt{b^2+1}\sqrt{c^2+1}} \geqslant \dfrac{|c-a|}{\sqrt{c^2+1}\sqrt{a^2+1}}$ tương đương $|\sin(x-y)| + |\sin(y-z)| \geqslant |\sin(x-z)|$. Từ $|\sin(u+v)| = |\sin u \cos v + \sin v \cos u| \leqslant |\sin u| + |\sin v|$ ta suy ra bất đẳng thức sau: $|\sin(x-z)| = |\sin(x-y+y-z)| \leqslant |\sin(x-y)| + |\sin(y-z)|$. Sử dụng kết quả này: $\dfrac{|a_1-a_2|}{\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_2^2+1}} + \dfrac{|a_2-a_3|}{\sqrt{a_2^2+1}\sqrt{a_3^2+1}} \geqslant \dfrac{|a_1-a_3|}{\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_3^2+1}}$. Quy nạp theo n được $\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{|a_i-a_{i+1}|}{\sqrt{a_i^2+1}\sqrt{a_{i+1}^2+1}} \geqslant \dfrac{|a_0-a_{n+1}|}{\sqrt{a_0^2+1}\sqrt{a_{n+1}^2+1}} \geqslant$ $\dfrac{n}{\sqrt{2n^2+4n+4}} > \dfrac{n}{\sqrt{2}(n+2)} > \dfrac{2n}{3(n+2)}$. □

Ví dụ 1.2.66. *Với số tự nhiên* n *ta xét dãy* $a_0 = 0, a_i > 0$ *với mọi* $i = 1, 2, \ldots, n$ *thỏa mãn* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$. *Chứng minh rằng*

$$1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{1 + a_0 + \cdots + a_{i-1}}\sqrt{a_i + \cdots + a_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

Bài giải: Theo Bất đẳng thức Cauchy ta có kết quả sau đây:

$\sqrt{1 + a_0 + \cdots + a_{i-1}}\sqrt{a_i + \cdots + a_n} \leqslant \frac{1}{2}(1+a_0+\cdots+a_{i-1}+a_i+\cdots+a_n)$ $= 1$. Vậy $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{1 + a_0 + \cdots + a_{i-1}}\sqrt{a_i + \cdots + a_n}} \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1} = 1$. Đặt $u_i = \arcsin(a_0 + \cdots + a_{i-1} + a_i)$ với $i = 0, 1, \ldots, n$. Khi đó có các hệ thức sau:

$$\begin{aligned} a_i &= (a_0 + \cdots + a_{i-1} + a_i) - (a_0 + \cdots + a_{i-1}) = \sin u_i - \sin u_{i-1} \\ \cos u_{i-1} &= \sqrt{1 - \sin^2 u_{i-1}} = \sqrt{1 - (a_0 + \cdots + a_{i-1})^2} \\ &= \sqrt{1 + a_0 + \cdots + a_{i-1}}\sqrt{a_i + \cdots + a_n}, i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Vậy $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{1 + a_0 + \cdots + a_{i-1}}\sqrt{a_i + \cdots + a_n}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\sin u_i - \sin u_{i-1}}{\cos u_{i-1}}$ hay $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2\cos\frac{u_i + u_{i-1}}{2}\sin\frac{u_i - u_{i-1}}{2}}{\cos u_{i-1}} < \sum\limits_{i=1}^{n} 2\sin\frac{u_i - u_{i-1}}{2}$. Vì $\sin x < x$ khi $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ nên $S < \sum\limits_{i=1}^{n}(u_i - u_{i-1}) = \frac{\pi}{2}$. □

Ví dụ 1.2.67. *Với số tự nhiên* n *ta xét dãy* $a_0 = 0, a_i > 0$ *với mọi số* $i = 1, 2, \ldots, n$, *và thỏa mãn* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{1 + (a_0 + \cdots + a_{i-1})^2}\sqrt{1 + (a_0 + \cdots + a_i)^2}} < \frac{\pi}{4}.$$

Bài giải: Đặt $u_i = \arctan(a_0 + \cdots + a_{i-1} + a_i)$ với $i = 0, 1, \ldots, n$. Khi đó các góc $u_i \in [0; \frac{\pi}{4}]$ và có các hệ thức sau:

$$\begin{aligned} a_i &= (a_0 + \cdots + a_{i-1} + a_i) - (a_0 + \cdots + a_{i-1}) = \tan u_i - \tan u_{i-1} \\ \frac{1}{\cos u_i} &= \sqrt{1 + \tan^2 u_i} = \sqrt{1 + (a_0 + \cdots + a_i)^2}, i = 1, \ldots, n. \text{ Vậy } S = \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{1+(a_0+\cdots+a_{i-1})^2}\sqrt{1+(a_0+\cdots+a_i)^2}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\tan u_i-\tan u_{i-1}}{\dfrac{1}{\cos u_{i-1}\cos u_i}}$$

hay $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\sin(u_i-u_{i-1})<\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-u_{i-1})=u_n=\dfrac{\pi}{4}$. □

Ví dụ 1.2.68. *Với mọi tam giác ABC ta luôn có bất đẳng thức sau:*

$$\frac{1}{(1+\sin A)^2}+\frac{1}{(1+\sin B)^2}+\frac{1}{(1+\sin C)^2}\leqslant\frac{3}{1+\sin A\sin B\sin C}.$$

Bài giải: Suy ra từ Ví dụ 1.1.6. □

Ví dụ 1.2.69. *Với mọi tam giác nhọn ABC ta luôn có bất đẳng thức sau:*

$$\tan A\tan B\tan C\geqslant 3\sqrt{3}.$$

Bài giải: Bởi vì $T=\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$ nên có $T\geqslant 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}$. Như vậy $\tan A\tan B\tan C\geqslant 3\sqrt{3}$. □

Ví dụ 1.2.70. *Với mọi tam giác nhọn ABC ta luôn có bất đẳng thức sau:*

$$\frac{\tan^5 A+\tan^5 B+\tan^5 C}{\tan A+\tan B+\tan C}\geqslant 9.$$

Bài giải: Ta có $\dfrac{\tan^5 A+\tan^5 B+\tan^5 C}{\tan A+\tan B+\tan C}=\dfrac{\tan^5 A+\tan^5 B+\tan^5 C}{\tan A\tan B\tan C}$. Vì $\tan^5 A+\tan^5 B+\tan^5 C\geqslant 3\sqrt[3]{\tan^5 A\tan^5 B\tan^5 C}$ nên ta có ngay bất đẳng thức $\dfrac{\tan^5 A+\tan^5 B+\tan^5 C}{\tan A+\tan B+\tan C}\geqslant 3\sqrt[3]{\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C}\geqslant 9$. □

Ví dụ 1.2.71. *Với mọi tam giác ABC ta luôn có bất đẳng thức sau:*

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geqslant 1.$$

Bài giải: Từ $\tan^2\dfrac{A}{2}+\tan^2\dfrac{B}{2}+\tan^2\dfrac{C}{2}\geqslant\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$ suy ra $\tan^2\dfrac{A}{2}+\tan^2\dfrac{B}{2}+\tan^2\dfrac{C}{2}\geqslant 1$. □

Ví dụ 1.2.72. *Cho ΔABC. Đặt $x=\tan\dfrac{A}{2},y=\tan\dfrac{B}{2},z=\tan\dfrac{C}{2}$. Khi đó ta có các bất đẳng thức sau đây:*

(i) $\left(1+\frac{4x}{y+z}\right)\left(1+\frac{4y}{z+x}\right)\left(1+\frac{4z}{x+y}\right) \geqslant \frac{27}{2}\left(27x^2y^2z^2+1\right).$

(ii) $\left(1+\frac{4x}{y+z}\right)\left(1+\frac{4y}{z+x}\right)\left(1+\frac{4z}{x+y}\right) \geqslant \left(1+2\sqrt[3]{\frac{2r}{R}}\right)^3.$

Bài giải: (i) Đặt $a = x+y+z, b = xy+yz+zx = 1, c = xyz$ và $T = \left(1+\frac{4x}{y+z}\right)\left(1+\frac{4y}{z+x}\right)\left(1+\frac{4z}{x+y}\right) = \frac{(a+3x)(a+3y)(a+3z)}{(a-x)(a-y)(a-z)}$. Vậy $T = \frac{a^3+3aa^2+9ba+27c}{a^3-aa^2+ba-c}$. Xét $T = \frac{4a^3+9a+27c}{a-c}$ với $a \geqslant \sqrt{3} = 9\frac{1}{3\sqrt{3}} \geqslant 9c > 0$. Ta coi T là hàm của a và $a \geqslant 9c > 0$. Do $a > 1$ nên ta có

$$T'_a = 4\frac{2a^3-3a^2c-9c}{(a-c)^2} = 4\frac{a^2(2a-3c)-9c}{(a-c)^2} \geqslant 4\frac{15a^2c-9c}{(a-c)^2} > 0$$

và như vậy $T \geqslant T(9c) = \frac{4.3^6c^3+108c}{8c} = \frac{3^6}{2}c^2 + \frac{27}{2}$ và có bất đẳng thức.
(ii) Lại có $T = \left(1+\frac{4x}{y+z}\right)\left(1+\frac{4y}{z+x}\right)\left(1+\frac{4z}{x+y}\right) \geqslant \left(1+4\sqrt[3]{\frac{c}{a-c}}\right)^3 = \left(1+2\sqrt[3]{\frac{2r}{R}}\right)^3.$ □

Nếu coi T là hàm của $c > 0$ thì $T'_c > 0$ và có $T > T(0) = 9 + 4a^2 \geqslant 21$. Tuy bị chặn dưới, cũng dễ thấy T không có giá trị nhỏ nhất. Khi một trong các góc tam giác tiến tới π và hai góc còn lại tiến tới 0 thì $a \to +\infty$. Vậy T cũng không có giá trị lớn nhất. Chú ý rằng, ta còn có thể chứng minh $T > 25$, nhưng việc tìm ra số 25 hoàn toàn không tự nhiên.

Phương pháp quy nạp toán học

Mệnh đề 1.2.73. [Cauchy] *Với các số thực* $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0$ *ta luôn có*

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} = \Gamma_n.$$

Chứng minh: Với $n = 1$ bất đẳng thức đúng là hiển nhiên. Với $n = 2$ ta có $\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2}$ vì $\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2 \geqslant 0$. Xét trường hợp $n > 2$. Giả sử đã có $A_n \geqslant \Gamma_n$. Khi đó $A = \dfrac{a_{n+1} + (n-1)A_{n+1}}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_{n+1}A_{n+1}^{n-1}} = \Gamma$ theo giả thiết qui nạp. Lại có $A_{n+1} = \dfrac{A_n + A}{2} \geqslant \sqrt{A_n A} \geqslant \sqrt{\Gamma_n \Gamma}$ và như vậy $A_{n+1} \geqslant \sqrt{\Gamma_n\Gamma} = \sqrt[2n]{\Gamma_{n+1}^{n+1}A_{n+1}^{n-1}}$ hay $A_{n+1} \geqslant \Gamma_{n+1}$. □

Ví dụ 1.2.74. *Cho $a + b \geqslant 0$. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta đều có*

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geqslant \Big(\frac{a+b}{2}\Big)^n.$$

Bài giải: Với $n = 1$, bất đẳng thức luôn đúng. Giả sử bất đẳng thức đúng cho $n = k \in \mathbb{N}, k \geqslant 1$. Với $n = k + 1$, theo giả thiết quy nạp sẽ nhận được

$$\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^{k+1} = \frac{a+b}{2}.\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^k \leqslant \frac{a+b}{2}.\frac{a^k + b^k}{2} = \frac{(a+b)(a^k+b^k)}{4}.$$

Xét hiệu $T = \dfrac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} - \dfrac{(a+b)(a^k+b^k)}{4} = \dfrac{(a-b)(a^k-b^k)}{4}$. Do bởi vai trò của a và b như nhau nên có thể giả thiết $a \geqslant b$. Kết hợp với giả thiết $a + b \geqslant 0$ hay $a \geqslant -b$ ta nhận được $a \geqslant |b|$. Vậy $a^k \geqslant |b|^k \geqslant b^k$ và suy ra $(a-b)(a^k - b^k) \geqslant 0$. Do đó $\dfrac{(a+b)(a^k+b^k)}{4} \leqslant \dfrac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$ và như vậy $\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)^{k+1} \leqslant \dfrac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$. Tóm lại bất đẳng thức đúng với mọi $n \geqslant 0$. □

Ví dụ 1.2.75. *Cho các số $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0$ thỏa mãn $a_1a_2\ldots a_n = 1$ và k là một hằng số dương tùy ý sao cho $k \geqslant n - 1$. Khi đó ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{k+a_1} + \frac{1}{k+a_2} + \cdots + \frac{1}{k+a_n} \leqslant \frac{n}{k+1}.$$

Bài giải: Với $n = 2$ bất đẳng thức trở thành $\dfrac{1}{k+a_1} + \dfrac{1}{k+a_2} \leqslant \dfrac{2}{k+1}$ hay $a_1 + a_2 \geqslant 2$ vì $a_1a_2 = 1$. Từ $a_1a_2 = 1$ suy ra $a_1 + a_2 \geqslant 2$. Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng với $n = 2$. Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh đúng với n. Không làm mất tính chất tổng quát, có thể coi $0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1}$. Đặt $t = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}, h = \dfrac{k}{t}$ và $b_i = \dfrac{a_i}{t}$ với $i = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó $b_1b_2\ldots b_n = 1$. Biểu diễn tổng qua h và các b_i :

$$\frac{1}{k+a_1} + \frac{1}{k+a_2} + \cdots + \frac{1}{k+a_n} = \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{h+b_1} + \frac{1}{h+b_2} + \cdots + \frac{1}{h+b_n}\Big).$$

Vì $k \geqslant n+1-1 = n$ và $t \leqslant 1$ nên $h \geqslant \frac{n}{t} > n-1$. Như vậy, theo giả thiết quy nạp có $\frac{1}{h+b_1} + \frac{1}{h+b_2} + \ldots + \frac{1}{h+b_n} \leqslant \frac{n}{h+1}$. Từ đó suy ra

$$\frac{1}{k+a_1} + \frac{1}{k+a_2} + \ldots + \frac{1}{k+a_n} \leqslant \frac{1}{t}\frac{n}{h+1} = \frac{n}{k+t}.$$

Bây giờ sẽ chỉ ra $\frac{n}{k+t} + \frac{1}{k+a_{n+1}} \leqslant \frac{n+1}{k+1}$ với $t^n a_{n+1} = a_1 a_2 \ldots a_{n+1} = 1$. Thật vậy, $\frac{n}{k+t} + \frac{1}{k+a_{n+1}} \leqslant \frac{n+1}{k+1}$ tương đương $\frac{n}{k+t} + \frac{t^n}{kt^n+1} \leqslant \frac{n+1}{k+1}$ hay $M = \Big(k(n+1)-(k+1)\Big)t^{n+1} - k(n+1)t^n + (n+1)t + (k-n) \geqslant 0$. Viết $M = (t-1)^2\Big(k(n+1)(t^{n-1}+\cdots+1\Big) - (k+1)(t^{n-1}+2t^{n-2}+\ldots+n) \geqslant 0$. Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. □

Chương 2

Một vài phương pháp xây dựng bất đẳng thức

Mục này tập trung chứng minh lại một số bất đẳng thức qua *hàm số* hoặc *hình học*. Bây giờ ta chọn một hàm số $y = f(x)$ hoặc một hình nào đó. Sử dụng tính tăng-giảm hay tính lồi-lõm hoặc một số kết quả trong Hình học để có bất đẳng thức. Vấn đề đặt ra: Chọn hàm hoặc hình nào để có các bất đẳng thức?

2.1 Phương pháp hàm số

Tam thức bậc hai

Hàm đầu tiên được xét đến là một tam thức bậc hai $f(x) = ax^2+bx+c, a \neq 0$.

Mệnh đề 2.1.1. *Giả sử* x_1, x_2 *là nghiệm của* $f(x) = 0$. *Khi đó có kết quả:*

$$\begin{cases} f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Mệnh đề 2.1.2. *Giả sử* $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ *và* $\Delta = b^2 - 4ac$. *Khi đó có các kết quả:*

(i) $f(x) > 0$ *với mọi giá trị của* x *khi và chỉ khi* $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

(ii) $f(x) \geqslant 0$ *với mọi giá trị của* x *khi và chỉ khi* $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leqslant 0. \end{cases}$

(iii) *$f(x) < 0$ với mọi giá trị của x khi và chỉ khi* $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

(iv) *$f(x) \leqslant 0$ với mọi giá trị của x khi và chỉ khi* $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leqslant 0. \end{cases}$

(v) *$f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và số thực $x_1 < \alpha < x_2$ khi và chỉ khi $af(\alpha) < 0$.*

Ví dụ 2.1.3. *Giả sử các số thực a, b, c thỏa mãn hệ:* $\begin{cases} a + b + c = 6 \\ ab + bc + ca = 9. \end{cases}$ *Chứng minh rằng $0 \leqslant a, b, c \leqslant 4$.*

Bài giải: Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} b + c = 6 - a \\ bc = 9 - a(6 - a) \end{cases}$ và như vậy b và c là hai nghiệm của phương trình: $t^2 - (6 - a)t + a^2 - 6a + 9 = 0$. Do đó $\Delta \geqslant 0$ hay $0 \leqslant a \leqslant 4$. Tương tự $0 \leqslant b, c \leqslant 4$. □

Ví dụ 2.1.4. *Giả sử ΔABC có độ dài các cạnh a, b, c và diện tích S. Chứng minh rằng với mọi $x > 0$ ta luôn có bất đẳng thức:*

$$(2x - 1)a^2 + (\frac{2}{x} - 1)b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S.$$

Bài giải: Bất đẳng thức tương đương $2a^2x^2 - \big(a^2 + b^2 - c^2 - 4\sqrt{3}S\big)x + 2b^2 \geqslant 0$ với mọi $x > 0$. Xét $\Delta = [a^2 + b^2 - c^2 - 4\sqrt{3}S + 4ab][a^2 + b^2 - c^2 - 4\sqrt{3}S - 4ab]$. Từ $1 \geqslant \cos(C - \frac{2\pi}{3}) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{4ab} + \frac{\sqrt{3}S}{ab}$ có $a^2 + b^2 - c^2 - 4\sqrt{3}S + 4ab \geqslant 0$. Tương tự, từ $1 \geqslant \cos(C + \frac{\pi}{3})$ suy ra $a^2 + b^2 - c^2 - 4\sqrt{3}S - 4ab \leqslant 0$. Vậy $\Delta \leqslant 0$ và bất đẳng thức đúng. □

Ví dụ 2.1.5. *Dãy (a_n) xác định bởi:* $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 6a_n + \sqrt{35a_n^2 + 2010}, n \geqslant 0. \end{cases}$

Chứng minh rằng

(i) $a_{n+1} = 12a_n - a_{n-1}, a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 2010}{a_{n-1}}$ *với mọi $n \geqslant 1$.*

(ii) *Dãy (a_n) là dãy không bị chặn trên.*

Bài giải: (i) Từ $\big(a_{n+1} - 6a_n\big)^2 = 35a_n^2 + 2010$ ta suy ra phương trình sau đây: $a_{n+1}^2 - 12a_n a_{n+1} + a_n^2 - 2010 = 0$ với mọi $n \geqslant 0$. Thế $n+1$ qua n được $a_{n-1}^2 - 12a_n a_{n-1} + a_n^2 - 2010 = 0$. Như vậy a_{n-1} và a_{n+1} là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 12a_n x + a_n^2 - 2010 = 0$. Theo Định lý Viét về tổng và tích hai nghiệm suy ra được ngay $a_{n+1} = 12a_n - a_{n-1}, a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 2010}{a_{n-1}}$.

(ii) Vì các $a_n > 0$ và $a_{n+1} = 6a_n + \sqrt{35a_n^2 + 2010} > 6a_n$ với mọi $n \geqslant 0$ nên dãy (a_n) là dãy đơn điệu tăng. Nếu (a_n) là dãy bị chặn trên thì nó có giới hạn hữu hạn. Giả sử giới hạn của dãy là a. Từ $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 - 2010$ theo (i) ta suy ra $a^2 = a^2 - 2010$. Vậy $2010 = 0$: vô lý. Do vậy, (a_n) là dãy tăng không bị chặn trên. □

Ví dụ 2.1.6. *Cho dãy số nguyên* (a_n) *xác định như sau:* $a_0 = 1, a_1 = 4$ *và* $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ *với* $n \geqslant 0$. *Chứng minh rằng*

(i) $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 1}{a_{n-1}}, n \geqslant 1.$

(ii) *Dãy* (a_n) *là dãy không bị chặn trên.*

Bài giải: (i) Ta có $a_n^2 + a_{n-1}^2 - 4a_n a_{n-1} - 1 = 0$ với mọi số nguyên $n \geqslant 1$. Vậy a_{n+1} và a_{n-1} là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 4a_n x + a_n^2 - 1 = 0$. Theo Định lý Viét có $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 1}{a_{n-1}}$.

(ii) Vì $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ với mọi $n \geqslant 0$ và $a_0 = 1, a_1 = 4$ nên dễ dàng suy ra dãy (a_n) là dãy đơn điệu tăng qua quy nạp. Nếu (a_n) là dãy bị chặn trên thì nó có giới hạn hữu hạn. Giả sử giới hạn của dãy là a. Từ $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 - 1$ theo (i) ta suy ra $a^2 = a^2 - 1$. Vậy $1 = 0$: vô lý. Do vậy, (a_n) là dãy không bị chặn trên. □

Mệnh đề 2.1.7. *Giả sử dãy hữu hạn các số thực* $(a_i), (b_i), (t_i)$ *thỏa mãn* $0 < a \leqslant a_i \leqslant A, 0 < b \leqslant b_i \leqslant B$ *và* $t_i \geqslant 0$ *với mọi* $i = 1, \dots, n$. *Khi đó có*

(i) **[Polya]** $\dfrac{1}{4}\Big(\sqrt{\dfrac{ab}{AB}} + \sqrt{\dfrac{AB}{ab}}\Big)^2 \geqslant \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2 . \sum\limits_{i=1}^n b_i^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_i b_i\Big)^2}.$

(ii) **[Cantorovic]** $\dfrac{(a+A)^2}{4aA}\Big(\sum\limits_{i=1}^n t_i\Big)^2 \geqslant \Big(\sum\limits_{i=1}^n t_i a_i\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{t_i}{a_i}\Big).$

Chứng minh: (i) Tam thức $f(x) = x^2 - \Big(\frac{b}{A} + \frac{B}{a}\Big)x + \frac{Bb}{Aa}$ có hai nghiệm $\frac{b}{A}, \frac{B}{a}$. Từ $\frac{b}{A} \leqslant \frac{b_i}{a_i} \leqslant \frac{B}{a}$ ta suy ra bất đẳng thức $\frac{b_i^2}{a_i^2} - \Big(\frac{b}{A} + \frac{B}{a}\Big)\frac{b_i}{a_i} + \frac{Bb}{Aa} \leqslant 0$ hay $b_i^2 - \Big(\frac{b}{A} + \frac{B}{a}\Big)b_i a_i + \frac{Bb}{Aa}a_i^2 \leqslant 0$ với $i = 1, \ldots, n$. Cộng tất cả lại được:

$$\Big(\frac{b}{A} + \frac{B}{a}\Big)\sum_{i=1}^{n} b_i a_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + \frac{Bb}{Aa}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant 2\sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big)\Big(\frac{Bb}{Aa}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)}.$$

Do đó $\frac{1}{4}\Big(\sqrt{\frac{ab}{AB}} + \sqrt{\frac{AB}{ab}}\Big)^2 = \frac{1}{4}\Big(\frac{b}{A} + \frac{B}{a}\Big)^2\frac{Aa}{Bb} \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 . \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2}$.

(ii) Vì $0 < a \leqslant a_i \leqslant A$ và $t_i \geqslant 0$ nên $t_i a_i + \frac{t_i a A}{a_i} \leqslant (a + A)t_i$ với $i = 1, \ldots, n$, và ta có $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{t_i a A}{a_i} \leqslant (a + A)\sum\limits_{i=1}^{n} t_i$. Theo Bất đẳng thức Cauchy ta được $(a + A)(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i) \geqslant 2\sqrt{aA(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i a_i)(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{t_i}{a_i})}$ hay bất đẳng thức $\frac{(a + A)^2}{4aA}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i\Big)^2 \geqslant \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i a_i\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{t_i}{a_i}\Big)$. □

Ví dụ 2.1.8. *Cho các số thực* $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ *với* $a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 > 0$. *Khi đó* $\Big(a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\Big)\Big(b_1^2 - b_2^2 - b_3^2\Big) \leqslant \Big(a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3\Big)^2$.

Bài giải: Xét tam thức $f(x) = \Big(a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\Big)x^2 - 2\Big(a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3\Big)x + \Big(b_1^2 - b_2^2 - b_3^2\Big) = (a_1 x - b_1)^2 - (a_2 x - b_2)^2 - (a_3 x - b_3)^2$. Từ giả thiết suy ra $a_1 \neq 0$ và $f\Big(\frac{b_1}{a_1}\Big) \leqslant 0$. Vậy $f(x) = 0$ có nghiệm và như thế $\Delta' \geqslant 0$. □

Ví dụ 2.1.9. *Cho tam giác* ABC *với độ dài ba cạnh* $a, b, c, a + b + c = 2$, *và độ dài ba đường cao là* h_a, h_b, h_c. *Khi đó có các bất đẳng thức* $2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \geqslant T =$

$$\Big[\frac{a(a + 2h_a)}{2 - a} + \frac{b(b + 2h_b)}{2 - b} + \frac{c(c + 2h_c)}{2 - c}\Big]\Big[\frac{a(2 - a)}{a + 2h_a} + \frac{b(2 - b)}{b + 2h_b} + \frac{c(2 - c)}{c + 2h_c}\Big].$$

Bài giải: Vì $a+2h_a = b(\cos C+\sin C)+c(\cos B+\sin B)$ nên $b+c < a+2h_a \leqslant \sqrt{2}(b+c)$. Do đó $1 < \dfrac{a+2h_a}{2-a} \leqslant \sqrt{2}$. Tương tự $1 < \dfrac{b+2h_b}{2-b} \leqslant \sqrt{2}$, $1 < \dfrac{c+2h_c}{2-c} \leqslant \sqrt{2}$. Với $a = 1, A = \sqrt{2}$, $t_1 = a, t_2 = b, t_3 = c$ và $a_1 = \dfrac{a+2h_a}{2-a}, a_2 = \dfrac{b+2h_b}{2-b}, a_3 = \dfrac{c+2h_c}{2-c}$ ta có bất đẳng thức $2+\dfrac{3}{\sqrt{2}} \geqslant T$ theo Mệnh đề 2.1.7. □

Ví dụ 2.1.10. *Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z và mọi tam giác ABC luôn có bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2 \geqslant 2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B$. Từ đó chỉ ra*

(i) $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \dfrac{3}{2}$.

(ii) $\dfrac{1}{3}\cos A + \dfrac{1}{4}\cos B + \dfrac{1}{5}\cos C \leqslant \dfrac{5}{12}$.

Bài giải: Vì tam thức $f(x) = x^2-2x(y\cos C+z\cos B)+y^2+z^2-2yz\cos A$ có $\Delta \leqslant 0$ nên $f(x) \geqslant 0$ với mọi số thực x, y, z và mọi tam giác ABC. Với $x = y = z = 1$ có (i). Với $x = \dfrac{6}{\sqrt{6.8.10}}, y = \dfrac{8}{\sqrt{6.8.10}}$ và $z = \dfrac{10}{\sqrt{6.8.10}}$ ta có ngay bất đẳng thức (ii): $\dfrac{1}{3}\cos A + \dfrac{1}{4}\cos B + \dfrac{1}{5}\cos C \leqslant \dfrac{5}{12}$. □

Ví dụ 2.1.11. *Giả sử ba số $a, b, c > 0$ là độ dài 3 cạnh một tam giác. Chứng minh rằng nếu các số thực x, y, z thỏa mãn $ax+by+cz = 0$ thì $ayz+bzx+cxy \leqslant 0$ và $yz+zx+xy \leqslant 0$.*

Bài giải: Từ $ax+by+cz = 0$ suy ra $cz = -ax-by$. Vì $c > 0$ nên $ayz+bzx+cxy \leqslant 0$ tương đương $aycz+bczx+c^2xy \leqslant 0$. Vậy ta phải chỉ ra $ay(-ax-by)+bx(-ax-by)+c^2xy \leqslant 0$ hay $abx^2+(a^2+b^2-c^2)xy+aby^2 \geqslant 0$. Xét $f(x,y) = abx^2+(a^2+b^2-c^2)xy+aby^2$ với $ab > 0$. Do bởi

$$\Delta = -(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)y^2 \leqslant 0$$

nên $f(x,y) \geqslant 0$ với mọi x, y.

Vì $z = -\dfrac{ax+by}{c}$ nên $yz+zx+xy \leqslant 0$ tương đương $ax^2+(a+b-c)xy+by^2 \geqslant 0$. Dễ dàng thấy $\Delta \leqslant 0$. Vậy $yz+zx+xy \leqslant 0$. □

Đa thức bậc ba

Đa thức tiếp theo được xét đến là một đa thức bậc ba $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ và một số tính chất của đường cong bậc ba $(\ell) : y = x^3 + ax^2 + bx + c$ tương ứng trong mặt phẳng tọa độ (Oxy).
Phương trình $x^3+ax^2+bx+c = 0$ được đưa về dạng $g(x) = x^3+px+q = 0$ qua việc thế $x + \dfrac{a}{3}$ bởi x.

Mệnh đề 2.1.12. *Với* $\epsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, *phương trình* $g(x) = 0$ *có ba nghiệm:*

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}} \\ x_2 = \epsilon\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}} + \epsilon^2\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}} \\ x_3 = \epsilon^2\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}} + \epsilon\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}}. \end{cases}$$

Mệnh đề 2.1.13. *Giả sử* x_1, x_2, x_3 *là ba nghiệm của* $f(x) = 0$. *Khi đó ta có:*

$$\begin{cases} f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b \\ x_1x_2x_3 = -c. \end{cases}$$

Ví dụ 2.1.14. *Giả sử* x_1, x_2, x_3 *là ba nghiệm của* $x^3 + px + q = 0$. *Tính tích* $D = (x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2$.

Bài giải: Từ $x^3 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ ta suy ra các hệ thức

$$\begin{cases} 3x_1^2 + p = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \\ 3x_2^2 + p = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \\ 3x_3^2 + p = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{cases}$$

Vậy $D = -(3x_1^2 + p)(3x_2^2 + p)(3x_3^2 + p) = -4p^3 - 27q^2$. □

Ví dụ 2.1.15. *Cho ΔABC với độ dài cạnh là a, b, c và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Đặt $x = \sin A, y = \sin B, z = \sin C$. Ta có bất đẳng thức*

$$4(xy + yz + zx) + (x + y + z) \leqslant 11 + 6\sqrt{3}.$$

Bài giải: Vì a, b, c, là nghiệm của $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ nên $ab + bc + ca + (a + b + c)R = 2R^2 + 4pR + p^2 + r^2 + 4Rr$. Vì $a + b + c = 8R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} \leqslant 3\sqrt{3}R$ nên $ab + bc + ca + (a + b + c)R$ $\leqslant (11 + 6\sqrt{3})R^2$ hay $4(xy + yz + zx) + (x + y + z) \leqslant 11 + 6\sqrt{3}$. □

Ví dụ 2.1.16. *Cho ΔABC với độ dài cạnh là a, b, c và bán kính đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R. Khi đó ta có bất đẳng thức*

$$ab + bc + ca + (a + b + c)r + r^2 \leqslant \Big(\frac{39}{4} + 3\sqrt{3}\Big)R^2.$$

Bài giải: Vì a, b, c, là nghiệm của $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ nên $\dfrac{1}{x - a} + \dfrac{1}{x - b} + \dfrac{1}{x - c} = \dfrac{3x^2 - 4px + p^2 + r^2 + 4Rr}{(x - a)(x - b)(x - c)}$. Với $x = -r$ có

$$\frac{1}{a + r} + \frac{1}{b + r} + \frac{1}{c + r} = \frac{4r^2 + 4pr + p^2 + 4Rr}{(r + a)(r + b)(r + c)}.$$

Từ đây suy ra bất đẳng thức $\dfrac{1}{a + r} + \dfrac{1}{b + r} + \dfrac{1}{c + r} \leqslant \dfrac{\big(\frac{39}{4} + 3\sqrt{3}\big)R^2}{(r + a)(r + b)(r + c)}$ hay $ab + bc + ca + (a + b + c)r + r^2 \leqslant \Big(\dfrac{39}{4} + 3\sqrt{3}\Big)R^2$. □

Định lý Rolle, Đa thức bậc n

Bổ đề 2.1.17. [Rolle] *Nếu hàm số $y = g(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b], a < b$, thỏa mãn $g(a) = g(b)$ thì tồn tại $x_0 \in (a; b)$ để $g'(x_0) = 0$.*

Ví dụ 2.1.18. *Nếu hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$, khả vi trong khoảng $(a; b)$ thỏa mãn $f(a) = f(b) = 0$ thì với $\alpha \in \mathbb{R}$ sẽ có $x_0 \in (a; b)$ để $\alpha f(x_0) + f'(x_0) = 0$.*

Bài giải: Xét hàm $h(x) = e^{\alpha x}f(x)$ trên $[a; b]$. Hàm này thỏa mãn tất cả các điều kiện của Định lý Rolle. Theo Bổ đề 2.1.17, tồn tại $x_0 \in (a; b)$ thỏa mãn $h'(x_0) = 0$ hay $\alpha e^{\alpha x_0}f(x_0) + e^{\alpha x_0}f'(x_0) = 0$. Vì $e^{\alpha x_0} \neq 0$ nên $\alpha f(x_0) + f'(x_0) = 0$. □

Ví dụ 2.1.19. *Nếu hai hàm số* $f(x), g(x)$ *xác định và liên tục trên đoạn* $[a;b]$*, khả vi trong khoảng* $(a;b)$ *thỏa mãn* $f(a) = f(b) = 0$ *thì với* $\alpha \in \mathbb{R}$ *sẽ có* $x_0 \in (a;b)$ *để* $g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

Bài giải: Xét hàm $h(x) = e^{g(x)}f(x)$ trên $[a;b]$. Hàm này thỏa mãn tất cả các điều kiện của Định lý Rolle. Theo Bổ đề 2.1.17, tồn tại $x_0 \in (a;b)$ thỏa mãn $h'(x_0) = 0$ hay $g'(x_0)e^{g(x_0)}f(x_0) + e^{g(x_0)}f'(x_0) = 0$. Vì $e^{g(x_0)} \neq 0$ nên $g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0) = 0$. □

Ví dụ 2.1.20. *Giả thiết ba hàm số* $f(x), g(x), h(x)$ *xác định và liên tục trên đoạn* $[a;b]$*, khả vi trong khoảng* $(a;b)$*. Khi đó tồn tại* $x_0 \in (a;b)$ *thỏa mãn*

(i) $\begin{vmatrix} f'(x_0) & g'(x_0) & h'(x_0) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix} = 0.$

(ii) $f(b) - f(a) = (b-a)f'(x_0)$.

Bài giải: (i) Xét hàm $F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}$ trên đoạn $[a;b]$. Hiển nhiên $F(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$, khả vi trong khoảng $(a;b)$, thỏa mãn $F(a) = F(b) = 0$ và $F'(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}$. Theo Bổ đề 2.1.17, có $x_0 \in (a;b)$ để $F'(x_0) = 0$ hay $\begin{vmatrix} f'(x_0) & g'(x_0) & h'(x_0) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix} = 0.$

(ii) Với $g(x) = x, h(x) = 1$ khi $x \in [a;b]$ ta có $\begin{vmatrix} f'(x_0) & 1 & 0 \\ f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{vmatrix} = 0$ hay $f(b) - f(a) = (b-a)f'(x_0)$. □

Ví dụ 2.1.21. *Giả sử* $0 < a < b$*. Chứng minh rằng* $1 - \dfrac{a}{b} < \ln b - \ln a < \dfrac{b}{a} - 1.$

Bài giải: Xét hàm $f(x) = \ln x$ trên $[a;b]$. Theo Ví dụ 2.1.20, tồn tại $c \in (a;b)$ thỏa mãn $\ln b - \ln a = \dfrac{b-a}{c}$. Vì $a < c < b$ nên $\ln b - \ln a < \dfrac{b}{a} - 1$ và $\ln b - \ln a > 1 - \dfrac{a}{b}$. □

Hàm tiếp theo được xét đến là một đa thức bậc $n \geqslant 2$ với n nghiệm sau đây:

$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n\sigma_n.$

Mệnh đề 2.1.22. *Nếu các* $a_i \geqslant 0, i = 1, \dots, n,$ *thì ta có các bất đẳng thức*

$$\frac{\sigma_1}{\binom{n}{1}} \geqslant \sqrt{\frac{\sigma_2}{\binom{n}{2}}} \geqslant \dots \geqslant \sqrt[k]{\frac{\sigma_k}{\binom{n}{k}}} \geqslant \dots \geqslant \sqrt[n-1]{\frac{\sigma_{n-1}}{\binom{n}{n-1}}} \geqslant \sqrt[n]{\frac{\sigma_n}{\binom{n}{n}}}.$$

Chứng minh: Quy nạp theo n. Với $n = 1$ kết luận hiển nhiên đúng. Giả sử kết luận đã đúng cho $n-1$ số thực không âm. Với n ta xét đa thức

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$

có n nghiệm khong âm $a_1, \dots, a_n$ với $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Theo Bổ đề 2.1.17, đa thức $f'(x) = 0$ có $n-1$ nghiệm không âm $b_1, \dots, b_{n-1}$ với $a_i < b_i < a_{i+1}$ cho mọi i. Vậy đa thức

$$\frac{f'(x)}{n} = x^{n-1} - \frac{n-1}{n}\sigma_1 x^{n-2} + \frac{n-2}{n}\sigma_2 x^{n-3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sigma_{n-1}$$

có các đa thức đối xứng cơ bản là $\frac{n-1}{n}\sigma_1, \frac{n-2}{n}\sigma_2, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sigma_{n-1}$ của các b_j. Theo giả thiết quy nạp có

$$\frac{\frac{n-1}{n}\sigma_1}{\binom{n-1}{1}} \geqslant \sqrt{\frac{\frac{n-2}{n}\sigma_2}{\binom{n-1}{2}}} \geqslant \dots \geqslant \sqrt[k]{\frac{\frac{n-k}{n}\sigma_k}{\binom{n-1}{k}}} \geqslant \dots \geqslant \sqrt[n-1]{\frac{\frac{1}{n}\sigma_{n-1}}{\binom{n-1}{n-1}}}$$

hay $\frac{\sigma_1}{\binom{n}{1}} \geqslant \sqrt{\frac{\sigma_2}{\binom{n}{2}}} \geqslant \dots \geqslant \sqrt[k]{\frac{\sigma_k}{\binom{n}{k}}} \geqslant \dots \geqslant \sqrt[n-1]{\frac{\sigma_{n-1}}{\binom{n}{n-1}}}$. Bất đẳng thức cuối cùng $\sqrt[n-1]{\frac{\frac{a_1a_2\dots a_n}{a_1} + \frac{a_1a_2\dots a_n}{a_2} + \dots + \frac{a_1a_2\dots a_n}{a_n}}{n}} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$. Bất đẳng thức này đúng theo Bất đẳng thức Cauchy. □

Chú ý 2.1.23. *Các kết quả trên vẫn đúng khi có một số* a_i *bằng nhau.*

Ví dụ 2.1.24. *Với các số dương* a, b, c, d, e *ta có các bất đẳng thức sau đây:*

(i) $\sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}.$

(ii) $\sqrt{\dfrac{ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de}{10}} \geqslant$
$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde}{10}}.$$

Bài giải: Suy ra từ Mệnh đề 2.1.22 với $n=4, n=5$ và σ_2, σ_3, tương ứng. □

Ví dụ 2.1.25. *Chứng minh rằng nếu* $f(x)=x^4+ax^3+bx+c \in \mathbb{R}[x]$ *có 4 nghiệm thực phân biệt thì* $ab<0$.

Bài giải: Khi $f(x)=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt thì $g(x)=4x^3+3ax^2+b$ sẽ có 3 nghiệm thực phân biệt theo Bổ đề 2.1.17. Điều này tương đương với điều kiện $g_{\max}.g_{\min}<0$ hay $ab<0$. □

Hàm lồi

Tiếp tục, ta sẽ xét hàm lồi và chứng minh Bất đẳng thức Jensen và hệ quả.

Định nghĩa 2.1.26. Hàm số $y=f(x)$ được gọi là *hàm lồi*, (xuống phía dưới), trong khoảng $(a;b)$ nếu với mọi $a<x_1,x_2<b$ và mọi $\alpha\in(0;1)$ luôn có bất đẳng thức:
$$\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\geqslant f\big(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\big).$$

Mệnh đề 2.1.27. *Giả sử* $y=f(x)$ *xác định và liên tục trong* $(a;b)$ *với* $a<b$. *Hàm* $y=f(x)$ *là lồi trong khoảng* $(a;b)$ *khi và chỉ khi* $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ *hoặc* $\begin{vmatrix}1 & x_1 & f(x_1)\\ 1 & x & f(x)\\ 1 & x_2 & f(x_2)\end{vmatrix}\geqslant 0$ *với mọi* $x_1,x,x_2\in(a;b)$ *thỏa mãn* $x_1<x<x_2$.

Chứng minh: Giả sử $y=f(x)$ là hàm lồi trong khoảng $(a;b)$. Với $x_1,x,x_2\in(a;b), x_1<x<x_2$, có biểu diễn
$$x=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2, f(x)\leqslant\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2).$$
Như vậy có bất đẳng thức $(x_2-x)f(x_1)+(x_1-x_2)f(x)+(x-x_1)f(x_2)\geqslant 0$ hay biểu diễn dạng $\begin{vmatrix}1 & x_1 & f(x_1)\\ 1 & x & f(x)\\ 1 & x_2 & f(x_2)\end{vmatrix}\geqslant 0$. Điều ngược lại là hiển nhiên. □

Mệnh đề 2.1.28. *Giả sử* $y = f(x)$ *xác định và liên tục trong khoảng* $(a; b)$ *và có đạo hàm hữu hạn* $f'(x)$. *Khi đó* $y = f(x)$ *là hàm lồi nếu và chỉ nếu* $f'(x)$ *là hàm không giảm trong* $(a; b)$.

Chứng minh: Giả sử $y = f(x)$ là hàm lồi trong khoảng $(a; b)$. Với $x_1, x, x_2 \in (a; b), x_1 < x < x_2$, có hai biểu diễn sau đây: $x = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2$ và $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$. Khi đó $f'(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \lim\limits_{x \to x_2} \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x_2} = f'(x_2)$. Như vậy $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$. Ngược lại, giả thiết $f'(x)$ là hàm không giảm trong $(a; b)$. Với $x_1, x, x_2 \in (a; b), x_1 < x < x_2$ ta có $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\alpha)$ và $\dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\beta)$, trong đó $x_1 < \alpha < x < \beta < x_2$. Vì $f'(\alpha) \leqslant f'(\beta)$ suy ra $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$. Vậy $y = f(x)$ là hàm lồi theo Mệnh đề 2.1.27. □

Từ Mệnh đề 2.1.28 suy ra ngay kết quả dưới đây:

Định lý 2.1.29. *Giả thiết* $y = f(x)$ *xác định và liên tục trong khoảng* I. *Giả sử* $f(x)$ *có đạo hàm* $f'(x)$ *cũng liên tục và có* $f"(x)$ *hữu hạn trong khoảng* I. *Khi đó* $y = f(x)$ *là hàm lồi nếu và chỉ nếu* $f"(x) \geqslant 0$ *trong* I.

Định lý 2.1.30. [Jensen] *Nếu* $y = f(x)$ *là hàm lồi trong khoảng* $(a; b)$ *thì với mọi* $a_1, \ldots, a_n \in (a; b)$ *và mọi số thực* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0, \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1, n \geqslant 2$, *ta luôn có bất đẳng thức dưới đây:*

$$\alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \cdots + \alpha_n f(a_n) \geqslant f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n).$$

Chứng minh: Quy nạp theo n. Với $n = 2$ kết luận hiển nhiên đúng theo định nghĩa. Giả sử kết luận đã đúng cho $n \geqslant 2$. Xét $n+1$ điểm $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in (a; b)$ và các số thực $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \geqslant 0, \sum\limits_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$ và $\alpha_{n+1} > 0$. Đặt $b_n = \dfrac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1}}a_n + \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n + \alpha_{n+1}}a_{n+1} \in (a; b)$. Theo giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} & f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_{n-1}a_{n-1} + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1}a_{n+1}) \\ = \; & f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_{n-1}a_{n-1} + (\alpha_n + \alpha_{n+1})b_n) \\ \geqslant \; & \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \cdots + \alpha_{n-1} f(a_{n-1}) + (\alpha_n + \alpha_{n+1}) f(b_n). \end{aligned}$$

Vì $f(b_n) = f(\frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} a_n + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} a_{n+1}) \geqslant \frac{\alpha_n f(a_n)}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} + \frac{\alpha_{n+1} f(a_{n+1})}{\alpha_n + \alpha_{n+1}}$ nên $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(a_k) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n+1} f(\alpha_k a_k)$. Như vậy định lý đã được chứng minh. □

Chú ý 2.1.31. *Đối với các hàm số lõm ta có dấu bất đẳng thức ngược lại.*

Ví dụ 2.1.32. *Giả thiết số nguyên* $n \geqslant 2$. *Chứng minh bất đẳng thức sau:*

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{3^k - 1}{3^{k-1}} \leqslant \Big(3 - \frac{3}{2n} + \frac{3}{2n.3^n}\Big)^n.$$

Bài giải: Vì $f(x) = \ln x, x > 0$, là hàm lồi nên theo Định lý 2.1.30 có

$$\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{3^k - 1}{3^{k-1}}\Big) \leqslant \ln\Big[\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k - 1}{3^{k-1}}\Big)\Big] = \ln\Big(3 - \frac{3}{2n} + \frac{3}{2.3^n}\Big).$$

Từ đây ta suy ra bất đẳng thức $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{3^k - 1}{3^{k-1}} \leqslant \Big(3 - \frac{3}{2n} + \frac{3}{2n.3^n}\Big)^n$. □

Hệ quả 2.1.33. *Với* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0, \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ *và* $n \geqslant 2$, *ta luôn có các bất đẳng thức dưới đây:*

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_k \geqslant \prod\limits_{k=1}^{n} a_k^{\alpha_k}$.

(ii) $\prod\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{\alpha_k} \geqslant \prod\limits_{k=1}^{n} a_k^{\alpha_k} + \prod\limits_{k=1}^{n} b_k^{\alpha_k}$.

(iii) $\prod\limits_{k=1}^{m} \Big(\sum\limits_{j=1}^{m} a_{kj}\Big)^{\alpha_k} \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \prod\limits_{k=1}^{n} a_{kj}^{\alpha_k}$ *với mọi* $a_{kj} \geqslant 0$.

(iv) **[Cauchy]** $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \geqslant n \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k}$.

Chứng minh: (i) Xét hàm lõm $f(x) = \ln x$. Theo Định lý 2.1.30 ta có $\ln\Big(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k^{\alpha_k}\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \ln a_k \leqslant \ln\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_k\Big)$. Do đó $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k^{\alpha_k} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_k$.

(ii) Do $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\dfrac{a_k}{a_k+b_k}\geqslant\prod\limits_{k=1}^{n}\Big(\dfrac{a_k}{a_k+b_k}\Big)^{\alpha_k},\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\dfrac{b_k}{a_k+b_k}\geqslant\prod\limits_{k=1}^{n}\Big(\dfrac{b_k}{a_k+b_k}\Big)^{\alpha_k}$ theo (i) nên sau khi cộng hai vế được $1\geqslant\prod\limits_{k=1}^{n}\Big(\dfrac{a_k}{a_k+b_k}\Big)^{\alpha_k}+\prod\limits_{k=1}^{n}\Big(\dfrac{b_k}{a_k+b_k}\Big)^{\alpha_k}$. Quy đồng được $\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{\alpha_k}\geqslant\prod\limits_{k=1}^{n}a_k^{\alpha_k}+\prod\limits_{k=1}^{n}b_k^{\alpha_k}$.

(iii) Sử dụng (ii) để quy nạp theo m sẽ được (iii). Với $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=\dfrac{1}{n}$, từ (i) suy ra (iv). □

Ví dụ 2.1.34. *Giả thiết số nguyên $n\geqslant 3$. Chứng minh rằng, nếu $a_k,b_k,c_k\geqslant 0$ với $k=1,2,\ldots,n$, thì*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k+c_k)}\geqslant\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_k}+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}c_k}.$$

Bài giải: Kết quả được suy ra từ Hệ quả 2.1.33 (iii). □

Ví dụ 2.1.35. *Chứng minh $a^3+b^3+c^3\geqslant a+b+c$ khi $a,b,c>0,abc=1$. Đặc biệt, khi $x,y,z\in\mathbb{R},x+y+z=0$, có $8^x+8^y+8^z\geqslant 2^x+2^y+2^z$.*

Bài giải: Vì $\begin{cases}a^3+1+1\geqslant 3\sqrt[3]{a^3.1.1}=3a\\ b^3+1+1\geqslant 3\sqrt[3]{b^3.1.1}=3b\\ c^3+1+1\geqslant 3\sqrt[3]{c^3.1.1}=3c\end{cases}$ theo Hệ quả 2.1.33 (iv) nên từ $3(a^3+b^3+c^3)=(a^3+b^3+c^3)+2(a^3+b^3+c^3)\geqslant a^3+b^3+c^3+6abc$ ta suy ra $a^3+b^3+c^3\geqslant a+b+c$. □

Ví dụ 2.1.36. *Chứng minh rằng nếu $a,b,c>0$ và $a+b+c=abc$ thì*

$$T=\frac{a}{\sqrt{bc(1+a^2)}}+\frac{b}{\sqrt{ca(1+b^2)}}+\frac{c}{\sqrt{ab(1+c^2)}}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Bài giải: Ta có $\dfrac{a}{\sqrt{bc(1+a^2)}}=\dfrac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\leqslant\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{a}{a+c}\Big)$, $\dfrac{b}{\sqrt{ca(1+b^2)}}\leqslant\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{b}{b+a}\Big)$, $\dfrac{c}{\sqrt{ab(1+c^2)}}\leqslant\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{c}{c+a}+\dfrac{c}{c+b}\Big)$ theo Hệ quả 2.1.33. Cộng ba bất đẳng thức lại, ta nhận được $T\leqslant\dfrac{3}{2}$. □

Ví dụ 2.1.37. *Chứng minh rằng nếu* $a, b, c > 0$ *và* $a+b > c$, $b+c > a$, $c+a > b$, *thì*

$$P = \Big(1 + \frac{b-c}{a}\Big)^a . \Big(1 + \frac{c-a}{b}\Big)^b . \Big(1 + \frac{a-b}{c}\Big)^c \leqslant 1.$$

Bài giải: Theo Hệ quả 2.1.33, ta suy ra ngay bất đẳng thức $P^{\dfrac{1}{a+b+c}} =$

$$\Big(1 + \frac{b-c}{a}\Big)^{\dfrac{a}{a+b+c}} . \Big(1 + \frac{c-a}{b}\Big)^{\dfrac{b}{a+b+c}} . \Big(1 + \frac{a-b}{c}\Big)^{\dfrac{c}{a+b+c}}$$
$$\leqslant \frac{1}{a+b+c}\Big[a\Big(1 + \frac{b-c}{a}\Big) + b\Big(1 + \frac{c-a}{b}\Big) + c\Big(1 + \frac{a-b}{c}\Big)\Big] = 1.$$

Vậy $\Big(1 + \frac{b-c}{a}\Big)^a . \Big(1 + \frac{c-a}{b}\Big)^b . \Big(1 + \frac{a-b}{c}\Big)^c \leqslant 1.$ □

Ví dụ 2.1.38. *Chứng minh rằng với mọi tam giác* ABC *ta luôn có*

(i) $\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

(ii) $\sin A \sin B \sin C \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Bài giải: Vì $y = \sin x$ với $0 < x < \pi$ là hàm lồi nên $\sin A + \sin B + \sin C \leqslant 3 \sin \dfrac{A+B+C}{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $\sin A \sin B \sin C \leqslant \sin^3 \dfrac{A+B+C}{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. □

Ví dụ 2.1.39. *Cho tam giác* ABC *và điểm tùy ý* M. *Ký hiệu khoảng cách từ* M *đến ba cạnh là* α, β, γ *và* $x = MA, y = MB, z = MC$. *Khi đó luôn có*

(i) $x \sin \dfrac{A}{2} + y \sin \dfrac{B}{2} + z \sin \dfrac{C}{2} \geqslant \alpha + \beta + \gamma$.

(ii) $xyz \geqslant (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$.

Bài giải: (i) Vì $y = \sin x$ với $0 < x < \pi$ là hàm lồi nên $\beta + \gamma = x(\sin A_1 + \sin A_2 \leqslant 2x \sin \dfrac{A}{2}$. Tương tự $\gamma + \alpha \leqslant 2y \sin \dfrac{B}{2}, \alpha + \beta \leqslant 2z \sin \dfrac{C}{2}$. Vậy $x \sin \dfrac{A}{2} + y \sin \dfrac{B}{2} + z \sin \dfrac{C}{2} \geqslant \alpha + \beta + \gamma$.

(ii) Vì $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \leqslant 8xyz \sin \dfrac{A}{2} \sin \dfrac{B}{2} \leqslant xyz$ theo Ví dụ 2.1.40 nên $xyz \geqslant (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$. □

Ví dụ 2.1.40. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có*

(i) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{2}$.

(ii) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$.

(iii) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(iv) $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}$.

Bài giải: (i) Vì $y=\sin x$ với $0<x<\pi$ là hàm lồi nên $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leqslant 3\sin\frac{A+B+C}{6}=\frac{3}{2}$. (ii) suy từ (i) qua Bất đẳng thức Cauchy.
(iii) Vì $y=\cos x$ với $0<x<\frac{\pi}{2}$ là hàm lồi nên $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leqslant 3\cos\frac{A+B+C}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
(iv) Vì $y=\tan x$ với $0<x<\frac{\pi}{2}$ là hàm lõm nên $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqslant 3\tan\frac{A+B+C}{6}=\sqrt{3}$. □

Ví dụ 2.1.41. *Giả thiết các hàm $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ xác định dương và liên tục trên đoạn $[0;1]$ với $\int\limits_0^1 f_k(x)dx=a_k$ với $k=1,2,\ldots,n$. Chứng minh rằng có điểm $x_0\in[0;1]$ để $f_1(x_0)f_2(x_0)\ldots f_n(x_0)\leqslant a_1a_2\ldots a_n$.*

Bài giải: Đặt $g_k(x)=\frac{f_k(x)}{a_k}$. Khi đó $\int\limits_0^1 g_k(x)dx=1$ với $k=1,2,\ldots,n$. Theo Hệ quả 2.1.33 (iv) có

$$\int\limits_0^1\sqrt[n]{g_1(x)g_2(x)\ldots g_n(x)}dx\leqslant\int\limits_0^1\frac{g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_n(x)}{n}dx=1.$$

Từ bất đẳng thức này suy ra có $x_0\in[0;1]$ để $\sqrt[n]{g_1(x_0)g_2(x_0)\ldots g_n(x_0)}\leqslant 1$ hay $f_1(x_0)f_2(x_0)\ldots f_n(x_0)\leqslant a_1a_2\ldots a_n$. □

Hệ quả 2.1.42. *Cho mọi* $a_k, b_k \geqslant 0$ *và* $\alpha_k, \beta_k > 0, \alpha_k + \beta_k = 1,$ *với* $k = 1, \ldots, n,$ *ta luôn có bất đẳng thức* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_k^{\frac{1}{\alpha_k}} + \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k b_k^{\frac{1}{\beta_k}}.$

Chứng minh: Theo Hệ quả 2.1.33 (i), thế $a_k^{\alpha_k}$ qua a_k và $b_k^{\beta_k}$ qua b_k hay a_k qua $a_k^{\frac{1}{\alpha_k}}$ và b_k qua $b_k^{\frac{1}{\alpha_k}}$ ta được $\left(a_k^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)^{\alpha_k} b_k^{\frac{1}{\beta_k}}\Big)^{\beta_k} \leqslant \alpha_k a_k^{\frac{1}{\alpha_k}} + \beta_k b_k^{\frac{1}{\beta_k}}$ và như vậy có $a_k b_k \leqslant \alpha_k a_k^{\frac{1}{\alpha_k}} + \beta_k b_k^{\frac{1}{\beta_k}}, k = 1, \ldots, n.$ Cộng tất cả các bất đẳng thức này lại, ta được $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_k^{\frac{1}{\alpha_k}} + \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k b_k^{\frac{1}{\beta_k}}.$ □

Định lý 2.1.43. *Cho mọi* $a_k, b_k \geqslant 0$ *với* $k = 1, \ldots, n,$ *và* $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1,$ *ta luôn có các bất đẳng thức*

(i) **[Cauchy-Holder]** $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left[\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha} . \left[\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\beta}.$

(ii) **[Bunhiakowski]** $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sqrt{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right] . \left[\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2\right]}.$

(iii) **[Minkowski]** $\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \Big(a_k + b_k\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha} \leqslant \left[\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha} + \left[\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha}.$ *Từ đó suy ra* $\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \Big(\sum\limits_{i=1}^{s} a_{ik}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{s} \left[\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha}$ *với mọi* $a_{ik} \geqslant 0$ *và số nguyên* $s \geqslant 1.$

Chứng minh: (i) Thay các $\alpha_k = \alpha, \beta_k = \beta$ và a_k qua $\dfrac{a_k}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha}}$ và b_k

qua $\dfrac{b_k}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\beta}}$ vào Hệ quả 2.1.42 có $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left[\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha} + \left[\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\beta}$ do

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha}} \frac{b_k}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\beta}} \leqslant \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{\frac{1}{\alpha}}}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{\alpha}}\right]} + \beta \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^{\frac{1}{\beta}}}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{\beta}}\right]} = 1.$$

(ii) Với $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$, từ (i) ta suy ra (ii).

(iii) Do $\sum\limits_{k=1}^{n} \Big(a_k + b_k\Big)^{\frac{1}{\alpha}} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \Big(a_k + b_k\Big)^{\frac{1}{\alpha}-1} + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \Big(a_k + b_k\Big)^{\frac{1}{\alpha}-1}$ nên

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \Big(a_k + b_k\Big)^{\frac{1}{\alpha}} &\leqslant \Big[\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{\alpha}}\Big]^{\alpha} . \Big[\sum_{k=1}^{n} \Big(a_k + b_k\Big)^{(\frac{1}{\alpha}-1)\frac{1}{\beta}}\Big]^{\beta} \\
&+ \Big[\sum_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{\alpha}}\Big]^{\alpha} . \Big[\sum_{k=1}^{n} \Big(a_k + b_k\Big)^{(\frac{1}{\alpha}-1)\frac{1}{\beta}}\Big]^{\beta} \\
&\leqslant \Big[\Big[\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{\alpha}}\Big]^{\alpha} + \Big[\sum_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{\alpha}}\Big]^{\alpha}\Big] \Big[\sum_{k=1}^{n} \Big(a_k + b_k\Big)^{(\frac{1}{\alpha}-1)\frac{1}{\beta}}\Big]^{\beta} \\
&= \Big[\Big[\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{\alpha}}\Big]^{\alpha} + \Big[\sum_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{\alpha}}\Big]^{\alpha}\Big] \Big[\sum_{k=1}^{n} \Big(a_k + b_k\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big]^{\beta}.
\end{aligned}$$

Vậy ta có bất đẳng thức $\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \Big(a_k + b_k\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha} \leqslant \left[\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha} + \left[\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha}$. Qua quy nạp theo s suy ra $\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \Big(\sum\limits_{i=1}^{s} a_{ik}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{s} \left[\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha}$ với mọi $a_{ik} \geqslant 0$ và số nguyên $s \geqslant 1$. □

Chú ý 2.1.44. *Khi* $\alpha > 1$ *ta có* $\Big[\sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\sum\limits_{i=1}^{s} a_{ik}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big]^{\alpha} \geqslant \sum\limits_{i=1}^{s}\Big[\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^{\frac{1}{\alpha}}\Big]^{\alpha}$ *với mọi* $a_{ik} \geqslant 0$ *và số nguyên* $s \geqslant 1$.

Ví dụ 2.1.45. *Chứng minh rằng, với* $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$ *ta có bất đẳng thức*

$$\Big(1+\frac{a_1^4}{a_2^2}\Big)\Big(1+\frac{a_2^4}{a_3^2}\Big)\ldots\Big(1+\frac{a_{n-1}^4}{a_n^2}\Big)\Big(1+\frac{a_n^4}{a_1^2}\Big) \geqslant \prod_{k=1}^{n}\big(1+a_k^2\big).$$

Bài giải: Đặt $a_{n+1} = a_1$. Bởi vì $\big(1+a_{k+1}^2\big)\Big(1+\dfrac{a_k^4}{a_{k+1}^2}\Big) \geqslant \big(1+a_k^2\big)^2$ theo Định lý 2.1.43 với $k = 1, 2, \ldots, n$, nên sau khi nhân n bất đẳng thức này ta được $\Big(1+\dfrac{a_1^4}{a_2^2}\Big)\Big(1+\dfrac{a_2^4}{a_3^2}\Big)\ldots\Big(1+\dfrac{a_{n-1}^4}{a_n^2}\Big)\Big(1+\dfrac{a_n^4}{a_1^2}\Big) \geqslant \prod\limits_{k=1}^{n}\big(1+a_k^2\big)$. □

Hàm tùy chọn

Khảo sát hàm số $f(x) = x^{\alpha} - \alpha x$ với các kết quả sau đây:

Mệnh đề 2.1.46. *Với* $x \geqslant 0$ *ta sẽ có các bất đẳng thức sau đây:*

(i) $x^{\alpha} \geqslant \alpha x + 1 - \alpha$ *khi* $\alpha > 1$. *Đặc biệt, với* $x = 1 + a \geqslant 0$ *có* $(1+a)^{\alpha} \geqslant 1 + a\alpha$ **[Bernoulli]**.

(ii) $x^{\alpha} \leqslant \alpha x + 1 - \alpha$ *khi* $0 < \alpha < 1$.

Ví dụ 2.1.47. *Chứng minh rằng, nếu* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ *và* $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ *thì với mọi số thực* $u_1, u_2, u_3 \geqslant 0$ *có bất đẳng thức*

$$u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}u_3^{\alpha_3} \leqslant \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3.$$

Bài giải: Từ $x^{\alpha} \leqslant \alpha x + 1 - \alpha$ khi $0 < \alpha < 1$, theo Mệnh đề 2.1.46, và thay $x = \dfrac{p}{q}$ ta được $p^{\alpha}q^{1-\alpha} \leqslant \alpha p + (1-\alpha)q$, trong đó $p, q > 0$. Với $\beta = 1 - \alpha$ và $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$, có $p^{\alpha}q^{\beta} \leqslant \alpha p + \beta q$. Với $p = u_1, \alpha = \alpha_1$ và $q = u_2^{\alpha_2}u_3^{\alpha_3}, \alpha_2 + \alpha_3 = \beta$, được $u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}u_3^{\alpha_3} \leqslant \alpha_1 u_1 + \beta u_2^{\frac{\alpha_2}{\beta}}u_3^{\frac{\alpha_3}{\beta}}$. Vì $u_2^{\frac{\alpha_2}{\beta}}u_3^{\frac{\alpha_3}{\beta}} \leqslant \dfrac{\alpha_2}{\beta}u_2 + \dfrac{\alpha_3}{\beta}u_3$ nên $u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}u_3^{\alpha_3} \leqslant \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$. □

Chú ý 2.1.48. *Xem chứng minh cho trường hợp tổng quát trong Hệ quả 2.1.33.*

Ví dụ 2.1.49. *Chứng minh, nếu* $a > 0$ *và* $0 < b < 1$ *thì* $a^b > \dfrac{a}{a+b}$.

Bài giải: Đặt $c = \dfrac{1}{b} > 1$. Khi đó $\left(1 + \dfrac{b}{a}\right)^c > 1 + c.\dfrac{b}{a}$ theo Mệnh đề 2.1.46. Vậy $\left(1 + \dfrac{b}{a}\right)^c > 1 + \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{a}$ hay $\dfrac{\left(a+b\right)^c}{a^c} > \dfrac{1}{a}$. Do đó $\dfrac{a+b}{a} > \dfrac{1}{a^b}$. Dễ dàng suy ra $a^b > \dfrac{a}{a+b}$. □

Ví dụ 2.1.50. *Chứng minh rằng với các số* $a_1, \dots, a_n \in (0; 1]$ *ta luôn có* $P = (1 + a_1)^{\dfrac{1}{a_2}} (1 + a_2)^{\dfrac{1}{a_3}} \cdots (1 + a_n)^{\dfrac{1}{a_1}} \geqslant 2^n$.

Bài giải: Theo Mệnh đề 2.1.46, $P \geqslant (1+\dfrac{a_1}{a_2})(1+\dfrac{a_2}{a_3}) \cdots (1+\dfrac{a_n}{a_1}) \geqslant 2^n$. □

Ví dụ 2.1.51. *Với các số* $a_1, \dots, a_n > 0, n > 1,$ *có* $T = (a_2+a_3+\cdots+a_n)^{a_1} + (a_1 + a_3 + \cdots + a_n)^{a_2} + \cdots + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})^{a_n} > n - 1$. *Đặc biệt, với* $a, b, c > 0$ *có* $(a + b)^c + (b + c)^a + (c + a)^b > 2$.

Bài giải: Nếu có $a_i \geqslant 1$, chẳng hạn $a_1 \geqslant 1$, thì $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{a_k} \geqslant 1$ với $k = 2, 3, \dots, n$. Do đó $T > n - 1$.
Nếu $0 < a_k < 1, \forall k$, thì theo Ví dụ 2.1.49, $T > \dfrac{a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + \dfrac{a_1 + a_3 + \cdots + a_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + \cdots + \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} = n - 1$. □

Ví dụ 2.1.52. *Với các số* $a_1, \dots, a_n > 0, n > 1,$ *và* $T = a_2 + \cdots + a_n$ *có*

$$\frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{\sqrt{a_2}} + \frac{a_3}{\sqrt[3]{a_3}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_n}} \leqslant (1 + \sqrt{T})^2.$$

Bài giải: Bất đẳng thức tương đương $\sum\limits_{k=2}^{n} a_k^{1-\dfrac{1}{k}} \leqslant 2\sqrt{T} + T$. Trong khoảng $(0; +\infty)$, hàm $f(x) = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}} - x^{\frac{1}{2}}$ có $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Big(\dfrac{k-2}{k\sqrt[k]{x}} - 1\Big)$. Dễ dàng suy ra $f(x)_{ln} = f\Big[\Big(\dfrac{k-2}{k}\Big)^k\Big] = 2k^{-\frac{k}{2}}\Big(k-2\Big)^{\frac{k}{2}-1} := 2\alpha_k$. Như vậy ta có các bất đẳng thức $a_k^{1-\frac{1}{k}} \leqslant 2\alpha_k\sqrt{a_k} + a_k$ với $k = 2, \ldots, n$. Từ đó suy ra

$$\sum_{k=2}^{n} a_k^{1-\frac{1}{k}} \leqslant 2\sum_{k=2}^{n} \alpha_k\sqrt{a_k} + \sum_{k=2}^{n} a_k.$$

Vì $\sum\limits_{k=2}^{n} \alpha_k\sqrt{a_k} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k=2}^{n} \alpha_k^2}\sqrt{\sum\limits_{k=2}^{n} a_k}$ theo Định lý 2.1.43 (ii) và còn vì $\alpha_k^2 = k^{-k}\Big(k-2\Big)^{k-2} = \Big(\dfrac{k-2}{k}\Big)^{k-2}\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{(k-1)k}$ nên

$$\sum_{k=2}^{n} a_k^{1-\frac{1}{k}} \leqslant 2\Big(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k}\Big)\sqrt{\sum_{k=2}^{n} a_k} + \sum_{k=2}^{n} a_k < 2\sqrt{\sum_{k=2}^{n} a_k} + \sum_{k=2}^{n} a_k.$$

Tóm lại $\dfrac{a_1}{a_1} + \dfrac{a_2}{\sqrt{a_2}} + \dfrac{a_3}{\sqrt[3]{a_3}} + \cdots + \dfrac{a_n}{\sqrt[n]{a_n}} \leqslant (1 + \sqrt{T})^2.$ □

Ví dụ 2.1.53. *Chứng minh rằng với các số thực* $a, b, c \geqslant 1$ *có bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1.$$

Bài giải: Không hạn chế có thể giả thiết $1 \geqslant a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{b+c+1} + \dfrac{b}{c+x+1} + \dfrac{c}{b+x+1} + (1-x)(1-b)(1-c)$ với $f'(x) = \dfrac{1}{b+c+1} - \dfrac{b}{(c+x+1)^2} - \dfrac{c}{(x+b+1)^2} - (1-b)(1-c)$ là hàm đơn điệu tăng. Do đó $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại 0 hoặc 1. Do vậy $f(a) \leqslant \max\{f(1), f(0)\}$. Vì $f(1) \leqslant \dfrac{1}{b+c+1} + \dfrac{b}{c+b+1} + \dfrac{c}{b+1+1}1$ và $f(0) = \dfrac{b}{c+1} + \dfrac{c}{b+1} + (1-b)(1-c) = \dfrac{1+b+c+b^2c^2}{1+b+c+bc} = 1$ nên $f(a) \leqslant 1.$ □

Ví dụ 2.1.54. *Chứng minh rằng với các số* $a, b, c, d \in [0; 1]$ *luôn có*

(i) $\dfrac{a}{bc+1} + \dfrac{b}{ca+1} + \dfrac{c}{ab+1} \leqslant 2.$

(ii) $$\frac{a}{bcd+2}+\frac{b}{cda+2}+\frac{c}{dab+2}+\frac{d}{abc+2}\leqslant 1+\frac{1}{abcd+2}.$$

Bài giải: (i) Không hạn chế có thể giả thiết $1\geqslant a\geqslant b\geqslant c\geqslant 0$. Xét $f(x)=\frac{x}{bc+1}+\frac{b}{cx+1}+\frac{c}{bx+1}$ với $f'(x)=\frac{1}{bc+1}-\frac{bc}{(cx+1)^2}-\frac{bc}{(bx+1)^2}$. Khi $x\geqslant b\geqslant c\geqslant 0$ có $\frac{bc}{(cx+1)^2}\leqslant\frac{bc}{(bc+1)^2},\ \frac{bc}{(bx+1)^2}\leqslant\frac{bc}{(bc+1)^2}$. Như vậy

$$f'(x)\geqslant\frac{1}{bc+1}-\frac{2bc}{(bc+1)^2}=\frac{1-bc}{(bc+1)^2}\geqslant 0.$$

Hàm số $f(x)$ đồng biến khi $x\geqslant b$. Từ đó suy ra $f(1)\geqslant f(a)$ hay

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1}\leqslant\frac{1}{bc+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{b+1}.$$

Ta suy ra $\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1}\leqslant\frac{1}{bc+1}+\frac{b^2+c^2+b+c}{(c+1)(b+1)}$. Bởi vì $(1-b)(1-c)\geqslant 0$ nên $1+bc\geqslant b+c$ và ta được $\frac{1}{bc+1}+\frac{b^2+c^2+b+c}{(c+1)(b+1)}\leqslant\frac{1}{bc+1}+\frac{b+c+b+c}{2(b+c)}\leqslant 2$. Tóm lại: $\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1}\leqslant 2$.

(ii) Không hạn chế có thể giả thiết $1\geqslant a\geqslant b\geqslant c\geqslant d\geqslant 0$. Xét hàm số $f(x)=\frac{x}{bcd+2}+\frac{b}{cdx+2}+\frac{c}{bdx+2}+\frac{d}{bcx+2}$ với $x\geqslant b$ và có đạo hàm $f'(x)=\frac{1}{bcd+2}-\frac{bcd}{(cdx+2)^2}-\frac{bcd}{(bdx+2)^2}-\frac{bcd}{(cdx+2)^2}$. Khi $x\geqslant b$ ta có

$$f'(x)\geqslant\frac{1}{bcd+2}-\frac{3bcd}{(bcd+2)^2}=\frac{2-2bcd}{(bcd+2)^2}\geqslant 0.$$

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến khi $x\geqslant b$. Từ đó suy ra $f(1)\geqslant f(a)$ hay

$$\begin{aligned}S &= \frac{a}{bcd+2}+\frac{b}{cda+2}+\frac{c}{dab+2}+\frac{d}{abc+2}\\ &\leqslant \frac{1}{bcd+2}+\frac{b}{cd+2}+\frac{c}{db+2}+\frac{d}{bc+2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\leqslant \frac{1}{bcd+2}+\frac{b}{c+d+1}+\frac{c}{b+d+1}+\frac{d}{b+c+1}\\ &\leqslant \frac{1}{bcd+2}+\frac{b}{c+d+b}+\frac{c}{d+b+c}+\frac{d}{b+c+d}\\ &= \frac{1}{bcd+2}+1\leqslant \frac{1}{abcd+2}+1. \end{aligned}$$

Tóm lại: $\frac{a}{bcd+2}+\frac{b}{cda+2}+\frac{c}{dab+2}+\frac{d}{abc+2}\leqslant 1+\frac{1}{abcd+2}$. □

Ví dụ 2.1.55. *Chứng minh rằng với các số thực* $a, b, c \geqslant 1$ *có bất đẳng thức*

(i) $\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\geqslant \frac{3}{1+abc}$.

(ii) $\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}\geqslant \frac{3}{2+abc}$.

Bài giải: (i) Do $a, b, c \geqslant 1$ nên $(a-1)(b-1)(c+1)\geqslant 0$ và từ đây suy ra $1+abc\geqslant a+b-c+ac+bc-ab$. Tương tự, ta còn có:

$$1+abc\geqslant b+c-a+ac+ab-bc, 1+abc\geqslant c+a-b+bc+ab-ca.$$

Cộng ba bất đẳng thức, vế theo vế, ta được

$$3+3abc\geqslant ab+a+bc+b+ca+c.$$

Từ $\Big(3+3abc\Big)\Big(\frac{1}{ab+a}+\frac{1}{bc+b}+\frac{1}{ca+c}\Big)\geqslant$

$$\Big(ab+a+bc+b+ca+c\Big)\Big(\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\Big)\geqslant 9$$

ta suy ra $\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\geqslant \frac{3}{1+abc}$.

(ii) Như trên có $\begin{cases} 2+abc\geqslant a+b-c+ac+bc-ab+1\\ 2+abc\geqslant b+c-a+ac+ab-bc+1\\ 2+abc\geqslant c+a-b+bc+ab-ca+1. \end{cases}$ Cộng ba bất đẳng thức, vế theo vế, ta được $6+3abc\geqslant ab+a+bc+b+ca+c+3$. Vì

$$\begin{aligned} &\Big(6+3abc\Big)\Big(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}\Big)\geqslant\\ &\Big(ab+a+1+bc+b+1+ca+c+1\Big)\\ &\Big(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}\Big)\geqslant 9 \end{aligned}$$

nên $\dfrac{1}{ab+a+1}+\dfrac{1}{bc+b+1}+\dfrac{1}{ca+c+1}\geqslant\dfrac{3}{2+abc}$. □

Ví dụ 2.1.56. *Chứng minh rằng với các số thực* $a>b>c$ *và* $\sqrt{q}+\sqrt{r}\geqslant\sqrt{p}$ *có bất đẳng thức*

$$q(a-b)(a-c)+p(b-a)(b-c)+r(c-a)(c-b)\geqslant 0.$$

Bài giải: Bất đẳng thức tương đương $p\leqslant q\dfrac{a-c}{b-c}+r\dfrac{a-c}{a-b}$. Xét hàm số $f(x)=q\dfrac{a-c}{x-c}+r\dfrac{a-c}{a-x}$ có $f'(x)=(a-c)\Big(\dfrac{r}{(a-x)^2}-\dfrac{q}{(x-c)^2}\Big)$ với $a>x>c$. $f'(x)=0$ có nghiệm $x_0=\dfrac{a\sqrt{q}+c\sqrt{r}}{\sqrt{q}+\sqrt{r}}\in(c;a)$. Qua việc ét dấu của $f'(x)$ suy ra $f(b)\geqslant f_{nn}=f(x_0)=\Big(\sqrt{q}+\sqrt{r}\Big)^2\geqslant p$. □

Ví dụ 2.1.57. *Với các số nguyên dương* $m,n,m\geqslant n$, *có bất đẳng thức*

$$2^n n!\leqslant\frac{(m+n)!}{(m-n)!}\leqslant(m^2+m)^n.$$

Bài giải: Ta có $\dfrac{(m+n)!}{(m-n)!}=(m+n)(m+n-1)\ldots(m-n+1)$. Với $x\geqslant 1$ có $(m+x)(m+1-x)\leqslant m(m+1)$, tự kiểm tra, Như vậy $\dfrac{(m+n)!}{(m-n)!}=(m+n)(m+1-n)(m+n-1)(m+1-(n-1))\ldots\leqslant(m^2+m)^n$. Ta lại có $(m+x)(m+1-x)\geqslant 2x$ với $x\leqslant n$, tự kiểm tra, nên $\dfrac{(m+n)!}{(m-n)!}=(m+n)(m+1-n)(m+n-1)(m+1-(n-1))\ldots\geqslant 2^n n!$. □

2.2 Bất đẳng thức với dãy không giảm

Mệnh đề 2.2.1. *Cho hai dãy không giảm* $0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{n-1}\leqslant a_n$ *và* $0\leqslant b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_{n-1}\leqslant b_n$. *Với bất kỳ phép hoán vị* $\pi\in S_n$ *ta có*

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_{\pi(k)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_kb_k.$$

Chứng minh: Quy nạp theo n. Với $n = 1$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Giả sử bất đẳng thức đã đúng cho mọi $k \leqslant n-1$. Lấy $\pi \in S_n$ tùy ý và $\pi(i) = 1$. Nếu $i = 1$ thì $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{\pi(k)} = a_1b_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} a_k b_{\pi(k)} \leqslant a_1b_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} a_k b_k$ theo giả thiết quy nạp. Do vậy $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{\pi(k)} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$. Nếu $i > 1$ ta biến đổi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_{\pi(k)} &= a_1 b_{\pi(1)} + a_2 b_{\pi(2)} + \cdots + a_i b_{\pi(i)} + \cdots + a_n b_{\pi(n)} \\
&= \big(a_1 b_{\pi(1)} + a_i b_1\big) + \big(a_2 b_{\pi(2)} + \cdots + a_n b_{\pi(n)}\big) \\
&\leqslant \big(a_i b_{\pi(1)} + a_1 b_1\big) + \big(a_2 b_{\pi(2)} + \cdots + a_n b_{\pi(n)}\big) \\
&= a_1 b_1 + \big(a_2 b_{\pi(2)} + \cdots + a_i b_{\pi(1)} + \cdots + a_n b_{\pi(n)}\big)
\end{aligned}$$

vì $0 \leqslant b_1 \leqslant b_{\pi(1)}$ và $0 \leqslant a_1 \leqslant a_i$. Với phép hoán vị $s \in S_n$ thỏa mãn $s(k) = \begin{cases} 1 \text{ khi } k = 1 \\ \pi(k) \text{ khi } k \neq 1, k \neq i \\ \pi(1) \text{ khi } k = i \end{cases}$ ta có $a_2 b_{\pi(2)} + \cdots + a_i b_{\pi(1)} + \cdots + a_n b_{\pi(n)} = \sum\limits_{k=2}^{n} a_k b_{s(k)} \leqslant \sum\limits_{k=2}^{n} a_k b_k$ theo giả thiết quy nạp. Tóm lại, đã chứng minh được bất đẳng thức $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{\pi(k)} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$. □

Ví dụ 2.2.2. *Cho ba số thực* $a, b, c \geqslant 0$. *Chứng minh bất đẳng thức sau đây:*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2a, a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2c + b^2a + c^2b.$$

Bài giải: Không hạn chế có thể giả thiết $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$. Khi đó $0 \leqslant a^2 \leqslant b^2 \leqslant c^2$. Theo Mệnh đề 2.2.1 ta có $a^3 + b^3 + c^3 = a^2.a + b^2.b + c^2.c \geqslant a^2b + b^2c + c^2a$ và $a^3 + b^3 + c^3 = a^2c + b^2a + c^2b$. □

Ví dụ 2.2.3. *Cho ba số thực* $a, b, c \geqslant 0$. *Chứng minh bất đẳng thức sau đây:*

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geqslant 0.$$

Bài giải: Không hạn chế, giả thiết $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$. Khi đó $c(c-a)(c-b) \geqslant 0$. Ta lại có $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) = (a-b)(a^2 - ac - b^2 + bc)$ và như vậy $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) = (a-b)^2(a+b-c) \geqslant 0$. Do đó $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geqslant 0$. □

Ví dụ 2.2.4. *Cho ba số thực a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau đây:*

$$a^6 + b^6 + c^6 + 3a^2b^2c^2 \geqslant 2(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3).$$

Bài giải: Theo Ví dụ 2.2.3 có $a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2) + b^2(b^2 - c^2)(b^2 - a^2) + c^2(c^2 - a^2)(c^2 - b^2) \geqslant 0$. Từ đây ta nhận được ngay $a^6 + b^6 + c^6 + 3a^2b^2c^2 \geqslant a^4b^2 + a^4c^2 + b^4c^2 + b^4a^2 + c^4a^2 + c^4b^2 = a^2b^2(a^2 + b^2) + b^2c^2(b^2 + c^2) + c^2a^2(c^2 + a^2) \geqslant 2(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)$. □

Ví dụ 2.2.5. *Cho ba số thực $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh bất đẳng thức sau:*

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leqslant 1 + \frac{1}{2abc}.$$

Bài giải: Vì $(1 - b)(1 - c) \geqslant 0$ nên $1 + bc \geqslant b + c$. Vậy $\dfrac{a}{bc+1} \leqslant \dfrac{a}{b+c}$. Từ đây dễ dàng suy ra $\dfrac{a}{bc+1} + \dfrac{b}{ca+1} + \dfrac{c}{ab+1} \leqslant \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}$. Không hạn chế có thể giả thiết $1 \geqslant a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$. Khi đó có bất đẳng thức

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leqslant \frac{1}{b+c} + \frac{b}{c+b} + \frac{c}{c+b} = 1 + \frac{1}{b+c}.$$

Vì $\dfrac{1}{b+c} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{bc}} \leqslant \dfrac{1}{2abc}$ nên $\dfrac{a}{bc+1} + \dfrac{b}{ca+1} + \dfrac{c}{ab+1} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2abc}$. □

Ví dụ 2.2.6. *Cho bốn số thực $a, b, c, d \in [0; 1]$. Chứng minh bất đẳng thức:* $\dfrac{a}{bc+cd+db+1} + \dfrac{b}{cd+da+ac+1} + \dfrac{c}{da+ab+bd+1} + \dfrac{d}{ab+bc+ca+1} \leqslant \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4abcd}$.

Bài giải: Vì $(1 - b)(1 - c)(1 - d) \geqslant 0$ nên $1 + bc + cd + db \geqslant b + c + d + bcd$. Vậy $\dfrac{a}{bc+cd+db+1} \leqslant \dfrac{a}{b+c+d+bcd}$. Từ đây dễ dàng suy ra $\dfrac{a}{bc+cd+db+1} + \dfrac{b}{cd+da+ac+1} + \dfrac{c}{da+ab+bd+1} + \dfrac{d}{ab+bc+ca+1} \leqslant \dfrac{a}{b+c+d+bcd} + \dfrac{b}{c+d+a+cda} + \dfrac{c}{d+a+b+dab} + \dfrac{d}{a+b+c+abc}$. Không hạn chế có thể giả thiết $1 \geqslant a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant 0$ và đặt $p = a+b+c+d$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}&\frac{a}{p-a+bcd}+\frac{b}{p-b+cda}+\frac{c}{p-c+dab}+\frac{d}{p-d+abc}\\ \leqslant\ &\frac{1}{p-a+bcd}+\frac{b}{p-a+bcd}+\frac{c}{p-a+bcd}+\frac{d}{p-a+bcd}\\ =\ &\frac{1+p-a}{p-a+bcd}=1+\frac{1-bcd}{b+c+d+bcd}\leqslant\frac{1}{4bcd}+\frac{3}{4}\leqslant\frac{1}{4abcd}+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

bởi vì từ $b+c+d\geqslant 3\sqrt[3]{bcd}\geqslant 3bcd$ suy ra $\dfrac{1-bcd}{b+c+d+bcd}\leqslant\dfrac{1-bcd}{4bcd}=\dfrac{1}{4bcd}-\dfrac{1}{4}$. Do đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh. Dấu bằng xẩy ra khi $a=b=c=d=1$. □

Ví dụ 2.2.7. *Sử dụng hàm lồi $f(x)=x\ln x$ với $x>0$ để chứng minh*

(i) *Với các $x_k>0, a_k\geqslant 0, k=1,2,\dots,n$, và $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k>0$ có bất đẳng thức*

$$\Big(\prod_{k=1}^{n}x_k^{a_kx_k}\Big)^{\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_k}}\geqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}.$$

(ii) *Với các số thực $b_1,b_2,\dots,b_n\geqslant 1$ có* $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+b_k}\geqslant\dfrac{n}{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+b_k)}}$.

Bài giải: (i) Vì $f(x)=x\ln x$ là hàm lồi nên có bất đẳng thức $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_k\ln x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}$

$$\geqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}\ln\Big(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}\Big)\ \text{hay}\ \Big(\prod_{k=1}^{n}x_k^{a_kx_k}\Big)^{\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_k}}\geqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}.$$

(ii) Thay $a_k = \dfrac{1}{x_k}, x_k = 1 + b_k$ có $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+b_k} \geqslant \dfrac{n}{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+b_k)}}$. □

Ví dụ 2.2.8. *Sử dụng hàm lồi* $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ *với* $x > 0$ *để chứng minh: Với các số thực* $b_1, b_2, \ldots, b_n \geqslant 1$ *có* $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+b_k} \geqslant \dfrac{n}{1+\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}}$.

Bài giải: Vì $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ có $f"(x) = \dfrac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3} > 0$ với $x > 0$ nên $f(x)$ là hàm lồi theo Định lý 2.1.29. Do đó $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+e^{x_k}} \geqslant \dfrac{n}{1+e^{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k/n}}$. Thay $b_k = e^{x_k}, k = 1, 2, \ldots, n$, được bất đẳng thức $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+b_k} \geqslant \dfrac{n}{1+\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}}$. □

Ví dụ 2.2.9. *Sử dụng hàm lồi* $f(x) = \dfrac{x}{1+e^x}$ *với* $x \geqslant 2$ *để chứng minh: Với các số thực* $b_1, b_2, \ldots, b_n \geqslant e^2$ *có* $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln b_k}{1+b_k} \geqslant \dfrac{\ln \prod\limits_{k=1}^{n} b_k}{1+\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}}$.

Bài giải: Vì $f(x) = \dfrac{x}{1+e^x}$ là hàm lồi nên $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x_k}{1+e^{x_k}} \geqslant \dfrac{n \sum\limits_{k=1}^{n} x_k/n}{1+e^{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k/n}}$. Thay $b_k = e^{x_k}, k = 1, 2, \ldots, n$, được $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln b_k}{1+b_k} \geqslant \dfrac{\ln \prod\limits_{k=1}^{n} b_k}{1+\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}}$. □

Ví dụ 2.2.10. *Sử dụng hàm lồi* $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ *với* $x \geqslant 2$ *để chứng minh: Với các số thực* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ *thỏa mãn* $\begin{cases} \prod\limits_{k=1}^{n} a_k = 1 \\ \prod\limits_{k=1}^{n} b_k^{\alpha_k} = 1 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \end{cases}$

ta có bất đẳng thức $\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{\alpha_k} \geqslant 1+\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{i=1,i\neq k}^{n}\alpha_k b_k a_i}$.

Bài giải: Vì $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ là hàm lồi nên ta có bất đẳng thức sau đây: $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\ln\left(1+\dfrac{1}{x_k}\right)\geqslant\ln\left(1+\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x_k}\right)$ hay $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{x_k}\right)^{\alpha_k}\geqslant 1+\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x_k}$. Thay $x_k=\dfrac{b_k}{a_k}, k=1,2,\ldots,n$, được $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{\frac{b_k}{a_k}}\right)^{\alpha_k}\geqslant 1+\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\frac{b_k}{a_k}}$ hay có bất đẳng thức $\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{\alpha_k}\geqslant 1+\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{i=1,i\neq k}^{n}\alpha_k b_k a_i}$. □

2.3 Bất đẳng thức của Karamata, Schur, Muirheard

Bộ n số thực $(a)=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ thỏa mãn $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ được gọi là một *bộ số không tăng*. Đặt $|(a)|=a_1+a_2+\cdots+a_n$. Trong tập hợp tất cả các bộ số không tăng $A=\{(a)=(a_k)\}$ ta định nghĩa quan hệ thứ tự: Giả sử $(a)=(a_k),(b)=(b_k)$ là hai bộ số không tăng. Định nghĩa

$$(a)\geqslant(b) \text{ khi và chỉ khi } a_1+\cdots+a_k\geqslant b_1+\cdots+b_k, \forall\, k=1,2,\ldots,n;$$

Còn nếu có k để $a_1+\cdots+a_k>b_1+\cdots+b_k$ thì ta viết $(a)>(b)$.

Định nghĩa 2.3.1. Giả sử có hai bộ số không tăng $(a)=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ và $(b)=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$. Bộ (a) được gọi là *trội hơn* (b) nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn: $\begin{cases}a_1+\cdots+a_k\geqslant b_1+\cdots+b_k\\ k=1,2,\ldots,n-1;|(a)|=|(b)|.\end{cases}$

Mệnh đề 2.3.2. [Karamata] *Giả sử* $y=f(x)$ *là một hàm lồi trên khoảng* $(a;b)$ *và các bộ không tăng* $(a),(b)$ *với* $a_k,b_k\in(a;b)$ *với* $k=1,2,\ldots,n$. *Nếu bộ* (a) *trội hơn bộ* (b) *thì có bất đẳng thức* $\sum\limits_{k=1}^{n}f(a_k)\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}f(b_k)$; *còn khi* $y=f(x)$ *là hàm lõm thì* $\sum\limits_{k=1}^{n}f(a_k)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}f(b_k)$.

Chứng minh: Đặt $c_k = \delta_f(a_k, b_k) = \dfrac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k}, k = 1, 2, \ldots, n$. Theo Mệnh đề 2.1.27, dãy (c_k) là dãy đơn điệu giảm bởi vì (a) và (b) là dãy không tăng. Đặt $A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i, B_k = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$ với $A_0 = B_0 = 0, k = 1, 2, \ldots, n$. Từ $|(a)| = |(b)|$ suy ra $A_n = B_n$. Biến đổi hiệu

$$\begin{aligned} H &= \sum_{k=1}^{n} f(a_k) - \sum_{k=1}^{n} f(b_k) = \sum_{k=1}^{n} \big(f(a_k) - f(b_k)\big) = \sum_{k=1}^{n} c_k(a_k - b_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k(A_k - A_{k-1} - B_k + B_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k(A_k - B_k) - \sum_{k=1}^{n} c_k(A_{k-1} - B_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} c_k(A_k - B_k) - \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1}(A_k - B_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(c_k - c_{k+1})(A_k - B_k). \end{aligned}$$

Vì $A_k \geqslant B_k$ và $c_k \leqslant c_{k+1}$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$. Vậy $H \leqslant 0$. □

Ví dụ 2.3.3. *Với các số thực dương* a, b, c, d *luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+d} + \frac{1}{d+a} \leqslant \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2d}.$$

Bài giải: Không hạn chế có thể giả thiết $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d > 0$. Khi đó có $\begin{cases} 2a \geqslant a + b \\ 2a + 2b \geqslant a + b + b + c \\ 2a + 2b + 2c \geqslant a + b + b + c + c + d \\ 2a + 2b + 2c + 2d = a + b + b + c + c + d + d + a. \end{cases}$ Từ đây suy ra $(2a, 2b, 2c, 2d)$ trội hơn bộ $(a + b, b + c, c + d, d + a)$. Vì $y = \dfrac{1}{x}$ với $x > 0$ là hàm lồi nên có $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+d} + \dfrac{1}{d+a} \leqslant \dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{2b} + \dfrac{1}{2c} + \dfrac{1}{2d}$ theo Mệnh đề 2.3.2. □

Ví dụ 2.3.4. *Tìm giá trị lớn nhất của tổng* $T = x^{2012} + y^{2012} + z^{2012}$ *với* $x, y, z \in [-1; 1]$ *thỏa mãn* $x + y + z = \dfrac{1}{2}$.

Bài giải: Vì x, y, z, t bình đẳng nên có thể cho $1 \geqslant x \geqslant y \geqslant z \geqslant t \geqslant -1$. Hàm $y = x^{2012}$ là hàm lồi (xuống phía dưới) vì $f"(x) \geqslant 0$ trong $(-1; 1)$ theo Định lý 2.1.29. Ta xây dựng bộ trội của (x, y, z, t) như sau: $\begin{cases} 1 \geqslant x \\ x + y = -z + \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ Vậy $(1, \dfrac{1}{2}, -1)$ là một bộ trội của (x, y, z). Theo Mệnh đề 2.3.2 ta có $T \leqslant 2 + \dfrac{1}{2^{2012}}$. Do đó $T_{\ell n} = 2 + \dfrac{1}{2^{2012}}$ khi ta chọn $x = 1, y = \dfrac{1}{2}, z = -1$, chẳng hạn. □

Ví dụ 2.3.5. *Giả sử* a, b, c *là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng*

(i) $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{a-b+c} + \sqrt{-a+b+c} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

(ii) $(a+b-c)^9 + (a-b+c)^9 + (-a+b+c)^9 \geqslant a^9 + b^9 + c^9$.

Bài giải: Không hạn chế có thể giả thiết $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Vì $a + b - c \geqslant a, a+b-c+a-b+c \geqslant a+b$ và $a+b-c+a-b+c-a+b+c = a+b+c$ nên $(a+b-c, a-b+c, -a+b+c) \geqslant (a, b, c)$. Bởi vì $y = \sqrt{x}$ với $x > 0$ là hàm số lõm và $y = x^9$ với $x > 0$ là hàm lồi nên theo Mệnh đề 2.3.2 ta có $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{a-b+c} + \sqrt{-a+b+c} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ và $(a+b-c)^9 + (a-b+c)^9 + (-a+b+c)^9 \geqslant a^9 + b^9 + c^9$. □

Với bộ số không âm $\alpha = (\alpha_i)$ và bộ $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \forall\, a_k \geqslant 0$, sẽ ký hiệu $S_{(\alpha_k)} = S_\alpha(a) = \sum\limits_{\pi \in S_n} a_1^{\alpha_{\pi(1)}} \ldots a_n^{\alpha_{\pi(n)}}$.

Mệnh đề 2.3.6. [Schur] *Với* $\alpha, \beta > 0$ *có* $S_{(\alpha+2\beta,0,0)} + S_{(\alpha,\beta,\beta)} \geqslant 2S_{(\alpha+\beta,\beta,0)}$.

Chứng minh: Bất đẳng thức cần chứng minh chính là bất đẳng thức dưới đây: $a^{\alpha+2\beta} + b^{\alpha+2\beta} + c^{\alpha+2\beta} + a^\alpha b^\beta c^\beta + a^\beta b^\alpha c^{\beta)} + a^\beta b^\beta c^\alpha \geqslant a^{\alpha+\beta} b^\beta + a^{\alpha+\beta} c^\beta + b^{\alpha+\beta} a^\beta + b^{\alpha+\beta} c^\beta + c^{\alpha+\beta} a^\beta + c^{\alpha+\beta} b^\beta, (*)$, với $a, b, c \geqslant 0$. Không hạn chế có thể giả thiết $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$. Viết lại bất đẳng thức (*) thành bất đẳng thức:

$$a^\alpha(a^\beta - b^\beta)(a^\beta - c^\beta) + b^\alpha(b^\beta - c^\beta)(b^\beta - a^\beta) + c^\alpha(c^\beta - a^\beta)(c^\beta - b^\beta) \geqslant 0.$$

Vì $c^\alpha(c^\beta - a^\beta)(c^\beta - b^\beta) \geqslant 0$ nên chỉ cần chứng minh $a^\alpha(a^\beta - b^\beta)(a^\beta - c^\beta) + b^\alpha(b^\beta - c^\beta)(b^\beta - a^\beta) \geqslant 0$ hay $a^\alpha(a^\beta - c^\beta) - b^\alpha(b^\beta - c^\beta) \geqslant 0$, nhưng bất đẳng thức này là hiển nhiên. □

Ví dụ 2.3.7. *Giả sử* a, b, c *là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng* $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b.$

Bài giải: Bất đẳng thức trên được suy ra từ Mệnh đề 2.3.6 với $\alpha = \beta = 1$. □

Ví dụ 2.3.8. *Giả sử* a, b, c *là ba số thực không âm. Chứng minh bất đẳng thức* $a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geqslant a^3b + a^3c + b^3c + b^3a + c^3a + c^3b.$

Bài giải: Bất đẳng thức được suy ra từ Mệnh đề 2.3.6 với $\alpha = 2, \beta = 1$. □

Với bộ số không âm $\alpha = (\alpha_i)$ và bộ $a = (a_1, a_2, \dots, a_n), \forall\ a_k \geqslant 0$, sẽ ký hiệu $M_\alpha(a) = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{\pi\in S_n} a_1^{\alpha_{\pi(1)}} \dots a_n^{\alpha_{\pi(n)}}$. Khi $\alpha = (n, 0, \dots, 0)$ thì $M_\alpha(a) = \dfrac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n}{n}$; Khi $\alpha = (1, 1, \dots, 1)$ thì $M_\alpha(a) = a_1a_2 \dots a_n$; Còn khi $\alpha = (\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}, \dots, \dfrac{1}{n})$ thì $M_\alpha(a) = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.
Với bộ số không âm $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ và $c > 0$, trong đó $i < j$ và $\alpha_i \geqslant \alpha_j > 0$, ký hiệu các phép biến đổi tuyến tính sau đây:

(i) $T^c_{1n}(\alpha) = \beta$ thỏa mãn $\beta_1 = \alpha_1 + c, \beta_n = \alpha_n - c \geqslant 0$ và $\beta_k = \alpha_k$ với mọi $k \neq 1, n$.

(ii) $T^c_{1j}(\alpha) = \beta$ thỏa mãn $\beta_1 = \alpha_1 + c, \beta_j = \alpha_j - c \geqslant \alpha_{j+1}$ và $\beta_k = \alpha_k$ với mọi $k \neq 1, j$ và $j < n$.

(iii) $T^c_{in}(\alpha) = \beta$ thỏa mãn $\alpha_{i-1} \geqslant \beta_i = \alpha_i + c, \beta_n = \alpha_n - c \geqslant 0$ và $\beta_k = \alpha_k$ với mọi $k \neq i, n$ và $i > 1$.

(iv) $T^c_{ij}(\alpha) = \beta$ thỏa mãn $\alpha_{i-1} \geqslant \beta_i = \alpha_i + c, \beta_j = \alpha_j - c \geqslant 0$ và $\beta_k = \alpha_k$ với mọi $k \neq i, j$ và $1 < i < j < n$.

Giới hạn chỉ xét bộ $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Khi đó chọn $c = 1$ và viết $T^c_{ij}(\alpha)$ qua $T_{ij}(\alpha)$.

Bổ đề 2.3.9. *Nếu* $\beta = T_{ij}(\alpha)$ *thì có bất đẳng thức* $M_\beta(a) \geqslant M_\alpha(a)$*. Dấu bằng chỉ xẩy ra khi* $a_1 = \cdots = a_n$.

Chứng minh: Với mỗi cặp chỉ số $h, k, h < k$, hiệu $M_\beta(a) - M_\alpha(a)$ chứa số hạng dạng $B = A(a_h^{\beta_i}a_k^{\beta_j} + a_h^{\beta_j}a_k^{\beta_i} - a_h^{\alpha_i}a_k^{\alpha_j} - a_h^{\alpha_j}a_k^{\alpha_i})$ với $A \geqslant 0$. Biến đổi hiệu $B = A(a_h^{\alpha_i+1}a_k^{\alpha_j-1} + a_h^{\alpha_j-1}a_k^{\alpha_i+1} - a_h^{\alpha_i}a_k^{\alpha_j} - a_h^{\alpha_j}a_k^{\alpha_i}) = Aa_h^{\alpha_j-1}a_k^{\alpha_j-1}(a_h - a_k)(a_h^{\alpha_i-\alpha_j+1} - a_k^{\alpha_i-\alpha_j+1}) \geqslant 0$. Do vậy $M_\beta(a) \geqslant M_\alpha(a)$. Dấu bằng chỉ xẩy ra khi từng $B = 0$ hay $a_h = a_k$ với mọi $h, k = 1, 2, \dots = n$. □

Bổ đề 2.3.10. *Nếu* $(\beta) \geqslant (\alpha), (\beta) \neq (\alpha)$ *và* $|(\alpha)| = |(\beta)|$, *thì sau một số hữu hạn phép biến đổi tuyến tính* T_{ij} *sẽ chuyển* (α) *thành* (β).

Chứng minh: Vì $(\beta) \neq (\alpha)$ nên có chỉ số i nhỏ nhất để $\beta_i \neq \alpha_i$. Do bởi $(\beta) \geqslant (\alpha)$ nên $\beta_i > \alpha_i$. Từ $|(\alpha)| = |(\beta)|$ suy ra $\sum\limits_{k=1}^{n}(\beta_k - \alpha_k) = 0$. Do $\beta_i > \alpha_i$ nên tồn tại j để $0 \leqslant \beta_j < \alpha_j$ và $i < j$. Tác động T_{ij} vào (α) ta nhận được $\gamma = T_{ij}(\alpha)$ với $\gamma_i = \alpha_i + 1, \gamma_j = \alpha_j - 1$, còn $\gamma_k = \alpha_k$ với mọi $k \neq i, j$. Như vậy $|\beta_i - \alpha_i| = |\beta_i - \gamma_i + 1| = |\beta_i - \gamma_i| + 1$ và $|\beta_j - \alpha_j| = |\beta_j - \gamma_j - 1| = |\beta_j - \gamma_j| + 1$. Từ hai hệ thức này suy ra $\sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k - \gamma_k| = \sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k - \alpha_k| - 2$. Do vậy, khi tác động T_{ij} làm tổng $\sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k - \alpha_k|$ giảm được 2 đơn vị. Vậy, sau một số hữu hạn bước, ta có $\sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k - \delta_k| = 0$ hay đã chuyển được (α) thành (β). □

Từ hai bổ đề trên ta suy ra ngay Bất đẳng thức Muirheard dưới đây:

Mệnh đề 2.3.11. [Muirheard] *Với các số dương* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *xẩy ra bất đẳng thức* $M_\alpha(a) \geqslant M_\beta(a)$ *khi và chỉ khi* $\alpha \geqslant \beta$ *và* $|\alpha| = |\beta|$. *Dấu bằng chỉ xẩy ra khi* $\alpha = \beta$ *và* $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Chú ý rằng, khi vận dụng Bất đẳng thức Muirheard ta phải chọn bộ trội thế nào để nhanh có kết quả.

Ví dụ 2.3.12. [Yugoslav Federal Competition 1991] *Với ba số thực dương* a, b, c *có bất đẳng thức* $\dfrac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \dfrac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \dfrac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leqslant \dfrac{1}{abc}$.

Bài giải: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$abc[(a^3 + b^3 + abc)(b^3 + c^3 + abc) + (b^3 + c^3 + abc)(c^3 + a^3 + abc) +$$

$$(c^3 + a^3 + abc)(a^3 + b^3 + abc)] \leqslant (a^3 + b^3 + abc)(b^3 + c^3 + abc)(c^3 + a^3 + abc)$$

hay $a^6b^3 + a^6c^3 + b^6c^3 + b^6a^3 + c^6a^3 + c^6b^3 \geqslant 2[a^5b^2c^2 + a^2b^5c^2 + a^2b^2c^5]$. Bất đẳng thức này tương đương bất đẳng thức đúng $M_{(6,3,0)}(a) \geqslant M_{(5,2,2)}(a)$ theo Mệnh đề 2.3.11. □

Ví dụ 2.3.13. [IMO 1995] *Với ba số thực dương* $a, b, c, abc = 1$, *luôn luôn có bất đẳng thức* $\dfrac{1}{a^3(b + c)} + \dfrac{1}{b^3(c + a)} + \dfrac{1}{c^3(a + b)} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

Bài giải: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2\sqrt[3]{(abc)^4}}$ hay $2[b^3c^3(a+b)(a+c)+c^3a^3(b+c)(b+a)+a^3b^3(c+a)(c+b)] \geqslant 3\sqrt[3]{a^5b^5c^5}(a+b)(b+c)(c+a)$. Viết cách khác, nó trở thành $2M_{(16/3,13/3,7/3)} + M_{(16/3,16/3,4/3)} + M_{(13/3,13/3,10/3)} \geqslant 3M_{(5,4,3)} + M_{(4,4,4)}$. Bất đẳng thức này đúng vì $2M_{(16/3,13/3,7/3)} \geqslant 2M_{(5,4,3)}$, $M_{(16/3,16/3,4/3)} \geqslant 3M_{(5,4,3)}$ và $M_{(13/3,13/3,10/3)} \geqslant M_{(4,4,4)}$ theo Mệnh đề 2.3.11.
Có thể giải ngắn gọn hơn: Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ với $x, y, z > 0, xyz = 1$. Khi đó bất đẳng thức trở thành $T = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}$ với $x, y, z > 0, xyz = 1$. Vì $(y+z+z+x+x+y)T \geqslant (x+y+z)^2$ nên $T \geqslant \frac{x+y+z}{2} \geqslant 3\frac{\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2}$. □

Ví dụ 2.3.14. [IMO 1984] *Với ba số thực* $a, b, c \geqslant 0, a+b+c = 1$, *luôn luôn có bất đẳng thức* $0 \leqslant ab+bc+ca-2abc \leqslant \frac{7}{27}$.

Bài giải: Vì $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$ nên $ab, bc, ca \geqslant abc$, và $ab+bc+ca-2abc \geqslant 0$. Ta còn phải chứng minh $ab+bc+ca-2abc \leqslant \frac{7}{27}$ hay $ab+bc+ca-2abc = (ab+bc+ca)(a+b+c)-2abc = a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+abc \leqslant \frac{7}{27}(a+b+c)^3$. Như vậy phải chỉ ra

$$7(a^3+b^3+c^3)+15abc \geqslant 6[a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b]$$

hay $12M_{(2,1,0)} \leqslant 7M_{(3,0,0)}+5M_{(1,1,1)}$. Theo Mệnh đề 2.3.6 ta có $10M_{(2,1,0)} \leqslant 5M_{(3,0,0)}+5M_{(1,1,1)}$ và theo Mệnh đề 2.3.11 có $2M_{(2,1,0)} \leqslant 2M_{(3,0,0)}$. □

2.4 Bất đẳng thức Abel và đánh giá tổng

Xét tổng $\sum_{k=1}^{n} a_k$ hoặc $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Vấn đề đặt ra: Đánh giá các tổng này như thế nào?

Ví dụ 2.4.1. *Với số nguyên dương* n *có* $2\sqrt{n} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n+1}-2$.

Bài giải: Vì $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}$ nên có $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum\limits_{k=1}^{n} \Big(2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}\Big) = 2\sqrt{n+1} - 2$. Vì $\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}$ nên ta có $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sum\limits_{k=1}^{n} \Big(2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}\Big) = 2\sqrt{n}$. □

Bổ đề 2.4.2. *Giả sử với số nguyên dương n có hai dãy số thực $a_1, \ldots, a_n$ và $b_1, \ldots, b_n$. Đặt $S_k = a_1 + \cdots + a_k, k = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó có đồng nhất thức*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}).$$

Chứng minh: Ký hiệu $S_0 = 0$. Khi đó có thể viết $a_k = S_k - S_{k-1}$ với $k = 1, 2, \ldots, n$, và biến đổi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} S_k b_k - \sum_{k=1}^{n} S_{k-1} b_k \\ &= S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k b_k - \sum_{k=2}^{n} S_{k-1} b_k - S_0 b_1 \\ &= S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k b_k - \sum_{k=1}^{n} S_k b_{k+1} = S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}).\end{aligned}$$

Tóm lại $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1})$. □

Định lý 2.4.3. [BĐT Abel] *Giả sử với số nguyên dương n có hai dãy số thực $a_1, \ldots, a_n$ và $b_1, \ldots, b_n$, trong đó $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant 0$. Đặt $S_k = a_1 + \cdots + a_k, k = 1, 2, \ldots, n$ và $M = \max\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ và $m = \min\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$. Khi đó có các bất đẳng thức*

$$m b_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant M b_1.$$

Chứng minh: Chú ý $b_n \leqslant 0$ và $b_k - b_{k+1} \leqslant 0$ với $k = 1, \ldots, n-1$. Theo Bổ đề 2.4.2 ta được hai bất đẳng thức $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant M b_n + M \sum\limits_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) = M b_1$ và $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \geqslant m b_n + m \sum\limits_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) = m b_1$. □

Ví dụ 2.4.4. *Giả sử với số nguyên dương* n *có hai dãy số thực* $a_1, \ldots, a_n$ *và* $b_1, \ldots, b_n$, *trong đó* $1 \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant 0$. *Khi đó tồn tại số nguyên* r *với* $r \leqslant n$ *để* $|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k| \leqslant |\sum\limits_{j=1}^{r} a_j|$.

Bài giải: Vì $M = \max\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ nên có $r \leqslant n$ để $M = S_r$. Theo Định lý 2.4.3, ta có $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant M b_1 \leqslant M$. □

Ví dụ 2.4.5. *Với mỗi số nguyên dương* n *có* $e\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^n < n! < en\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^n$.

Bài giải: Các bất đẳng thức tương đương các bất đẳng thức sau đây:

$$n \ln n - (n-1) < \sum_{k=1}^{n} \ln k < (n+1)\ln n - (n-1).$$

Theo Bổ đề 2.4.2 có đồng nhất thức $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln k = n \ln n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} k \ln \dfrac{k+1}{k}$. Vậy

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k = n \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} k \ln(1 + \frac{1}{k}).$$

Vì $\dfrac{1}{k+1}) < \ln(1+\dfrac{1}{k}) < \dfrac{1}{k}$ nên $n \ln n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{k}{k} < \sum\limits_{k=1}^{n} \ln k < n \ln n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{k}{k+1}$ hay $n \ln n - (n-1) < \sum\limits_{k=1}^{n} \ln k < n \ln n - (n-1) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k+1}$. Vì $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{k}{k+1} < \sum\limits_{k=1}^{n-1} \ln \dfrac{k+1}{k} = \ln n$ nên $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln k < (n+1)\ln n - (n-1)$. □

Ví dụ 2.4.6. *Giả sử có dãy các số tự nhiên* (a_n) *thỏa mãn* $a_n < a_{n+1} < a_n + 2010$ *với mọi* $n \geqslant 1$. *Với mỗi* n *ta viết tất cả các ước nguyên tố của* a_n. *Khi đó tập các ước nguyên tố nhận được là một tập vô hạn các số nguyên tố khác nhau.*

Bài giải: Giả sử tồn tại dãy (a_n) thỏa mãn đầu bài với tập các ước nguyên tố là hữu hạn, chẳng hạn $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$. Khi đó mỗi hạng tử a_n đều có sự biểu diễn $a_n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ với $\alpha_i \in \mathbb{N}$ và $i = 1, \ldots, r$. Xét tập hợp $S := \{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} | \alpha_i \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, r\}$. Xác định dãy (x_n) thỏa mãn

$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ và $S = \{x_n | n \in \mathbb{N}^+\}$. Vì $a_1 < a_2 < \cdots$ và mọi $a_n \in S$ nên dãy (a_n) là một dãy con của dãy (x_n). Vì $a_{n+1} < a_n + 2010, n \geqslant 1$, nên

$$a_n < a_{n-1}+1.2010 < a_{n-2}+2.2010 < \cdots < a_1+(n-1).2010 < n(a_1+2010)$$

hay $a_n < n(a_1 + 2010)$. Ta có mâu thuẫn giữa hai bất đẳng thức sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(a_1+2010)} = \frac{1}{a_1+2010} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r \geqslant 0} \frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}} \\ &= \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{\alpha_1}} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \frac{1}{p_2^{\alpha_2}} \cdots \sum_{\alpha_r=0}^{\infty} \frac{1}{p_r^{\alpha_r}} = \frac{p_1}{p_1-1} \frac{p_2}{p_2-1} \cdots \frac{p_r}{p_r-1}. \end{aligned}$$

Vì vậy tập các ước nguyên tố nhận được là một tập vô hạn các số nguyên tố khác nhau. □

Ví dụ 2.4.7. *Với hai số nguyên dương $m, n, m < n$, và số thực α không là bội chẵn của π luôn có bất đẳng thức*

$$\Big| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin k\alpha}{k} \Big| \leqslant \frac{1}{(m+1)|\sin\dfrac{\alpha}{2}|}.$$

Bài giải: Với $k = 1, 2, \ldots, n-m$, ký hiệu $a_k = \sin[(k+m)\alpha] \sin\dfrac{\alpha}{2}$ và $b_k = \dfrac{1}{k+m}$. Theo Định lý 2.4.3 ta có các bất đẳng thức sau đây:

$$\frac{s}{m+1} = sb_1 \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin k\alpha \sin\dfrac{\alpha}{2}}{k} = \sum_{k=1}^{n-m} a_k b_k \leqslant Sb_1 = \frac{S}{m+1},$$

trong đó $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, $S = \max\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ và $s = \min\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$. Vì $2a_i = 2\sin[(i+m)\alpha]\sin\dfrac{\alpha}{2} = \cos(i+m-\dfrac{1}{2})\alpha - \cos(i+m+\dfrac{1}{2})\alpha$ nên $2S_k = 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_k = \cos(m+\dfrac{1}{2})\alpha - \cos(k+m+\dfrac{1}{2})$. Từ đây suy ra $-2 \leqslant 2S_k \leqslant 2$ với $k = 1, 2, \ldots, n$ và như vậy $-1 \leqslant s \leqslant S \leqslant 1$. Với kết quả trên ta được các bất đẳng thức dưới đây: $\dfrac{-1}{m+1} = -b_1 \leqslant sb_1 \leqslant \Big|\sum\limits_{k=m+1}^{n} \dfrac{\sin k\alpha \sin\frac{\alpha}{2}}{k}\Big| \leqslant Sb_1 \leqslant b_1 = \dfrac{1}{m+1}$. Vậy $\Big|\sum\limits_{k=m+1}^{n} \dfrac{\sin k\alpha \sin\frac{\alpha}{2}}{k}\Big| \leqslant \dfrac{1}{m+1}$ hay $\Big|\sum\limits_{k=m+1}^{n} \dfrac{\sin k\alpha}{k}\Big| \leqslant \dfrac{1}{(m+1)|\sin\frac{\alpha}{2}|}$. □

Ví dụ 2.4.8. *Với bất kỳ số nguyên dương n và số thực α ta có bất đẳng thức*

$$|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\alpha}{k}| \leqslant 2\sqrt{\pi}.$$

Bài giải: Vì hàm số $y = |\sin x|$ là hàm tuần hoàn chu kỳ π nên ta chỉ cần xét $\alpha \in (0;\pi)$ với chú ý bất đẳng thức hiển nhiên đúng cho $\alpha = 0$. Xét $0 < \alpha < \pi$ và chọn số nguyên không âm m thỏa mãn $m \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{\alpha} < m+1$. Biểu diễn $|\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin k\alpha}{k}| \leqslant |\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\sin k\alpha}{k}| + |\sum\limits_{k=m+1}^{n} \dfrac{\sin k\alpha}{k}|$. Vì $|\sin k\alpha| < k\alpha$ nên $|\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\sin k\alpha}{k}| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{k\alpha}{k} = m\alpha \leqslant \sqrt{\pi}$. Mặt khác, ta cũng có $\sin\gamma > \dfrac{2\gamma}{\pi}$ khi $0 < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$. Vậy $\sin\dfrac{\alpha}{2} > \dfrac{2\frac{\alpha}{2}}{\pi} = \dfrac{\alpha}{\pi}$. Vì $\Big|\sum\limits_{k=m+1}^{n} \dfrac{\sin k\alpha}{k}\Big| \leqslant \dfrac{1}{(m+1)|\sin\frac{\alpha}{2}|}$ theo Ví dụ 2.4.7, nên $\Big|\sum\limits_{k=m+1}^{n} \dfrac{\sin k\alpha}{k}\Big| \leqslant \dfrac{1}{m+1}\dfrac{\pi}{\alpha} \leqslant \dfrac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\pi}{\alpha} = \sqrt{\pi}$. Tóm lại ta đã chỉ ra được $|\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin k\alpha}{k}| \leqslant 2\sqrt{\pi}$. □

Chương 3

Một số ứng dụng bất đẳng thức

3.1 Giá trị lớn nhất-nhỏ nhất

Mục này tập trung xét giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức chủ yếu qua *hàm số* hoặc qua *hình học*. Bây giờ ta chọn một hàm số $y = f(x)$ hoặc một hình nào đó. Sử dụng tính tăng-giảm hay tính lồi-lõm hoặc một số kết quả trong Hình học để có bất đẳng thức và suy ra giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất.

Hàm căn

Ví dụ 3.1.1. *Cho ba số thực* $a, b, c > 0$ *biến thiên thỏa mãn* $a + b + c \geqslant 3$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $T = \dfrac{a^3}{b+c} + \dfrac{b^3}{c+a} + \dfrac{c^3}{a+b}$.

Bài giải: Vì $T = \dfrac{(b+c+c+a+a+b)T}{2(a+b+c)} \geqslant \dfrac{\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)^2}{2(a+b+c)}$ theo Bất đẳng thức Bunhiakốpxki nên $T \geqslant \dfrac{\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)^2}{2(a+b+c)}$. Xét hàm $y = \sqrt{x^3} - \dfrac{3}{2}x$ trên $(0; +\infty)$. Dễ dàng chỉ ra $\sqrt{x^3} - \dfrac{3}{2}x \geqslant y_{min} = y(1) = -\dfrac{1}{2}$. Như vậy $\sqrt{x^3} \geqslant \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$. Từ đây suy ra $\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3} \geqslant \dfrac{3}{2}\big(a+b+c-1\big) > 0$. Ta nhận được $T \geqslant \dfrac{9}{8}\dfrac{(a+b+c-1)^2}{a+b+c}$. Xét hàm $z = \dfrac{(t-1)^2}{t}$ với $t = a+b+c \geqslant 3$. Vì $z' = \dfrac{t^2-1}{t^2} > 0$ nên z đồng biến. Vậy $T \geqslant \dfrac{9}{8}\dfrac{(3-1)^2}{3} = \dfrac{3}{2}$. Tóm lại $T_{nn} = \dfrac{3}{2}$ khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 3.1.2. *Sử dụng hàm lồi* $f(x) = \sqrt[3]{x^7}$ *với* $x \geqslant 0$ *để tìm giá trị nhỏ nhất của* $T = \sqrt[3]{\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^7} + \sqrt[3]{\left(\dfrac{b}{b+c}\right)^7} + \sqrt[3]{\left(\dfrac{c}{c+d}\right)^7} + \sqrt[3]{\left(\dfrac{d}{d+a}\right)^7}$ *với* $a, b, c, d > 0$.

Bài giải: Đặt $x = \dfrac{b}{a}, y = \dfrac{c}{b}, z = \dfrac{d}{c}, t = \dfrac{a}{d}$. Khi đó $x, y, z, t > 0, xyzt = 1$, và $T = \sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^7} + \sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{1+y}\right)^7} + \sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{1+z}\right)^7} + \sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{1+t}\right)^7}$. Vì $f(x) = \sqrt[3]{x^7}$ với $x \geqslant 0$ là hàm lồi và đơn điệu tăng nên ta có bất đẳng thức sau đây: $T \geqslant 4\sqrt[3]{\left(\dfrac{\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} + \dfrac{1}{1+z} + \dfrac{1}{1+t}}{4}\right)^7}$ với $x, y, z, t > 0$ và $xyzt = 1$. Bây giờ tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} + \dfrac{1}{1+z} + \dfrac{1}{1+t}$ với $x, y, z, t > 0$ và $xyzt = 1$. □

Ví dụ 3.1.3. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số dưới đây:*

$$y = \sqrt{5x^2 + 20} + \sqrt{5x^2 - 32x + 64} + \sqrt{5x^2 - 40x + 100} + \sqrt{5x^2 - 8x + 16}.$$

Bài giải: Xét $\vec{u} = (5x; 10), \vec{v} = (16 - 5x; 8), \vec{w} = (20 - 5x; 10), \vec{z} = (5x - 4; 8)$. Khi đó $\sqrt{5}y = |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| + |\vec{z}| \geqslant |\vec{u} + \vec{w}| + |\vec{v} + \vec{z}|$ và như thế $\sqrt{5}y \geqslant 20\sqrt{2} + 20$. Do vậy $y_{nn} = 4\sqrt{10} + 4\sqrt{5}$ với $x = 2$. □

Đa thức bậc hai

Mệnh đề 3.1.4. *Xét đa thức* $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + g \in \mathbb{R}[x, y]$, *trong đó* a, b, c *thỏa mãn* $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. *Khi đó với* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *có biểu diễn* $f(x, y) = au^2 + 2buv + cv^2 + 2(a\alpha + b\beta + d)u + 2(b\alpha + c\beta + e)v + f(\alpha, \beta)$, *ở đó* $u = x - \alpha, v = y - \beta$.

Chứng minh: Kiểm tra dễ dàng qua khai triển vế phải. □

Bây giờ, xét hệ $\begin{cases} b\alpha + c\beta + e = 0 \\ a\alpha + b\beta + d = 0 \end{cases}$ với $D = b^2 - ac, D_1 = ae - bd$ và $D_2 = cd - be$. Khi $D \neq 0$, hệ phương trình chỉ có một nghiệm (α, β) và có thể biểu diễn $f(x, y) = au^2 + 2buv + cv^2 + f(\alpha, \beta)$. Xét các trường hợp:

(i) Trường hợp $ac - b^2 > 0$: Khi $a > 0$ thì $c > 0$ và $f(x,y) - f(\alpha,\beta) = \frac{1}{a}\big[a^2u^2 + 2abuv + acv^2\big] = \frac{1}{a}\big[(au+bv)^2 + (ac-b^2)v^2\big]$. Với $v = 0, u \to \infty$, thì $f(x,y) \to +\infty$ và $f(x,y)_{nn} = f(\alpha,\beta)$ khi $v = 0, au + bv = 0$. Khi $a < 0$ thì $c < 0$ và $f(x,y) - f(\alpha,\beta) = \frac{1}{a}\big[a^2u^2 + 2abuv + acv^2\big] = \frac{1}{a}\big[(au+bv)^2 + (ac-b^2)v^2\big]$. Với $v = 0$ và cho $u \to \infty$ thì $f(x,y) \to -\infty$ và $f(x,y)_{ln} = f(\alpha,\beta)$ khi $v = 0, au + bv = 0$.

(ii) Trường hợp $ac - b^2 < 0$: Khi $a, c > 0$ ta có $f(x,y) - f(\alpha,\beta) = \frac{1}{a}\big[a^2u^2 + 2abuv + acv^2\big] = \frac{1}{a}\big[(au+bv)^2 + (ac-b^2)v^2\big]$. Với $au + bv = 0, v \to \infty$, thì $f(x,y) \to -\infty$ và với $v = 0, u \to \infty$, thì $f(x,y) \to +\infty$.

Khi $a < 0, c < 0$, và $f(x,y) - f(\alpha,\beta) = \frac{1}{a}\big[a^2u^2 + 2abuv + acv^2\big] = \frac{1}{a}\big[(au+bv)^2 + (ac-b^2)v^2\big]$. Với $v = 0, u \to \infty$, thì $f(x,y) \to -\infty$ và với $au + bv = 0, v \to \infty$, thì $f(x,y) \to +\infty$.

Khi $ac < 0$ hoặc $ac = 0$ được xét tương tự và $f(x,y)$ không có giá trị lớn nhất cũng như nhỏ nhất.

(iii) Trường hợp $ac - b^2 = 0$: Khi đó a và c không thể đồng thời bằng 0. Không hạn chế có thể coi $a \neq 0$. Vậy $c = \frac{b^2}{a}$. Ta có

$$f(x,y) = a\big(x + \frac{b}{a}y\big)^2 + 2d(x + \frac{b}{a}y\big) + 2\frac{ae - bd}{a}y + g.$$

Nếu $D_1 = ae - bd = 0$ thì $f(x,y) = at^2 + 2dt + g$. Khi $a > 0$ thì $f(x,y)$ không có giá trị lớn nhất, nhưng có giá trị nhỏ nhất; Khi $a < 0$ thì $f(x,y)$ có giá trị lớn nhất, nhưng không có giá trị nhỏ nhất. Nếu $D_1 = ae - bd \neq 0$ thì $f(x,y) = at^2 + 2dt + g + 2\frac{ae - bd}{a}y$. Khi đó $f(x,y)$ không có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Tóm lại, chúng ta có kết quả dưới đây:

Mệnh đề 3.1.5. *Xét đa thức* $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + g \in \mathbb{R}[x,y]$, *trong đó* a, b, c *thỏa mãn* $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. *Khi đó*

(i) *Nếu* $ac - b^2 > 0$ *thì* $f(x, y)$ *không có giá trị lớn nhất, có giá trị nhỏ nhất* $f(x, y)_{nn} = f(\alpha, \beta)$ *khi* $a > 0$*; còn khi* $a < 0$ *thì* $f(x, y)$ *không có giá trị nhỏ nhất và có giá trị lớn nhất* $f(x, y)_{ln} = f(\alpha, \beta)$.

(ii) *Nếu* $ac - b^2 < 0$ *thì* $f(x, y)$ *không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.*

(iii) *Nếu* $ac - b^2 = 0$: *Khi* $D_1 = ae - bd = 0$ *và* $a > 0$ *thì* $f(x, y)$ *không có giá trị lớn nhất, nhưng có giá trị nhỏ nhất; Khi* $D_1 = ae - bd = 0$ *và* $a < 0$ *thì* $f(x, y)$ *có giá trị lớn nhất, nhưng không có giá trị nhỏ nhất. Khi* $D_1 = ae - bd \neq 0$ *thì* $f(x, y)$ *không có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.*

Ví dụ 3.1.6. *Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của đa thức dưới đây:*

$$f(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2 - 4x + 6y - 20.$$

Bài giải: Vì $ac - b^2 = -1 < 0$ nên theo Mệnh đề 3.1.5 đa thức $f(x, y)$ không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. □

Ví dụ 3.1.7. *Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của đa thức dưới đây:*

$$f(x, y) = x^2 + 6xy + 14y^2 - 4x + 8y - 12.$$

Bài giải: Vì $ac - b^2 = 5 > 0$ nên theo Mệnh đề 3.1.5 đa thức $f(x, y)$ không có giá trị lớn nhất, nhưng có giá trị nhỏ nhất. hệ $\begin{cases} 3\alpha + 14\beta + 4 = 0 \\ \alpha + 3\beta - 2 = 0 \end{cases}$ có nghiệm $\alpha = 8, \beta = -2$. Khi đó $f(x, y) - f(8, -2) = u^2 + 6uv + 14v^2 \geqslant 0$ theo Mệnh đề 3.1.4. Vậy $f(x, y)_{nn} = f(8, -2) = -36$. □

Ví dụ 3.1.8. *Với* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 > 0$ *hãy xác định giá trị nhỏ nhất của đa thức* $f(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k x + b_k y + c_k)^2$.

Bài giải: Biểu diễn $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + g \in \mathbb{R}[x, y]$, trong đó $a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 > 0$, $b = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$, $c = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$, $d = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k c_k$, $e = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k c_k$ và $g = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 > 0$. Như trên, biểu diễn $f(x, y) = au^2 + 2buv + cv^2 + f(\alpha, \beta)$.

Vì $ac - b^2 = (\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2) - (\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \geqslant 0$ và $a > 0$ nên $f(x, y)_{nn} = f(\alpha, \beta)$, trong đó α, β là nghiệm của hệ $\begin{cases} b\alpha + c\beta + e = 0 \\ a\alpha + b\beta + d = 0. \end{cases}$ □

Ví dụ 3.1.9. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức* $T = a + 2b + 1$ *biết hai số* a, b *biến thiên, nhưng luôn luôn thỏa mãn phương trình:*

$$a^2 + 4ab + 10b^2 + 8a + 16b + 15 = 0.$$

Bài giải: Hiển nhiên $(a+2b+3)(a+2b+5)+6b^2 = 0$. Vậy $(a+2b+3)(a+2b+5) \leqslant 0$ hay $\begin{cases} a + 2b + 3 \leqslant 0 \\ a + 2b + 5 \geqslant 0. \end{cases}$ Từ đó suy ra $-4 \leqslant a + 2b + 1 \leqslant -2$. Vậy $T_{nn} = -4$ khi $a = -5, b = 0$; $T_{ln} = -2$ khi $a = -3, b = 0$. □

Một vài biểu thức tùy ý

Ví dụ 3.1.10. *Sử dụng* $f(x) = \sqrt[3]{x^{2012}}$ *với* $x \geqslant 0$ *để tìm giá trị nhỏ nhất của* $T = \sqrt[3]{\left(a + \frac{1}{a}\right)^{2012}} + \sqrt[3]{\left(b + \frac{1}{b}\right)^{2012}} + \sqrt[3]{\left(c + \frac{1}{c}\right)^{2012}} + \sqrt[3]{\left(d + \frac{1}{d}\right)^{2012}}$ *khi* $a, b, c, d > 0$ *và* $a + b + c + d = 1$.

Bài giải: Vì $f(x) = \sqrt[3]{x^{2012}}$ với $x \geqslant 0$ là hàm lồi và đơn điệu tăng nên có bất đẳng thức: $T \geqslant 4\sqrt[3]{\left[\frac{a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} + d + \frac{1}{d}}{4}\right]^{2012}} \geqslant 4\sqrt[3]{\left[\frac{17}{4}\right]^{2012}}$.

Vậy $T_{nn} = 4\sqrt[3]{\left[\frac{17}{4}\right]^{2012}}$ khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$. □

Ví dụ 3.1.11. *Sử dụng hàm lồi* $f(x) = x^2$ *với* $x \geqslant 0$ *để tìm giá trị nhỏ nhất của* $T = \left(\frac{a}{a+b}\right)^4 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^4 + \left(\frac{c}{c+d}\right)^4 + \left(\frac{d}{d+a}\right)^4$ *khi* $a, b, c, d > 0$.

Bài giải: Hiển nhiên $T = \left(\frac{1}{1+u}\right)^4 + \left(\frac{1}{1+v}\right)^4 + \left(\frac{1}{1+w}\right)^4 + \left(\frac{1}{1+t}\right)^4$ với $u, v, w, t > 0$ và $uvwt = 1$. Với $x_1 = \left(\frac{1}{1+u}\right)^2$, $x_2 = \left(\frac{1}{1+v}\right)^2$, $x_3 = \left(\frac{1}{1+w}\right)^2$ và $x_4 = \left(\frac{1}{1+t}\right)^2$ ta có

$$T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geqslant 4\left[\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right]^2.$$

Như vậy có $T \geqslant 4\Big[\dfrac{\dfrac{1}{(1+u)^2}+\dfrac{1}{(1+v)^2}+\dfrac{1}{(1+w)^2}+\dfrac{1}{(1+t)^2}}{4}\Big]^2$ hay $T \geqslant 4\Big[\dfrac{\dfrac{1}{1+uv}+\dfrac{1}{1+wt}}{4}\Big]^2 = \dfrac{1}{4}$. Do đó $T_{nn} = \dfrac{1}{4}$ khi $a = b = c = d > 0$. □

Ví dụ 3.1.12. *Chứng minh rằng* $T = \sqrt[3]{\Big(\dfrac{1}{1+a}\Big)^8}+\sqrt[3]{\Big(\dfrac{1}{1+b}\Big)^8}+\sqrt[3]{\Big(\dfrac{1}{1+c}\Big)^8} \geqslant \dfrac{3}{\sqrt[3]{\big[1+\sqrt{abc}\big]^8}}$ *khi* $a, b, c \geqslant 1$.

Bài giải: Vì $f(x) = \sqrt[3]{x^8}$ là hàm đơn điệu tăng, lồi và $a, b, c \geqslant 1$ nên có bất đẳng thức: $T \geqslant 3\sqrt[3]{\Big[\dfrac{\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}}{3}\Big]^8} \geqslant \dfrac{3}{\sqrt[3]{\big[1+\sqrt{abc}\big]^8}}$. □

Ví dụ 3.1.13. *Giả sử* $a, b, c \in [\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}; \sqrt[3]{2}]$. *Xác định giá trị lớn nhất của biểu thức* $T = \dfrac{a}{a^3+1}+\dfrac{b}{b^3+1}+\dfrac{c}{c^3+1}$.

Bài giải: Hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$ có $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1-2x^3}{(1+x^3)^2} \\ f"(x) = \dfrac{6x^2(x^3-2)}{(1+x^3)^3} \end{cases}$ là đơn điệu giảm và lõm trên $[\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}; \sqrt[3]{2}]$. Như vậy $T \leqslant 3f\big(\dfrac{a+b+c}{3}\big)$. Vì $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ nên $T \leqslant \sqrt[3]{4}$. Vậy $T_{ln} = \sqrt[3]{4}$ khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. □

Ví dụ 3.1.14. *Giả sử dãy các số thực* $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ *thỏa mãn* $a_1 \leqslant a_2\sqrt{3}, a_2 \leqslant a_3\sqrt{3}, \dots, a_{n-1} \leqslant a_n\sqrt{3}, a_n \leqslant a_1\sqrt{3}$. *Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $T = \dfrac{a_1^3}{a_2^3+a_1^2a_2}+\dfrac{a_2^3}{a_3^3+a_2^2a_3}+\dots+\dfrac{a_{n-1}^3}{a_n^3+a_{n-1}^2a_n}+\dfrac{a_n^3}{a_1^3+a_n^2a_1}$.

Bài giải: $T = \dfrac{\Big(\dfrac{a_1}{a_2}\Big)^3}{1+\Big(\dfrac{a_1}{a_2}\Big)^2}+\dfrac{\Big(\dfrac{a_2}{a_3}\Big)^3}{1+\Big(\dfrac{a_2}{a_3}\Big)^2}+\dots+\dfrac{\Big(\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\Big)^3}{1+\Big(\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\Big)^2}+\dfrac{\Big(\dfrac{a_n}{a_1}\Big)^3}{1+\Big(\dfrac{a_n}{a_1}\Big)^2}$.

Hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ với $x > 0$ có $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2} \\ f''(x) = \dfrac{2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3} \end{cases}$ là đơn điệu tăng và lồi trên $(0;\sqrt{3}]$. Như vậy $T \geqslant nf\Bigg(\dfrac{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}}{n}\Bigg)$. Vì $\dfrac{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}}{n} \geqslant 1$ nên $T \geqslant \dfrac{n}{2}$. Vậy $T_{ln} = \dfrac{n}{2}$ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = a_n > 0$. □

Ví dụ 3.1.15. *Sử dụng hàm lồi* $f(x) = \sqrt[3]{x^{2012}}$ *với* $x \geqslant 0$ *để tìm giá trị nhỏ nhất của* $T = \sqrt[3]{\Big(\dfrac{a}{a+1}\Big)^{2012}} + \sqrt[3]{\Big(\dfrac{b}{b+1}\Big)^{2012}} + \sqrt[3]{\Big(\dfrac{c}{c+1}\Big)^{2012}} + \sqrt[3]{\Big(\dfrac{d}{d+1}\Big)^{2012}}$ *khi* $a, b, c, d \in (0; 1)$ *và* $abcd = \dfrac{1}{100}$.

Bài giải: Biến đổi $T = \sqrt[3]{\Bigg(\dfrac{1}{1+\frac{1}{a}}\Bigg)^{2012}} + \sqrt[3]{\Bigg(\dfrac{1}{1+\frac{1}{b}}\Bigg)^{2012}} + \sqrt[3]{\Bigg(\dfrac{1}{1+\frac{1}{c}}\Bigg)^{2012}} + \sqrt[3]{\Bigg(\dfrac{1}{1+\frac{1}{d}}\Bigg)^{2012}}$. Đặt $x_1 = \dfrac{1}{a}, x_2 = \dfrac{1}{b}, x_3 = \dfrac{1}{c}, x_4 = \dfrac{1}{d}$. Khi đó ta có $T = \sqrt[3]{\Big(\dfrac{1}{1+x_1}\Big)^{2012}} + \sqrt[3]{\Big(\dfrac{1}{1+x_2}\Big)^{2012}} + \sqrt[3]{\Big(\dfrac{1}{1+x_3}\Big)^{2012}} + \sqrt[3]{\Big(\dfrac{1}{1+x_4}\Big)^{2012}}$ với $x_1x_2x_3x_4 = 100, x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 1$. Vì $f(x) = \sqrt[3]{x^{2012}}$ với $x \geqslant 0$ là hàm lồi và đơn điệu tăng nên có các bất đẳng thức sau đây:

$$\begin{aligned} T &\geqslant 4\sqrt[3]{\Bigg[\dfrac{\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\frac{1}{1+x_4}}{4}\Bigg]^{2012}} \\ &\geqslant 4\sqrt[3]{\Bigg[\dfrac{\frac{2}{1+\sqrt{x_1x_2}}+\frac{2}{1+\sqrt{x_3x_4}}}{4}\Bigg]^{2012}} \geqslant 4\sqrt[3]{\Bigg[\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}}\Bigg]^{2012}}. \end{aligned}$$

Vậy $T_{nn} = \dfrac{4}{\sqrt[3]{(1+\sqrt{10})^{2012}}}$ khi $a = b = c = d = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. □

Ví dụ 3.1.16. *Giả sử dãy các số thực* $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ *với* $a_1a_2\dots a_n = 1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của* $T = \dfrac{\sqrt{a_1^n}}{1+a_2} + \dfrac{\sqrt{a_2^n}}{1+a_3} + \dots + \dfrac{\sqrt{a_{n-1}^n}}{1+a_n} + \dfrac{\sqrt{a_n^n}}{1+a_1}$.

Bài giải: Vì $T(1+a_2+1+a_3+\dots+1+a_n+1+a_1) \geqslant \big(\sqrt{a_1^n}+\sqrt{a_2^n}+\dots+\sqrt{a_{n-1}^n}+\sqrt{a_n^n}\big)^2$ nên $T \geqslant \dfrac{\big(\sqrt{a_1^n}+\sqrt{a_2^n}+\dots+\sqrt{a_{n-1}^n}+\sqrt{a_n^n}\big)^2}{n+a_1+\dots+a_n}$. Xét hàm số $y = \sqrt{x^n} - \dfrac{n}{2}x$ với $x > 0$. Dễ dàng chỉ ra $\sqrt{x^n} \geqslant \dfrac{n}{2}x + 1 - \dfrac{n}{2}$. Như vậy $\sqrt{a_1^n}+\sqrt{a_2^n}+\dots+\sqrt{a_{n-1}^n}+\sqrt{a_n^n} \geqslant \dfrac{n}{2}\big(a_1+a_2+\dots+a_n\big) - \dfrac{n^2}{2} + n$. Vì $t = a_1+a_2+\dots+a_n \geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n} = n$ nên $T \geqslant \dfrac{\big(\frac{n}{2}(t-n)+n\big)^2}{n+t}$ hay $T \geqslant \dfrac{n^2}{4}\dfrac{\big(t-n+2\big)^2}{n+t}$ với $t \geqslant n$. Vì $y = \dfrac{\big(t-n+2\big)^2}{n+t}$ với $t \geqslant n$ là đồng biến nên $T \geqslant y_{nn} = y(n) = \dfrac{n}{2}$. Vậy $T_{nn} = \dfrac{n}{2}$ khi $a_1 = \dots = a_n = 1$. □

Ví dụ 3.1.17. *Giả sử dãy các số thực* $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ *với* $a_1a_2\dots a_n = 1$. *Chứng minh rằng* $T = \dfrac{a_1^2}{1+a_2+a_3} + \dfrac{a_2^2}{1+a_3+a_4} + \dots + \dfrac{a_{n-2}^2}{1+a_{n-1}+a_n} + \dfrac{a_{n-1}^2}{1+a_n+a_1} + \dfrac{a_n^2}{1+a_1+a_2} \geqslant \dfrac{n}{3}$.

Bài giải: Vì $T(1+a_2+a_3+1+a_3+a_4+\dots+1+a_{n-1}+a_n+1+a_n+a_1+1+a_1+a_2) \geqslant \big(a_1+a_2+\dots+a_n\big)^2$ nên $T \geqslant \dfrac{\big(a_1+a_2+\dots+a_n\big)^2}{n+2\big(a_1+a_2+\dots+a_n\big)}$. Xét hàm số $y = \dfrac{x^2}{2x+n}$ với $x = a_1+a_2+\dots+a_n \geqslant n$ có $y' = \dfrac{2x^2+6x}{\big(2x+3\big)^2} > 0$. Dễ dàng chỉ ra $y \geqslant \dfrac{n}{3}$. Dấu bằng xẩy ra khi $a_1 = \dots = a_n = 1$. □

Ví dụ 3.1.18. *Giả sử ba số thực* $a, b, c \in [0;2]$ *thỏa mãn* $a+b+c = 4$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $T = 4(ab+bc+ca) - 3abc$.

Bài giải: Vì vai trò a, b, c bình đẳng nên có thể coi $a \geqslant b \geqslant c$. Vậy $2 \geqslant a \geqslant \dfrac{4}{3}$. Biểu diễn $T = 4a(b+c) + bc(4-3a) \geqslant 4a(b+c) + \dfrac{(b+c)^2}{4}(4-3a)$ hay $T \geqslant 4a(4-a) + \dfrac{(4-a)^2}{4}(4-3a)$. Xét hàm số $y = \dfrac{(4-a)(3a^2+16)}{4}$ với

$2 \geqslant a \geqslant \dfrac{4}{3}$ và $y' = -\dfrac{(3a-4)^2}{4} \leqslant 0$. Dễ dàng chỉ ra $T \geqslant y \geqslant 14$. Dấu bằng xẩy ra khi $a = 2, b = c = 1$. Tóm lại $T_{nn} = 14$ khi $a = 2, b = c = 1$. □

Ví dụ 3.1.19. *Giả sử có 9 số thực a_{ij} và $A = (a_{ij})$ là matrận vuông cấp 3. Khi đó ta có $|\det(A)| \leqslant \sqrt{\prod_{i=1}^{3}\left(a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2\right)}$.*

Bài giải: Với ba véctơ $\vec{a}_i = (a_{i1}; a_{i2}; a_{i3}), i = 1, 2, 3$, ta có $|\det(A)|$ chính là thể tích hình hộp do ba véctơ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ tạo thành. Vì thể tích hình hộp không lớn hơn tích độ dài các cạnh nên $|\det(A)| \leqslant \sqrt{\prod_{i=1}^{3}\left(a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2\right)}$. □

Ví dụ 3.1.20. *Giả sử có 9 số thực $a_{ij} \in [-a; a]$ với $a > 0$ và $A = (a_{ij})$ là matrận vuông cấp 3. Khi đó ta có $|\det(A)| \leqslant 3\sqrt{3}a^3$.*

Bài giải: suy ra từ Ví dụ 3.1.19. □

Ví dụ 3.1.21. *Giả sử các số thực $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ thỏa mãn hệ sau:*

$$\begin{cases} x_1^2 - 4x_1 + y_1^2 - 2y_1 + 4 = 0 \\ x_2^2 - 4x_2 + y_2^2 - 2y_2 + 4 = 0 \\ x_3^2 - 4x_3 + y_3^2 - 2y_3 + 4 = 0. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của $S = x_1(y_2 - y_3) + x_2(3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$.

Bài giải: Hiển nhiên ba điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ nằm trên đường tròn $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ và $|S| = 2S_{ABC} \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Vậy $S_{ln} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ khi tam giác ABC đều và định hướng ngược chiều quay kim đồng hồ. □

Ví dụ 3.1.22. *Giả sử các số thực $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ thỏa mãn hệ sau đây:*

$$\begin{cases} x_1^2 - 4x_1 + y_1^2 - 4y_1 - 1 = 0 \\ x_2^2 - 4x_2 + y_2^2 - 4y_2 - 1 = 0 \\ x_3^2 - 4x_3 + y_3^2 - 4y_3 - 1 = 0. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} +$

$$\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}.$$

Bài giải: Hiển nhiên ba điểm $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2), C(x_3;y_3)$ nằm trên đường tròn $(x-2)^2+(y-2)^2=9$ và $T=AB+BC+CA$ nên $T\leqslant \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. Vậy $T_{ln}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ khi tam giác ABC đều. □

Ví dụ 3.1.23. *Giả sử các số thực* $a,b,c>0$ *biến thiên thỏa mãn* $abc=1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T=\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}.$$

Bài giải: Vì $\dfrac{3(a^3+b^3)}{a^2+ab+b^2}\geqslant a+b$, $\dfrac{3(b^3+c^3)}{b^2+bc+c^2}\geqslant b+c$ và $\dfrac{3(c^3+a^3)}{c^2+ca+a^2}\geqslant c+a$ nên $T\geqslant \dfrac{2(a+b+c)}{3}\geqslant 2\sqrt[3]{abc}$. Vậy $T_{nn}=2$ khi $a=b=c=1$. □

Ví dụ 3.1.24. *Giả sử các số thực* $a,b,c\geqslant 1$. *Chứng minh bất đẳng thức sau đây:* $\dfrac{1}{ab+a+1}+\dfrac{1}{bc+b+1}+\dfrac{1}{ca+c+1}\geqslant\dfrac{3}{2+abc}$ *và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $T=\dfrac{1}{ab+a+1}+\dfrac{1}{bc+b+1}+\dfrac{1}{ca+c+1}$.

Bài giải: Vì $a,b,c\geqslant 1$ nên ta có $(a-1)(b-1)(c+1)\geqslant 0$. Như vậy $2+abc\geqslant a+b-c+ac+bc-ab+1$. Tương tự $2+abc\geqslant -a+b+c+ac+ab-bc+1$ và $2+abc\geqslant a-b+c+ab+bc-ac+1$. Cộng ba bất đẳng thức được $6+3abc\geqslant 3+a+b+c+ab+bc+ca$. Biến đổi

$$\begin{aligned}(6+3abc)T &= (6+3abc)(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1})\\ &= [(ab+a+1)+(bc+b+1)+(ca+c+1)]\\ &\quad [\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}]\geqslant 9.\end{aligned}$$

Từ đây suy ra $T\geqslant\dfrac{3}{2+abc}$. Hiển nhiên $ab+a+1\geqslant 3, bc+b+1\geqslant 3$ và $ca+c+1\geqslant 3$. Vậy $T\leqslant 1$. Khi đó $T_{ln}=1$ khi $a=b=c=1$. □

Ví dụ 3.1.25. *Giả sử các số thực* $a,b,c\in[1;2]$. *Chứng minh bất đẳng thức sau đây:* $\dfrac{1}{4+a-ab}+\dfrac{1}{4+b-bc}+\dfrac{1}{4+c-ca}\geqslant\dfrac{3}{3+abc}$ *và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $T=\dfrac{1}{4+a-ab}+\dfrac{1}{4+b-bc}+\dfrac{1}{4+c-ca}$.

Bài giải: Vì $a, b, c \geqslant 1$ nên ta có $(a-1)(b+1)(c+1) \geqslant 0$. Như vậy $3+abc \geqslant -a+b+c+bc-ab-ca+4$. Tương tự $3+abc \geqslant a-b+c+ca-ab-bc+4$ và $3+abc \geqslant a+b-c+ab-bc-ca+4$. Cộng ba bất đẳng thức được $9+3abc \geqslant 12+a+b+c-ab-bc-ca$. Biến đổi

$$\begin{aligned}(9+3abc)T &= (9+3abc)(\frac{1}{4+a-ab}+\frac{1}{4+b-bc}+\frac{1}{4+c-ca})\\ &= [(4+a-ab)+(4+b-bc)+(4+c-ca)]\\ &\quad[\frac{1}{4+a-ab}+\frac{1}{4+b-bc}+\frac{1}{4+c-ca}] \geqslant 9.\end{aligned}$$

Từ đây suy ra $T \geqslant \dfrac{3}{3+abc}$. Bởi vì $2 \leqslant 4+a(1-b) \leqslant 4$ nên $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{4+a-ab} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Từ đây suy ra $\dfrac{3}{4} \leqslant T \leqslant \dfrac{3}{2}$. Như vậy $T_{nn} = \dfrac{3}{4}$ khi $a=b=c=1$ và $T_{ln} = \dfrac{3}{2}$ khi $a=b=c=2$. □

Ví dụ 3.1.26. *Giả sử các số thực dương biến thiên a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \left(\dfrac{a}{b}+c\right)\left(\dfrac{b}{c}+a\right)\left(\dfrac{c}{a}+b\right)$.*

Bài giải: Dễ dàng chỉ ra, nếu $x, y, z, u, v, t \geqslant 0$ thì $(x+u)(y+v)(z+t) \geqslant \left(\sqrt[3]{xyz}+\sqrt[3]{uvt}\right)^3$. Vậy $T \geqslant \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3 = 8$. Như vậy $T_{nn} = 8$ khi $a=b=c=1$. □

Ví dụ 3.1.27. *Giả sử các số thực biến thiên a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = a+b+c-abc$.*

Bài giải: Vì $2 = a^2+b^2+c^2 \geqslant 2bc$ nên $1 \geqslant bc$. Từ $(a+b+c-abc)^2 = [(b+c)+a(1-bc)]^2 \leqslant [a^2+(b+c)^2][1+(1-bc)^2]$ suy ra bất đẳng thức

$$T^2 \leqslant [2+2bc][2-2bc+b^2c^2] = 4-2b^2c^2(1-bc) \leqslant 4.$$

Do vậy $T \leqslant 2$ và thấy ngay $T_{ln} = 2$ khi $b=c=1, a=0$, chẳng hạn. □

Ví dụ 3.1.28. *Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = \frac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b^3+63cda}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c^3+63dab}}+\frac{d}{\sqrt[3]{d^3+63abc}}.$$

Bài giải: Ta chọn số thực s sao cho $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}} \geqslant \dfrac{a^s}{a^s+b^s+c^s+d^s}$ hay $\big(a^s+b^s+c^s+d^s\big)^3 \geqslant a^{3s-3}\big(a^3+63bcd\big) = a^{3s}+63a^{3s-3}bcd$. Lại có

$$\begin{aligned}
&\big(a^s+b^s+c^s+d^s\big)^3 - a^{3s}\\
=\ &\big(b^s+c^s+d^s\big)\big[\big(a^s+b^s+c^s+d^s\big)^2 + a^s\big(a^s+b^s+c^s+d^s\big)+a^{2s}\big]\\
\geqslant\ &3\sqrt[3]{b^sc^sd^s}.21\sqrt[21]{a^{15s}b^{9s}c^{9s}d^{9s}} = 63a^{5s/7}b^{16s/21}c^{16s/21}d^{16s/21}.
\end{aligned}$$

Chọn $s=\dfrac{21}{16}$ được $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}} \geqslant \dfrac{a^{21/16}}{a^{21/16}+b^{21/16}+c^{21/16}+d^{21/16}}$. Tương tự chứng minh cho ba số hạng còn lại. Từ đó suy ra $T \geqslant 1$. Do như vậy $T_{nn}=1$ khi $a=b=c=d=1$. □

Phân thức

Ví dụ 3.1.29. *Giả sử ba số $a,b,c \in [\frac{1}{3};3]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}.$$

Bài giải: Ta chỉ cần xét hoặc $a \geqslant b \geqslant c$ hoặc $a \geqslant c > b$.

Nếu $a \geqslant b \geqslant c$ ta sẽ chỉ ra $T \geqslant \dfrac{3}{2}$. Dấu bằng xẩy ra khi $a=b=c=1 \in [\frac{1}{3};3]$. Thật vậy, hàm số $y=\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+x}+\dfrac{x}{x+a}, b \geqslant x \geqslant \dfrac{1}{3}$, có $y' = \dfrac{(a-b)(x^2-ab)}{(a+x)^2(b+x)^2} \leqslant 0$. Vậy hàm y đơn điệu giảm. Do đó $y(c) \geqslant \dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+b}+\dfrac{b}{b+a} = \dfrac{3}{2}$ hay $T \geqslant \dfrac{3}{2}$.

Bây giờ giả thiết $a \geqslant c > b$. Xét $y = \dfrac{x}{x+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+x}, 3 \geqslant x \geqslant c$, có $y' = \dfrac{(b-c)(x^2-bc)}{(b+x)^2(c+x)^2} < 0$. Vậy hàm y đơn điệu giảm. Khi đó $y(a) \geqslant y(3) = \dfrac{3}{3+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+3} = f(b)$. Khảo sát hàm $f(b)$ theo ẩn b. Ta có $f'(b) = \dfrac{(c-3)(b^2-3c)}{(b+3)^2(b+c)^2} \geqslant 0$ vì $3 \geqslant c > b \geqslant \dfrac{1}{3}$. Như vậy $y(a) \geqslant y(3) =$

$f(b) \geqslant f\big(\dfrac{1}{3}\big) = \dfrac{9}{10} + \dfrac{1}{1+3c} + \dfrac{c}{c+3} \geqslant \dfrac{7}{5}$ qua biến đổi tương đương. Do đó $T_{nn} = \dfrac{7}{5} < \dfrac{3}{2}$ khi $a = 3, c = 1, b = \dfrac{1}{3}$. □

Ví dụ 3.1.30. [VMO 1982] *Giả sử* a *và* z *là những số thực,* n *là số nguyên dương. Nếu* $0 \leqslant a \leqslant 1$ *và* $a^{n+1} \leqslant z \leqslant 1$ *thì có* $\prod\limits_{k=1}^{n} \Big|\dfrac{z-a^k}{z+a^k}\Big| \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1-a^k}{1+a^k}$. *Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của* $T(z) = \prod\limits_{k=1}^{n} \Big|\dfrac{z-a^k}{z+a^k}\Big|$ *khi* $a^{n+1} \leqslant z \leqslant 1$.

Bài giải: Nếu $a = 1$ thì $z = 1$ và bất đẳng thức đúng vì hai vế đều bằng 0. Nếu $a = 0$ thì cả hai vế đều bằng 1 và bất đẳng thức cũng đúng. Xét $0 < a < 1$. Vì $1 > a > a^2 \cdots > a^n > 0$ và $a^{n+1} \leqslant z \leqslant 1$ nên có số nguyên dương r để $a^{r+1} < z \leqslant a^r$. Vậy $\Big|\dfrac{z-a^k}{z+a^k}\Big| = \dfrac{z-a^k}{z+a^k}$ khi $k > r$ và $\Big|\dfrac{z-a^k}{z+a^k}\Big| = -\dfrac{z-a^k}{z+a^k}$ khi $k \leqslant r$. Ta có

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{z-a^k}{z+a^k}\Big| - \frac{1-a^k}{1+a^k} &= \frac{z-a^k}{z+a^k} - \frac{1-a^k}{1+a^k} = \frac{2a^k(z-1)}{(1+a^k)(z+a^k)} \leqslant 0,\ k > r\\
\Big|\frac{z-a^i}{z+a^i}\Big| - \frac{1-a^k}{1+a^k} &= \frac{a^i-z}{z+a^i} - \frac{1-a^k}{1+a^k} = \frac{2(a^{r+1}-z)}{(1+a^k)(z+a^i)} \leqslant 0,\ k, i \leqslant r
\end{aligned}$$

và chọn $i + k = r + 1$. Từ các bất đẳng thức trên suy ra hai bất đẳng thức sau: $\prod\limits_{k=1}^{r} \Big|\dfrac{z-a^k}{z+a^k}\Big| \leqslant \prod\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1-a^k}{1+a^k}$ và $\prod\limits_{k=r+1}^{n} \Big|\dfrac{z-a^k}{z+a^k}\Big| \leqslant \prod\limits_{k=1+1}^{n} \dfrac{1-a^k}{1+a^k}$. Do đó ta nhận được $\prod\limits_{k=1}^{n} \Big|\dfrac{z-a^k}{z+a^k}\Big| \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1-a^k}{1+a^k}$. Từ đây suy ra giá trị lớn nhất của $T(z) = \prod\limits_{k=1}^{n} \Big|\dfrac{z-a^k}{z+a^k}\Big|$ bằng $\prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1-a^k}{1+a^k}$ tại $z = 1$. □

Ví dụ 3.1.31. *Ta luôn có* $\dfrac{p(x)}{x^n+1} = -\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x+\alpha_k}{x-\alpha_k} p(\alpha_k) + \dfrac{1}{2}p(0)$, *trong đó* $\alpha_k = \cos\dfrac{k\pi}{n} + i\sin\dfrac{k\pi}{n}, k = 1, 2, \ldots, n,$ *và đa thức* $p(x)$ *có* $\deg p(x) < n$. *Từ đó suy ra* $\sum\limits_{k=1}^{n} \cot\dfrac{k\pi}{2n}\cos\dfrac{k\pi}{n} = 0$ *và* $\sum\limits_{k=1}^{n} \cot\dfrac{k\pi}{2n}\sin\dfrac{k\pi}{n} = n.$

Bài giải: Hiển nhiên $\frac{p(x)}{x^n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{p(\alpha_k)}{n\alpha_k^{n-1}(x-\alpha_k)} = -\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k p(\alpha_k)}{x-\alpha_k}$. Cho $x=0$ có $p(0) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} p(\alpha_k)$. Khi đó ta có $\frac{p(x)}{x^n+1} - \frac{1}{2}p(0) =$

$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\alpha_k p(\alpha_k)}{x-\alpha_k} - \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} p(\alpha_k) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x+\alpha_k}{x-\alpha_k}p(\alpha_k).$$

Do vậy $\frac{p(x)}{x^n+1} = -\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x+\alpha_k}{x-\alpha_k}p(\alpha_k) + \frac{1}{2}p(0)$.

Khi chọn $p(x) = x$ và $x = 1$ ta có $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k}\alpha_k$. Dễ dàng biến đổi được $\frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k}\alpha_k = i\cot\frac{k\pi}{2n}(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n})$. Vậy $\sum\limits_{k=1}^{n}\cot\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{k\pi}{n} = 0$ và $\sum\limits_{k=1}^{n}\cot\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{k\pi}{n} = n$. □

Ví dụ 3.1.32. *Ta luôn có* $\frac{p(x)}{x^n-1} = \frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x+\alpha_k}{x-\alpha_k}p(\alpha_k) - \frac{1}{2}p(0)$, *trong đó* $\alpha_k = \cos\frac{k\pi}{2n} + i\sin\frac{k\pi}{2n}, k = 1, 2, \ldots, n$, *và đa thức* $p(x)$ *có* $\deg p(x) < n$. *Từ đây suy ra* $\frac{2n}{2^n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2\cos\frac{k\pi}{n} - \cos\frac{k\pi}{2n}}{5-\cos\frac{k\pi}{2n}}$.

Bài giải: Hiển nhiên $\frac{p(x)}{x^n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{p(\alpha_k)}{n\alpha_k^{n-1}(x-\alpha_k)} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k p(\alpha_k)}{x-\alpha_k}$. Cho $x=0$ có $p(0) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}p(\alpha_k)$. Khi đó ta có $\frac{p(x)}{x^n-1} + \frac{1}{2}p(0) =$

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\alpha_k p(\alpha_k)}{x-\alpha_k} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}p(\alpha_k) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x+\alpha_k}{x-\alpha_k}p(\alpha_k).$$

Do vậy $\frac{p(x)}{x^n-1} = \frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x+\alpha_k}{x-\alpha_k}p(\alpha_k) - \frac{1}{2}p(0)$.

Khi chọn $p(x) = x$ ta có $\frac{x}{x^n-1} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k^2}{x-\alpha_k}$. Cho $x = 2$ ta nhận được

$\dfrac{2}{2^n-1} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha_k^2}{2-\alpha_k}$. Từ đây suy ra $\dfrac{2n}{2^n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2\cos\dfrac{k\pi}{n} - \cos\dfrac{k\pi}{2n}}{5-\cos\dfrac{k\pi}{2n}}$. □

Ví dụ 3.1.33. *Giả sử* $f(x) = \dfrac{p(x)(x-a)+1}{q(x)(x-a)+1}$ *và* $g(x) = \dfrac{p_1(x)(x-b)+1}{q_1(x)(x-b)+1}$ *với* $p(x), p_1(x), q(x), q_1(x) \in \mathbb{R}[x]$ *và* $a < b$. *Nếu* $f(x)$ *và* $g(x)$ *không triệt tiêu trên* $[a;b]$ *thì tồn tại* $x_0 \in (a;b)$ *thỏa mãn* $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)}$.

Bài giải: Xét $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Khi đó $\phi(a) = \phi(b)$. Theo Định lý Rolle tồn tại $x_0 \in (a;b)$ để $\phi'(x_0) = 0$ hay $f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0) = 0$. Do vậy $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)}$. □

Ví dụ 3.1.34. *Giả sử các phân thức hữu tỷ* $f_k(x), g_k(x)$ *xác định trên* $[a;b]$ *và* $g_k(a) \neq g_k(b)$ *với* $k = 1, 2, \ldots, n$. *Khi đó tồn tại* $x_0 \in (a;b)$ *thỏa mãn* $\sum\limits_{k=1}^{n} f'(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k'(x_0)\dfrac{f_k(b)-f_k(a)}{g_k(b)-g_k(a)}$.

Bài giải: Xét $\phi(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\Big[f_k(x) - \big(g_k(x)-g_k(a)\big)\dfrac{f_k(b)-f_k(a)}{g_k(b)-g_k(a)}\Big]$. Khi đó $\phi(a) = \phi(b)$. Theo Định lý Rolle tồn tại $x_0 \in (a;b)$ để $\phi'(x_0) = 0$ hay $\sum\limits_{k=1}^{n} f'(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k'(x_0)\dfrac{f_k(b)-f_k(a)}{g_k(b)-g_k(a)}$. □

Ví dụ 3.1.35. *Giả sử* $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{2011}$ *là 2011 nghiệm của phương trình* $\sum\limits_{k=1}^{2010}\dfrac{x}{x-a_k} + x + d = 0$. *Đặt* $f(x) = \prod\limits_{k=1}^{2011}(x-x_k)$. *Tính tổng* $T = \sum\limits_{k=1}^{2010}\dfrac{a_k^2}{f(a_k)}$.

Bài giải: Ta có $\sum\limits_{k=1}^{2010}\dfrac{x}{x-a_k} + x + d = \dfrac{f(x)}{\prod\limits_{k=1}^{2010}(x-a_k)}$. □

Giả sử $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Khi đó ta ký hiệu

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \delta_k(x) &= \sum_{1\leqslant i_1 < i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}, N_k(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.1.36. *Giả sử* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n), b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ *với tất cả các* $a_k, b_k \geqslant 0$ *và có cặp* i, j *để* $a_i, b_j \neq 0$. *Khi đó* $\dfrac{\delta_2(a+b)}{\delta_1(a+b)} \geqslant \dfrac{\delta_2(a)}{\delta_1(a)} + \dfrac{\delta_2(b)}{\delta_1(b)}$.

Bài giải: Xét hiệu $H = \dfrac{\delta_2(a+b)}{\delta_1(a+b)} - \dfrac{\delta_2(a)}{\delta_1(a)} - \dfrac{\delta_2(b)}{\delta_1(b)}$. Khi đó ta có biểu diễn $H = \dfrac{\delta_2(a+b)\delta_1(a)\delta_1(b) - \delta_1(a+b)\big(\delta_2(a)\delta_1(b) + \delta_2(b)\delta_1(a)\big)}{\delta_1(a+b)\delta_1(a)\delta_1(b)}$. Cần chỉ ra $P = \delta_2(a+b)\delta_1(a)\delta_1(b) - \delta_1(a+b)\big(\delta_2(a)\delta_1(b) + \delta_2(b)\delta_1(a)\big) \geqslant 0$. Thật vậy

$$\begin{aligned}
2P &= 2\delta_2(a+b)\delta_1(a)\delta_1(b) - 2\delta_1(a+b)\big(\delta_2(a)\delta_1(b) + \delta_2(b)\delta_1(a)\big)\\
&= [\delta_1(a+b)^2 - N_2(a) - N_2(b)]\delta_1(a)\delta_1(b)\\
&- \delta_1(a+b)[(\delta_1(a)^2 - N_2(a))\delta_1(b) + (\delta_1(b)^2 - N_2(b))\delta_1(a)]\\
&= [-N_2(a) - N_2(b)]\delta_1(a)\delta_1(b) + \delta_1(a+b)[N_2(a)\delta_1(b) + N_2(b)\delta_1(a)]\\
&= N_2(a)\delta_1(b)^2 + N_2(b)\delta_1(a)^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

vì $\delta_1(a+b) = \delta_1(a)+\delta_1(b)$. Như vậy $P \geqslant 0$ và $\dfrac{\delta_2(a+b)}{\delta_1(a+b)} \geqslant \dfrac{\delta_2(a)}{\delta_1(a)} + \dfrac{\delta_2(b)}{\delta_1(b)}$. □

Ví dụ 3.1.37. *Giả sử* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n), b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ *với mọi* $a_k, b_k \geqslant 0$ *và có cặp* i, j *để* $a_i, b_j \neq 0$. *Với mọi số nguyên* $r \geqslant 2$ *luôn có*

$$\frac{\delta_r(a+b)}{\delta_{r-1}(a+b)} \geqslant \frac{\delta_r(a)}{\delta_{r-1}(a)} + \frac{\delta_r(b)}{\delta_{r-1}(b)}.$$

Bài giải: Trường hợp $r = 2$, bất đẳng thức đã được chứng minh. Xét trường hợp $r > 2$. Ký hiệu $\hat{x}_k = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Dễ dàng kiểm tra được $r\delta_r(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\delta_{r-1}(\hat{x}_k)$ và $\delta_r(x) = x_k\delta_{r-1}(\hat{x}_k) + \delta_r(\hat{x}_k)$. Từ hệ thức cuối suy ra $n\delta_r(x) = \sum\limits_{k=1} x_k\delta_{r-1}(\hat{x}_k) + \sum\limits_{k=1} \delta_r(\hat{x}_k) = r\delta_r(x) + \sum\limits_{k=1} \delta_r(\hat{x}_k)$. Ta lại còn có $\delta_r(x) - \delta_r(\hat{x}_k) = x_k\delta_{r-1}(\hat{x}_k)$ và $\delta_{r-1}(x) - \delta_{r-1}(\hat{x}_k) = x_k\delta_{r-2}(\hat{x}_k)$. Như vậy $\delta_r(x) - \delta_r(\hat{x}_k) = x_k\big(\delta_{r-1}(x) - x_k\delta_{r-2}(\hat{x}_k)\big) = x_k\delta_{r-1}(x) - x_k^2\delta_{r-2}(\hat{x}_k)$. Lấy tổng $n\delta_r(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \delta_r(\hat{x}_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\delta_{r-1}(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\delta_{r-2}(\hat{x}_k)$ hay hệ thức

$$r\delta_r(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k\delta_{r-1}(x) - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\delta_{r-2}(\hat{x}_k).$$

Vậy $r\dfrac{\delta_r(x)}{\delta_{r-1}(x)} = \delta_1(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\dfrac{\delta_{r-2}(\hat{x}_k)}{\delta_{r-1}(x)} = \delta_1(x) - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x_k^2}{\dfrac{\delta_{r-1}(x)}{\delta_{r-2}(\hat{x}_k)}}$. Bởi vì $x_k = \dfrac{\delta_{r-1}(x)}{\delta_{r-2}(\hat{x}_k)} - \dfrac{\delta_{r-1}(\hat{x}_k)}{\delta_{r-2}(\hat{x}_k)}$ nên có $r\dfrac{\delta_r(x)}{\delta_{r-1}(x)} = \delta_1(x) - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x_k^2}{x_k + \dfrac{\delta_{r-1}(\hat{x}_k)}{\delta_{r-2}(\hat{x}_k)}}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh $\delta_1(a+b) - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(a_k+b_k)^2}{a_k+b_k+\dfrac{\delta_{r-1}((\widehat{a+b})_k)}{\delta_{r-2}((\widehat{a+b})_k)}} \geqslant$ $\delta_1(a) - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k^2}{a_k+\dfrac{\delta_{r-1}(\hat{a}_k)}{\delta_{r-2}(\hat{a}_k)}} + \delta_1(b) - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{b_k^2}{b_k+\dfrac{\delta_{r-1}(\hat{b}_k)}{\delta_{r-2}(\hat{b}_k)}}$ hay

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+\dfrac{\delta_{r-1}(\hat{a}_k)}{\delta_{r-2}(\hat{a}_k)}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{b_k+\dfrac{\delta_{r-1}(\hat{b}_k)}{\delta_{r-2}(\hat{b}_k)}} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k+b_k)^2}{a_k+b_k+\dfrac{\delta_{r-1}((\widehat{a+b})_k)}{\delta_{r-2}((\widehat{a+b})_k)}}.$$

Bất đẳng thức $\dfrac{\delta_r(a+b)}{\delta_{r-1}(a+b)} \geqslant \dfrac{\delta_r(a)}{\delta_{r-1}(a)} + \dfrac{\delta_r(b)}{\delta_{r-1}(b)}$ được chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Với $r=2$, bất đẳng thức đúng. Giả sử bất đẳng thức đúng với $r-1$. Khi đó $x_k = \dfrac{\delta_{r-1}((\widehat{a+b})_k)}{\delta_{r-2}((\widehat{a+b})_k)} \geqslant \dfrac{\delta_{r-1}(\hat{a}_k)}{\delta_{r-2}(\hat{a}_k)} + \dfrac{\delta_{r-1}(\hat{b}_k)}{\delta_{r-2}(\hat{b}_k)} = u_k+v_k$ với mỗi k. Bởi vì $\dfrac{a_k^2}{a_k+u_k} + \dfrac{b_k^2}{b_k+v_k} - \dfrac{(a_k+b_k)^2}{a_k+b_k+x_k} \geqslant \dfrac{a_k^2}{a_k+u_k} + \dfrac{b_k^2}{b_k+v_k} - \dfrac{(a_k+b_k)^2}{a_k+b_k+u_k+v_k} \geqslant 0$ nên bất đẳng thức dưới đây là đúng:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+\dfrac{\delta_{r-1}(\hat{a}_k)}{\delta_{r-2}(\hat{a}_k)}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{b_k+\dfrac{\delta_{r-1}(\hat{b}_k)}{\delta_{r-2}(\hat{b}_k)}} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k+b_k)^2}{a_k+b_k+\dfrac{\delta_{r-1}((\widehat{a+b})_k)}{\delta_{r-2}((\widehat{a+b})_k)}}.$$

Do đó $\dfrac{\delta_r(a+b)}{\delta_{r-1}(a+b)} \geqslant \dfrac{\delta_r(a)}{\delta_{r-1}(a)} + \dfrac{\delta_r(b)}{\delta_{r-1}(b)}$ đúng với mọi số nguyên $r \geqslant 2$. $\square$

Ví dụ 3.1.38. *Giả sử đa thức* $f(x) = x^n + \delta_1 x^{n-1} + \cdots + \delta_n \in \mathbb{R}[x]$ *có* n *nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng* $\delta_i^2 > \dfrac{(n-i+1)(i+1)}{i(n-i)}\delta_{i-1}\delta_{i+1}$

với $i = 1, \ldots, n-1$.

Bài giải: Đặt $p(y) = y^n f(y^{-1})$. Khi đó các nghiêm của $p(y)$ cũng thực và phân biệt. Đa thức bậc hai

$$p^{(n-2)}(y) = (n-2)(n-3)\ldots.4.3.(n(n-1)\delta_n y^2 + 2(n-1)\delta_{n-1}y + 2\delta_{n-2}) = 0$$

có hai nghiệm thực phân biệt theo Định lý Rolle. Vậy $\Delta > 0$ hay $\delta_{n-1}^2 > \dfrac{2n}{n-1}\delta_{n-2}\delta_n$. Đặt

$$p^{(n-i-1)}(y) = b_0x^{i+1}b_1x^i + \cdots + b_{i-1}x^2 + b_ix + b_{i+1}.$$

Theo bất đẳng thức trên có $b_i^2 > \dfrac{2(i+1)}{i}b_{i-1}b_{i+1}$. Vì các hệ số thỏa mãn

$$\begin{aligned} b_{i-1} &= (n-i-1)(n-i-2)\ldots.2.1\delta_{i-1} \\ b_i &= (n-i)(n-i-1)\ldots.3.2\delta_i \\ b_{i+1} &= (n-i+1)(n-i)\ldots.4.3\delta_{i+1} \end{aligned}$$

nên ta nhận được $\delta_i^2 > \dfrac{(n-i+1)(i+1)}{i(n-i)}\delta_{i-1}\delta_{i+1}$ với $i = 1, \ldots, n-1$. □

Ví dụ 3.1.39. *Với* $a_1, \ldots, a_n \in (0;1)$ *và các số thực dương* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *thỏa mãn điều kiện* $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ *ta luôn có bất đẳng thức dưới đây:*

$$\frac{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_k}{1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_k} \leqslant \prod_{k=1}^{n} \Big(\frac{1+a_k}{1-a_k}\Big)^{\alpha_k}.$$

Bài giải: Xét hàm số $y = \ln\Big(\dfrac{1+x}{1-x}\Big)$ với $x \in (0;1)$. Hàm y đơn điệu tăng và lồi trên $(0;1)$ nên theo Bất đẳng thức Jensen ta có

$$\ln\left(\frac{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_k}{1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ln\Big(\frac{1+a_k}{1-a_k}\Big) = \ln\prod_{k=1}^{n}\Big(\frac{1+a_k}{1-a_k}\Big)^{\alpha_k}$$

và như vậy ta có bất đẳng thức $\dfrac{1+\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k a_k}{1-\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k a_k} \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n}\Big(\dfrac{1+a_k}{1-a_k}\Big)^{\alpha_k}$. □

Ví dụ 3.1.40. *Với* $a_1, \dots, a_n \in (0;1)$ *ta luôn có bất đẳng thức dưới đây:*

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-a_k)}{\Big[\sum\limits_{k=1}^{n}(1-a_k)\Big]^n} \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)}{\Big[\sum\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)\Big]^n}.$$

Bài giải: Kết quả được suy ra từ Ví dụ 3.1.39 với $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$. □

Ví dụ 3.1.41. *Với* $a_1, \dots, a_n \in (0; \frac{1}{2}]$ *và các số thực dương* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *thỏa mãn điều kiện* $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k = 1$ *ta luôn có bất đẳng thức dưới đây:*

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k a_k}{1-\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k a_k} \geqslant \prod_{k=1}^{n}\Big(\frac{a_k}{1-a_k}\Big)^{\alpha_k}.$$

Từ đây suy ra giá trị nhỏ nhất của $T = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k a_k}{\Big(1-\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k a_k\Big)\prod\limits_{k=1}^{n}\Big(\dfrac{a_k}{1-a_k}\Big)^{\alpha_k}}$.

Bài giải: Xét hàm số $y = \ln\Big(\dfrac{x}{1-x}\Big)$ với $x \in (0; \frac{1}{2}]$. Hàm y đơn điệu tăng và lõm trên $(0; \frac{1}{2}]$ nên theo Bất đẳng thức Jensen ta có

$$\ln\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k a_k}{1-\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k a_k}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \ln\Big(\frac{a_k}{1-a_k}\Big) = \ln\prod_{k=1}^{n}\Big(\frac{a_k}{1-a_k}\Big)^{\alpha_k}$$

và như vậy ta có bất đẳng thức $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_k}{1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_k} \geqslant \prod\limits_{k=1}^{n} \Big(\dfrac{a_k}{1-a_k}\Big)^{\alpha_k}$. Như vậy $T \geqslant 1$. Dấu bằng xẩy ra khi $a_1 = \cdots = a_n = \dfrac{1}{2}$. Do đó $T_{nn} = 1$. □

Ví dụ 3.1.42. *Với* $a_1, \ldots, a_n \in (0; \frac{1}{2}]$ *ta luôn có bất đẳng thức dưới đây:*

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k}{\Big[\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\Big]^n} \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (1-a_k)}{\Big[\sum\limits_{k=1}^{n} (1-a_k)\Big]^n}.$$

Từ đây suy ra giá trị lớn nhất của $T = \left(\dfrac{n - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}\right)^n \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{1-a_k}$.

Bài giải: Kết quả được suy ra từ Ví dụ 3.1.41 với $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$. Hiển nhiên $T \leqslant 1$ và $T_{ln} = 1$ khi $a_1 = \cdots = a_n = \dfrac{1}{2}$. □

3.2 Một vài bất đẳng thức trong hình sơ cấp

Mục này giới thiệu một phương pháp phát hiện ra các bất đẳng thức trong tam giác qua phương trình đa thức bậc ba.
Cho ΔABC với độ dài cạnh là a, b, c, bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R, bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3, nửa chu vi p và diện tích S. Ta sẽ chỉ ra a, b, c là ba nghiệm của $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ và r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$.

Mệnh đề 3.2.1. *Cho* ΔABC *với độ dài ba cạnh* $BC = a, CA = b, AB = c$. *Ký hiệu* p *là nửa chu vi,* r *và* R *là bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp. Khi đó* a, b, c, *là ba nghiệm của phương trình*

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0.$$

Chứng minh: Từ $\tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{p-a}$ và $a = 2R\sin A$ suy ra $a = 2R\dfrac{2\tan\dfrac{A}{2}}{1+\tan^2\dfrac{A}{2}}$ hay $a = 4R\dfrac{\dfrac{r}{p-a}}{1+(\dfrac{r}{p-a})^2} = 4Rr\dfrac{p-a}{r^2+(p-a)^2}$. Như vậy, ta có quan hệ $a(a^2-2pa+p^2+r^2) = 4Rr(p-a)$ hay $a^3-2pa^2+(p^2+r^2+4Rr)a-4Rrp = 0$. Do đó a là một nghiệm của $x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4Rrp = 0$. Tương tự, b và c cũng là nghiệm của phương trình này. □

Mệnh đề 3.2.2. *Cho ΔABC với nửa chu vi p, bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp r, R và bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3. Khi đó $r_1, r_2.r_3$ là ba nghiệm của phương trình $x^3-(4R+r)x^2+p^2x-p^2r = 0$.*

Chứng minh: Từ $\tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{r_1}{p}$ và $a = 2R\sin A$ suy ra $a = 2R\dfrac{2\tan\dfrac{A}{2}}{1+\tan^2\dfrac{A}{2}}$ hay $a = 4R\dfrac{\dfrac{r_1}{p}}{1+\dfrac{r_1^2}{p^2}} = 4Rr_1\dfrac{p}{r_1^2+p^2}$. Bởi vì $r_1(p-a) = S = rp$ nên ta có quan hệ $\dfrac{(r_1-r)p}{r_1} = a = 4Rr_1\dfrac{p}{r_1^2+p^2}$ hay $(r_1-r)(r_1^2+p^2) = 4Rr_1^2$. Do đó r_1 là một nghiệm của $x^3-(4R+r)x^2+p^2x-p^2r = 0$. Tương tự, r_2 và r_3 cũng là nghiệm của phương trình này. □

Ví dụ 3.2.3. *Cho ΔABC với bán kính các đường tròn bàng tiếp r_1, r_2, r_3. Khi đó có bất đẳng thức:*

$$2\frac{r_1-r}{r_1+r}\frac{r_2-r}{r_2+r}\frac{r_3-r}{r_3+r}+\frac{r_1-r}{r_1+r}\frac{r_2-r}{r_2+r}+\frac{r_2-r}{r_2+r}\frac{r_3-r}{r_3+r}+\frac{r_3-r}{r_3+r}\frac{r_1-r}{r_1+r}<\frac{11}{10}.$$

Bài giải: r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3-(4R+r)x^2+p^2x-p^2r = 0, (1)$. Xét phép biến đổi $y = \dfrac{x-r}{x+r}$. Dễ thấy $y \neq 1$ và $x = \dfrac{r(y+1)}{1-y}$. Thay x vào phương trình (1) ta nhận được phương trình đa thức bậc ba sau đây

$$(r^2+2Rr+p^2)y^3+(2r^2+2Rr-2p^2)y^2+(r^2-2Rr+p^2)y-2Rr = 0.$$

Gọi y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của phương trình này. Khi đó ta có hệ thức $2y_1y_2y_3 + y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = \dfrac{4Rr + r^2 - 2Rr + p^2}{r^2 + 2Rr + p^2} = 1 < \dfrac{11}{10}$. □

Ví dụ 3.2.4. *Cho ΔABC với độ dài ba cạnh a, b, c và bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R. Khi đó ta có bất đẳng thức*

(i) $(a^2 + 2Rr)(b^2 + 2Rr)(c^2 + 2Rr) \leqslant R^2(ab + bc + ca - 2Rr)^2$.

(ii) $(a^2 + 2Rr)(b^2 + 2Rr)(c^2 + 2Rr) \leqslant 64R^6$.

Bài giải: (i) a, b, c là ba nghiệm của $x^3 - 2px^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)x - 4Rrp = 0$. Xét phép biến đổi $y = x^2 + 2Rr$. Đặt $T = p^2 + 2Rr + r^2$. Khử x để được phương trình đa thức bậc ba sau đây

$$y^3 - (4p^2 + 2Rr - 2T)y^2 + (T^2 - 2Rr)y - 2RrT^2 = 0.$$

Gọi y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của phương trình này. Vì $ab + bc + ca = T + 2Rr$ nên $y_1y_2y_3 = 2RrT^2 = 2Rr(ab + bc + ca - 2Rr)^2 \leqslant R^2(ab + bc + ca - 2Rr)^2$.
(ii) Đặt $P = (a^2 + 2Rr)(b^2 + 2Rr)(c^2 + 2Rr)$. Vì $4p^2 \geqslant 3(ab + bc + ca)$ và $4p^2 \leqslant 27R^2$ nên $P \leqslant 2Rr(9R^2 - 2Rr)^2$. Như vậy $P \leqslant R^3.2r(9R - 2r)^2$. Xét hàm số $y = x(9R - x)^2$ với $0 < x \leqslant R$. Vì $y' > 0$ nên $y \leqslant 64R^3$. □

Ví dụ 3.2.5. *Ký hiệu r_1, r_2, r_3 là bán kính các đường tròn bàng tiếp tam giác ABC. Khi đó ta có bất đẳng thức $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 \leqslant \dfrac{27R^2}{4}$.*

Bài giải: Vì r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$ nên $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = p^2$. Vì $p = R(\sin A + \sin B + \sin C) \leqslant 3R\sin\dfrac{A + B + C}{3} = \dfrac{3\sqrt{3}R}{2}$ nên $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 \leqslant \dfrac{27R^2}{4}$. □

Ví dụ 3.2.6. *Cho ΔABC với độ dài ba cạnh là $a, b, c, p = \dfrac{a + b + c}{2}$ và bán kính đường tròn nội tiếp r. Hãy chứng minh các kết quả sau đây:*

(i) $(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab) \geqslant 8p^3abc - (p^2 + 9r^2)^3$.

(ii) $\dfrac{(a - b)^2}{ab} + \dfrac{(b - c)^2}{bc} + \dfrac{(c - a)^2}{ca} \leqslant \dfrac{27R^2 + 4r^2}{8Rr} - 7$.

Bài giải: Ta biết, nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ thì

$$(x_1^2 - x_2x_3)(x_2^2 - x_3x_1)(x_3^2 - x_1x_2) = a_1^3a_3 - a_2^3$$
$$\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2} + \frac{(x_2-x_3)^2}{x_2x_3} + \frac{(x_3-x_1)^2}{x_3x_1} = \frac{a_1a_2}{a_3} - 9, \text{ (tự chứng minh).}$$

Vì a, b, c, là ba nghiệm của $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ nên (i) $(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab) = 32p^4Rr - (p^2 + r^2 + 4Rr)^3$. Vì $4Rrp = abc$ và $R \geqslant 2r$ nên $(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab) \leqslant 8p^3abc - (p^2 + 9r^2)^3$.

(ii) Từ hệ thức trên $\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = \frac{2p(p^2 + r^2 + 4Rr)}{4Rrp} - 9$ suy ra $\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = \frac{p^2 + r^2}{2Rr} - 7 \leqslant \frac{27R^2 + 4r^2}{8Rr} - 7.$ □

Ví dụ 3.2.7. *Cho ΔABC với bán kính các đường tròn ngoại tiếp là R, bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3, nửa chu vi p. Chứng minh rằng*

$$\Big(\frac{r_1^2}{p^2} + 1\Big)\Big(\frac{r_2^2}{p^2} + 1\Big)\Big(\frac{r_3^2}{p^2} + 1\Big) \geqslant \frac{64}{27}.$$

Bài giải: r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$. Xác định phương trình nhận $y_1 = r_1^2 + p^2, y_2 = r_2^2 + p^2, y_3 = r_3^2 + p^2$ làm ba nghiệm. Khử x từ hệ $\begin{cases} x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \\ x^2 + p^2 - y = 0. \end{cases}$ Ta có ngay hệ $\begin{cases} x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \\ x^3 + p^2x - yx = 0 \end{cases}$ và $(4R + r)x^2 - yx + p^2r = 0$ hay phương trình $(4R + r)(y - p^2) - yx + p^2r = 0$. Đặt $T = 4R + r$. Khi đó $x = \frac{Ty - 4Rp^2}{y}$. Vậy $\frac{(Ty - 4Rp^2)^2}{y^2} + p^2 - y = 0$ hay $y^3 - (T^2 + p^2)y^2 + 8RTp^2y - 16R^2p^4 = 0$. Phương trình này có ba nghiệm là y_1, y_2, y_3. Do đó $\frac{(r_1^2 + p^2)(r_2^2 + p^2)(r_3^2 + p^2)}{p^6} = \frac{y_1y_2y_3}{p^6} = \frac{16R^2p^4}{p^6}$. Từ hệ thức cuối suy ra đồng nhất thức $\Big(\frac{r_1^2}{p^2} + 1\Big)\Big(\frac{r_2^2}{p^2} + 1\Big)\Big(\frac{r_3^2}{p^2} + 1\Big) = \frac{16R^2}{p^2} \geqslant \frac{64}{27}$. □

Ví dụ 3.2.8. *Cho ΔABC với bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R, bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3. Khi đó ta luôn có bất đẳng thức thức dưới đây:*

$$\frac{1}{(r - r_1)(r - r_2)} + \frac{1}{(r - r_2)(r - r_3)} + \frac{1}{(r - r_3)(r - r_1)} \leqslant \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}.$$

Bài giải: Vì r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$ nên $f(x) = x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$. Lấy hai lần đạo hàm được $3x - 4R - r = (x - r_1) + (x - r_2) + (x - r_3)$. Từ đây được $\dfrac{3x - 4R - r}{f(x)} = \dfrac{1}{(x - r_1)(x - r_2)} + \dfrac{1}{(x - r_2)(x - r_3)} + \dfrac{1}{(x - r_3)(x - r_1)}$. Cho $x = r$ có $\dfrac{1}{(r - r_1)(r - r_2)} + \dfrac{1}{(r - r_2)(r - r_3)} + \dfrac{1}{(r - r_3)(r - r_1)} = \dfrac{2R - r}{2Rr^2} \leqslant \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{R^2}$. □

Chú ý 3.2.9. *Cho đến nay chưa có đa thức bậc 4 với hệ tử là các đa thức của bán kính mặt cầu nội, ngoại tiếp r, R của tứ diện $ABCD$ nhận bán kính các mặt cầu bàng tiếp r_1, r_2, r_3, r_4 làm nghiệm và bất đẳng thức liên quan giữa chúng.*

3.3 Phương trình và hệ phương trình

Ví dụ 3.3.1. *Phương trình $12x^{2011} + 18x^5 - 5x^3 - 7x - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm dương.*

Bài giải: Vì $f(x) = 12x^{2011} + 18x^5 - 5x^3 - 7x - 1$ có $f(0) = -1 < 0$ và $f(1) = 17 > 0$ nên $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm dương $x_0 \in (0; 1)$. Khi $x > 0$ viết $12x^{2008} + 18x^2 = 5 + \dfrac{7}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$. Vì vế trái là hàm đồng biến, còn vế phải là hàm nghịch biến nên $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm dương. □

Ví dụ 3.3.2. *Với $a, b, c \geqslant 0$, hãy giải phương trình $a\sqrt{x^2 - b^2 - c^2} + b\sqrt{x^2 - c^2 - a^2} + c\sqrt{x^2 - a^2 - b^2} = a^2 + b^2 + c^2$.*

Bài giải: $x = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. □

Ví dụ 3.3.3. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 25 \\ y^2 + yz + z^2 = 49 \\ z^2 + zx + x^2 = 121 \\ x, y, z \geqslant 0. \end{cases}$

Bài giải: Từ các phương trìn suy ra $0 \leqslant x \leqslant 5$ và $0 \leqslant z \leqslant 7$. Vậy $121 = z^2 + zx + x^2 \leqslant 25 + 35 + 49 = 109 < 121$: mâu thuẫn. Do đó, hệ vô nghiệm. □

Ví dụ 3.3.4. *Giải phương trình* $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}=\sqrt{z^2+zx+x^2}$.

Bài giải: Với $\vec{a}=(y+\frac{x}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ và $\vec{b}=(y+\frac{z}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}z)$ ta có $\vec{a}-\vec{b}=(\frac{x-z}{2};\frac{\sqrt{3}(x+z)}{2})$. Bởi vì $|\vec{a}|+|\vec{b}|\geqslant|\vec{a}-\vec{b}|$ nên từ phương trình suy ra $|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ hay $\vec{a}.\vec{b}=0$. Như vậy, hoặc $x=y=0,z\in\mathbb{R}$ hoặc $x=z=0,y\in\mathbb{R}$ hoặc $y=z=0,x\in\mathbb{R}$ hoặc $x=y=0,z\in\mathbb{R}$ hoặc $2y^2+xy+yz-xz=0$. □

Ví dụ 3.3.5. *Xác định* x,y *biết* $\tan^2 x+\tan^2 y+\cot^2(x+y)=1$.

Bài giải: Vì $\cot(x+y)=\dfrac{1-\tan x\tan y}{\tan x+\tan y}$ nên ta có

$$\tan x\tan y+\tan y\cot(x+y)+\tan x\cot(x+y)=1$$

và nó bằng $\tan^2 x+\tan^2 y+\cot^2(x+y)$. Từ đó suy ra $\tan x=\tan y=\cot(x+y)$. Vậy $\tan x=\tan y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Do đó có x,y. □

Ví dụ 3.3.6. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases}3x+7y=20,x>0\\ \dfrac{xy^2}{\left(2x+\sqrt{4x^2+y^2}\right)^3}=\dfrac{1}{16}.\end{cases}$

Bài giải: Với $x=r\cos t,y=2r\sin t$ có $\dfrac{4r^3\cos t\sin^2 t}{\left(2r\cos t+\sqrt{4r^2}\right)^3}=\dfrac{1}{16}$, trong đó $r>0$. Vậy $8\cos t(1-\cos t)=(\cos t+1)^2$ hay $9\cos^2 t-6\cos t+1=0$. Giải ra $\cos t=\dfrac{1}{3}$ và $\sin t=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Vì $20=3x+7y=r(1\pm\dfrac{28\sqrt{2}}{3})$ nên được $r=\dfrac{20}{1+\dfrac{28\sqrt{2}}{3}}$ bởi vì $x>0$. Như vậy $\begin{cases}x=\dfrac{20}{3\left(1+\dfrac{28\sqrt{2}}{3}\right)}\\ y=\dfrac{40\sqrt{2}}{3\left(1+\dfrac{28\sqrt{2}}{3}\right)}.\end{cases}$ □

Ví dụ 3.3.7. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases}(x_1+x_2)^{2011}=x_3\\(x_2+x_3)^{2011}=x_4\\\dots\\(x_{n-1}+x_n)^{2011}=x_1\\(x_n+x_1)^{2011}=x_2.\end{cases}$

Bài giải: Dễ dàng kiểm tra, nếu bộ $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ là nghiệm của hệ thì $(a_k,a_{k+1},\dots,a_n,a_1,\dots,a_{k-1})$ cũng là nghiệm của hệ. Không hạn chế có thể giả thiết $a_1=\max\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$. Khi đó $a_2=(a_n+a_1)^{2011}\geqslant(a_{n-1}+a_n)^{2011}=a_1$. Vậy $a_2=a_1$. Hoàn toàn tương tự suy ra $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_3=a_2=a_1$. Như vậy $(a_1+a_1)^{2011}=a_1$. Giải ra hoặc $a_1=0$ hoặc $a_1=\pm\frac{1}{\sqrt[2010]{2^{2011}}}$. Hệ đã cho có 3 nghiệm $(0,0,\dots,0)$, $(\frac{1}{\sqrt[2010]{2^{2011}}},\dots,\frac{1}{\sqrt[2010]{2^{2011}}})$ và $(-\frac{1}{\sqrt[2010]{2^{2011}}},\dots,-\frac{1}{\sqrt[2010]{2^{2011}}})$. □

Ví dụ 3.3.8. *Giả sử ba số* $a,b,c>0$. *Hãy giải hệ phương trình sau:*

$$\begin{cases}x+y+z=a+b+c\\4xyz=abc+a^2x+b^2y+c^2z\\x,y,z\geqslant 0.\end{cases}$$

Bài giải: Hiển nhiên có $1=\frac{abc}{4xyz}+\frac{a^2}{4yz}+\frac{b^2}{4zx}+\frac{c^2}{4xy}$. Đặt $\cos A=\frac{a}{2\sqrt{yz}}$, $\cos B=\frac{b}{2\sqrt{zx}},\cos C=\frac{c}{2\sqrt{xy}}$. Từ hệ thức dưới đây suy ra A,B,C là ba góc một tam giác: $\begin{cases}\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1\\0<\cos A,\cos B,\cos C<1.\end{cases}$
Từ $a+b+c=x+y+z$ suy ra $x+y+z=2\sqrt{yz}\cos A+2\sqrt{zx}\cos B+2\sqrt{xy}\cos C\leqslant x+y+z$ theo Ví dụ 2.1.10. Do vậy dấu = phải xảy ra hay

$$\frac{\sqrt{x}}{\sin A}=\frac{\sqrt{y}}{\sin B}=\frac{\sqrt{z}}{\sin C}\ \text{hay}\ \frac{x}{\sin^2A}=\frac{y}{\sin^2B}=\frac{z}{\sin^2C}.$$

Từ đây dễ dàng suy ra $x=\frac{b+c}{2},y=\frac{c+a}{2},z=\frac{a+b}{2}$. □

Tài liệu tham khảo

[1] N. V. Mậu, Đa thức đại số và phân thức hữu tỉ, NXB Giáo dục 2002.

[2] N. S. Nguyên, N. V. Nho, L. H. Phổ, *Tuyển tập các bài toán dự tuyển Olympic Toán học quốc tế 1991-2001*, NXB Giáo dục.

[3] D. Faddéev et I. Sominski, *Recueil D'Exercices D'Algèbre Supérieure,* Editions Mir-Moscou 1977.

[4] M Fichteen Honz 1968.

[5] Tuyển tập: *The IMO Compendium 1959-2004.*

[6] V. Prasolov, *Polynomials,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004.

[7] Z. Kadelburg, D. Đukie', M. Lukie' and I. Matie', *Inequalities of Karamata, Schur and Muirhead and some applications,* The Teaching of Mathematics 2005, Vol. VIII,1, pp. 31-45.

Luận văn đã được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn ngày 09 tháng 9 năm 2011 và đã chỉnh sửa với các ý kiến đóng góp của các thầy, cô trong hội đồng.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 9 năm 2011
Xác nhận của cán bộ hướng dẫn khoa học

PGS.TS Đàm Văn Nhỉ