Đại Học Thái Nguyên
Trường Đại Học Khoa Học

Trần Xuân Sơn

MA TRẬN VÀ DÃY SỐ

The matrix and sequence of number

Chuyên Ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS-TS. Đàm Văn Nhỉ

Thái Nguyên - 2012

Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: PGS-TS. Đàm Văn Nhỉ

Phản biện 1: ....
....

Phản biện 2: ....
....

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên
Ngày .... tháng .... năm 2012

Có thể tìm hiểu tại
Thư Viện Đại Học Thái Nguyên

Mục lục

Lời mở đầu

Chúng ta biết rằng Ma trận và Dãy số được ứng dụng nhiều trong các ngành khoa học như: Vật lý, Kinh tế, Tin học,... Chúng xuất hiện trong hầu hết các ngành của Toán học, đặc biệt là trong Toán rời rạc, Giải tích và Đại số tuyến tính. Trong lịch sử ngành toán hai công cụ này được nghiên cứu từ rất lâu và đem lại nhiều công trình xuất chúng. Các tài liệu viết về ma trận và dãy số cũng được các nhà khoa học để lại rất nhiều và độc đáo, nhưng hầu hết là nghiên cứu riêng biệt, chưa có nhiều công trình và tài liệu nghiên cứu đồng thời về cả ma trận và dãy số và về mối quan hệ giữa chúng.

Thực tế thấy rằng dãy số có nhiều ứng dụng và xuất hiện từ rất sớm trong lịch sử loài người. Trong chương trình học của các cấp, các đề thi đại học cao đẳng, đề thi Olympic toán trong nước và quốc tế, luôn có các bài toàn về dãy số. Điều này cho thấy tầm quan trọng của mảng toán dãy số. Các bài toán về dãy số thường ở các dạng như: Các số hạng được xác định bởi một công thức, hay cho dưới dạng mệnh đề mô tả các số hạng, khi đó ta dễ dàng phát hiện được tính chất của các số hạng, nhưng nhiều dãy số cho theo công thức truy hồi cho nên không dễ gì suy ra được tính chất và công thức tường minh. Vấn đề đặt ra là chọn phương pháp như thế nào để giải bài toán dãy số một cách nhanh tróng và tối ưu, ta thấy có nhiều cách giải quyết các bài toán đó. Tuy nhiên dùng ma trận để giải các bài toán về dãy số là một hướng giải khá hay và thú vị, nó có thể cho ra nhiều kết quả mới bất ngờ mà dùng các cách giải thông thường không có được. Cụ thể từ một bài toán về dãy số ta biểu diễn nó dưới dạng ma trận, rồi sử dụng các phép biến đổi ma trận để giải. Quá trình biến đổi cho ta một số tính chất mới để từ đó xây dựng được các dãy số mới. Qua cách làm này giúp ta giải được nhiều bài toán trong các sách tham khảo hoặc các kì thi học sinh giỏi hoặc sáng tác được nhiều bài toán mới. Với mục tiêu là thông qua các phép biến đổi ma trận để giải quyết các bài toán về dãy số và xây dựng bài toán mới về dãy số từ bài toán ban đầu. Luận văn được trình bày trong hai chương:

Chương I: **Vành ma trận.** Trình bày các kiến thức cơ bản của số phức, đã chứng minh tính đóng đại số của trường $\mathbb{C}$ để khi giải bài toán liên quan đến nghiệm phương trình ta có thể đem nó xét trong $\mathbb{C}$. Xây dựng vành ma trận K[A], đã tính được định thức và giá trị riêng của đa thức $g(A)$ khi biết định thức và giá trị riêng của A. Nêu các cách tính ma trận nghịch đảo, xác định giá trị riêng, véctơ riêng và chéo hóa ma trận, đưa một số ví dụ để minh họa.

Chương II: **Xét dãy số qua ma trận.** Trình bày nhiều ví dụ vận dụng các kiến thức cơ bản của chương I như: Sử dụng đồng cấu, phép nhân ma trận, chéo hóa ma trận để giải quyết các bài toán về dãy số và biểu diễn dãy số dưới dạng ma trận. Chuyển bài toán dãy số về bài toán ma trận. Đặc biệt trong luận văn này nghiên cứu 2, 3 dãy số đồng thời. Sử dụng ma trận để xây dựng bài toán mới từ một bài toán ban đầu.

Sau một thời gian học tập, tự tìm tòi, tham khảo và nghiên cứu các tài liệu liên quan đến nội dung, cùng với sự giúp đỡ nhiệt tình, tận tâm của Thầy giáo hướng dẫn PGS-TS. **Đàm Văn Nhỉ**. Luận văn đã chắt lọc được các nội dung cơ bản và đưa ra một phương pháp mới để khai thác bài toán dãy số.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới Thầy hướng dẫn, tới các thầy cô giáo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Đồng thời tác giả xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K4a - Trường Đại học Khoa học đã động viên, giúp đỡ trong quá trình học tập và làm luận văn này. Tác giả cũng xin cảm ơn Sở Giáo dục - Đào tạo tỉnh Hà Giang, Ban Giám hiệu và đồng nghiệp của trường THPT Việt Vinh - Huyện Bắc Quang - Tỉnh Hà Giang đã tạo điều kiện về mọi mặt để tác giả được tham gia học tập và hoàn thành khoá học.

Khuôn khổ luận văn đề cập đến việc áp dụng các phép toán và tính chất của ma trận vào giải quyết các bài toán về dãy số, đây là một lĩnh vực rộng và khó. Song thời gian có hạn và khả năng nghiên cứu còn hạn chế, nên luận văn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết, rất mong được sự đóng góp ý kiến của Thầy cô và các bạn đồng nghiệp.

Thái Nguyên, ngày 28 tháng 07 năm 2012

Tác giả

Trần Xuân Sơn

Chương 1

Vành ma trận

Trong chương này trình bày lý thuyết của biến đổi Ma trận. Nội dung chủ yếu của chương này được hình thành từ các tài liệu [1], [2], và [5].

1.1. Tính đóng đại số của trường $\mathbb{C}$

Xét tích Descartes $T = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\ (a, b)|a, b \in \mathbb{R}\}$ và định nghĩa phép toán:

$$\begin{aligned}(a, b) &= (c, d) \text{ khi và chỉ khi } a = c, b = d\\ (a, b) &+ (c, d) = (a + c, b + d)\\ (a, b) &. (c, d) = (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

Để đơn giản, viết (a,b).(c,d) qua (a,b)(c,d). Từ định nghĩa của phép nhân:
(i) Với $i = (0, 1) \in T$ có $i^2 = ii = (0, 1)(1, 0) = (-1, 0)$.
(ii) (a,b)(1,0) = (1,0)(a,b) = (a,b)
(iii) (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1), $\forall (a, b) \in T$.

Bổ đề 1.1.1. *Ánh xạ $\phi : \mathbb{R} \to T, a \mapsto (a, 0)$, là một đơn ánh và thỏa mãn $\phi(a + a') = \phi(a) + \phi(a'), \phi(aa') = \phi(a)\phi(a')$ với mọi a, a' $\in \mathbb{R}$.*

Đồng nhất $(a, 0) \in T$ và $a \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có thể viết
$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$ với $i^2 = (-1, 0) = -1$.
Ký hiệu $\mathbb{C}$ là T cùng các phép toán đã nêu ra ở trên.

Như vậy $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ và ta có:

$$\begin{aligned}
&a + bi = c + di \text{ khi và chỉ khi } a = c, b = d \\
&a + bi + c + di = a + c + (b + d)i \\
&(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.
\end{aligned}$$

Mỗi phần tử $z = a + bi \in \mathbb{C}$ được gọi là một *số phức* với *phần thực* a, ký hiệu là Rez, và *phần ảo* b, ký hiệu Imz; còn i được gọi là *đơn vị ảo*. Số phức $a - bi$ được gọi là số phức liên hợp của $z = a + bi$ và được ký hiệu qua $\overline{z} = \overline{a + bi}$. Dễ dàng kiểm tra $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\overline{z_2}$ và gọi $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ là môdun của z. Số đối của $z' = c + di$ là $-z' = -c - di$ và ký hiệu $z - z' = (a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$.

Xét mặt phẳng tọa độ (Oxy). Mỗi số phức $z = a + bi$ ta cho tương ứng với điểm $M(a, b)$. Tương ứng này là một song ánh

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, z = a + bi \mapsto M(a; b).$$

Khi đồng nhất $\mathbb{C}$ với (Oxy) qua việc đồng nhất z Với M, thì mặt phẳng tọa độ với biểu diễn số phức như thế được gọi là *mặt phẳng phức* hay *mặt phẳng Gauss* để ghi công C. F. Gauss - người đầu tiên đưa ra biểu diễn.

Mệnh đề 1.1.1. *Tập $\mathbb{C}$ là một trường chứa trường $\mathbb{R}$ như một trường con.*

Chứng minh. Dễ dàng kiểm tra $\mathbb{C}$ là một vành giao hoán với đơn vị là 1. Giả sử $z = a + bi \neq 0$. Khi đó $a^2 + b^2 > 0$. Giả sử $z' = x + yi \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $zz' = 1$ hay $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0. \end{cases}$ Giải hệ được $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}, y = -\dfrac{b}{a^2 + b^2}$. Vậy $z' = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2} i$ là nghịch đảo của z. Tóm lại $\mathbb{C}$ là một trường. Vì đồng nhất $a \in \mathbb{R}$ với $a + 0i \in \mathbb{C}$ nên có thể coi $\mathbb{R}$ là trường con của $\mathbb{C}$. Chú ý rằng, nghịch đảo của $z \neq 0$ là $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ và $\dfrac{z'}{z} = z'z^{-1} = \dfrac{z'\overline{z}}{|z|^2}$.

Định nghĩa 1.1.1. Cho số phức $z \neq 0$. Giả sử M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Số đo (rađian) của mỗi góc lượng giác tia đầu Ox tia cuối OM được gọi là một argument của z và được ký hiệu qua arg(z). Góc $\widehat{xOM}$ được gọi là Argument của z và được ký hiệu bởi Arg z. Argument của số phức 0 là không định nghĩa.

Chú ý rằng nếu α là một argument của z thì mọi argument của z đều có dạng $\alpha + k2\pi$, $\forall k \in Z$. Với $z \neq 0$, ký hiệu $\alpha + k2\pi$ là Argument của z. Ký hiệu $r = \sqrt{z\overline{z}}$. Khi đó số phức $z = a + bi$ có $a = r\cos\alpha, b = r\sin\alpha$. Vậy khi $z \neq 0$ thì có thể biểu diễn $z = r\big(\cos\alpha + i\sin\alpha\big)$ và biểu diễn này được gọi là *dạng lượng giác* của z. Tích vô hướng và tích lệch của hai số phức z_1, z_2, ký hiệu là $< z_1, z_2 >$ và $[z_1, z_2]$, được định nghĩa tương ứng qua các công thức sau đây:

$$< z_1, z_2 >= \frac{1}{2}(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2), [z_1, z_2] = \frac{1}{2}(z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2).$$

Mệnh đề 1.1.2. *Nếu* $z_1 = r_1\big(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1\big), z_2 = r_2\big(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2\big)$ *với* $r_1, r_2 \geqslant 0$ *thì*

(i) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$, $|\dfrac{z_1}{z_2}| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ và $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

(ii) $z_1z_2 = r_1r_2\big[\cos\big(\alpha_1 + \alpha_2\big) + i\sin\big(\alpha_1 + \alpha_2\big)\big]$

(iii) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\big[\cos\big(\alpha_1 - \alpha_2\big) + i\sin\big(\alpha_1 - \alpha_2\big)\big]$ *khi* $r_2 > 0$.

(iv) $< z_1, z_2 >= r_1r_2\cos\big(\alpha_1 - \alpha_2\big) = |z_1||z_2|\cos\big(\alpha_1 - \alpha_2\big)$.

(v) $< z_1, z_2 >=< z_2, z_1 >, < az_1 + bz_3, z_2 >= a < z_1, z_2 > +b < z_3, z_2 >$ *với mọi số phức* z_1, z_2, z_3 và *mọi* $a, b \in \mathbb{R}$.

(vi) $[z_1, z_2] = r_1r_2\sin\big(\alpha_2 - \alpha_1\big) = |z_1||z_2|\sin\big(\alpha_2 - \alpha_1\big)$ và $[z_1, z_2] = -[z_2, z_1]$.

Chứng minh. Hiển nhiên. Với hai số phức z_1 và z_2 ta luôn có

$$\begin{aligned}
z_1 = z_2 \;&\Leftrightarrow\; |z_1| = |z_2|, \arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.\\
\arg(z_1z_2) \;&=\; \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.\\
\arg(\frac{z_1}{z_2}) \;&=\; \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.\\
\mathrm{Arg}(z_1z_2) \;&=\; \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2).\\
\mathrm{Arg}(\frac{z_1}{z_2}) \;&=\; \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2).
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.1.1. Với $a + bi = \big(x + iy\big)^n$ có $a^2 + b^2 = \big(x^2 + y^2\big)^n$.

Lời giải. Từ $a + bi = \big(x + iy\big)^n$ Suy ra $a - bi = \big(x - iy\big)^n$. Như vậy $a^2 + b^2 = \big(x^2 + y^2\big)^n$.

Ví dụ 1.1.2. Với ba số phức phân biệt đôi một $z_1; z_2; z_3$ có đồng nhất thức
$f(x) = \dfrac{(x - z_2)(x - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} + \dfrac{(x - z_3)(x - z_1)}{(z_2 - z_3)(z_2 - z_1)} + \dfrac{(x - z_1)(x - z_2)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)} = 1.$
Từ đó suy ra $\dfrac{|z - z_2||z - z_3|}{|z_1 - z_2||z_1 - z_3|} + \dfrac{|z - z_3||z - z_1|}{|z_2 - z_3||z_2 - z_1|} + \dfrac{|z - z_1||z - z_2|}{|z_3 - z_1||z_3 - z_2|} \geqslant 1$ với bất kỳ số phức z.

Ví dụ 1.1.3. Với ba số phức phân biệt đôi một $z_1; z_2; z_3$ và hai số thực u, v có đồng nhất thức
$\dfrac{(x - u)(x - v)}{(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)} = \dfrac{(z_1 - u)(z_1 - v)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(x - z_1)} + \dfrac{(z_2 - u)(z_2 - v)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(x - z_2)} + \dfrac{(z_3 - u)(z_3 - v)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(x - z_3)}$. Từ đó suy ra với bất kỳ số phức z có $\dfrac{|z - u||z - v|}{|z - z_1||z - z_2||z - z_3|} \leqslant \dfrac{|z_1 - u||z_1 - v|}{|z_1 - z_2||z_1 - z_3||z - z_1|} + \dfrac{|z_2 - u||z_2 - v|}{|z_2 - z_1||z_2 - z_3||z - z_2|} + \dfrac{|z_3 - u||z_3 - v|}{|z_3 - z_1||z_3 - z_2||z - z_3|}$.

Mệnh đề 1.1.3. [Moivre] *Nếu $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ thì với mỗi số nguyên dương n có $z^n = r^n\big[\cos\big(n\alpha\big) + i\sin\big(n\alpha\big)\big]$.*

Hệ quả 1.1.1. *Cho căn bậc n của số phức $z = r\big(\cos\alpha + i\sin\alpha\big) \neq 0$ ta nhận được n giá trị khác nhau $z_k = r^{1/n}\Big(\cos\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\Big)$ với i $k = 1, 2, \ldots, n$.*

Tính đóng đại số của trường $\mathbb{C}$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng, mọi đa thức bậc dương thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có nghiệm trong $\mathbb{C}$. Đó chính là nội dung Định lý cơ bản của đại số. Người đầu tiên chứng minh định lý này là nhà toán học C. Gauss (1777 - 1855).

Định nghĩa 1.1.2. Trường K được gọi là một *trường đóng* đại số nếu đa thức bậc dương thuộc $K[x]$ đều có nghiệm trong K. Như vậy, trong

$K[x]$ mọi đa thức bậc dương đều phân tích được thành tích các nhân tử tuyến tính khi K là một trường đóng đại số.

Định lý 1.1.1. [d'Alembert-Gauss, Định lý cơ bản của đại số] *Mọi đa thức bậc dương $\mathbb{C}[x]$ đều có ít nhất một nghiệm thuộc $\mathbb{C}$. Từ Định lý trên suy ra các kết quả sau đây về đa thức bất khả quy trong $\mathbb{C}[x]$:*

Hệ quả 1.1.2. *Mọi đa thức thuộc $\mathbb{C}[x]$ có bậc $n > 0$ đều có n nghiệm trong $\mathbb{C}$. và các đa thức bất khả quy trong $\mathbb{C}[x]$ là các đa thức bậc nhất.*

Mệnh đề 1.1.4. *Cho $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$. $f(x)$ là đa thức bất khả quy khi và chỉ khi hoặc $f(x) = ax + b$ và $a \neq 0$ hoặc $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và $b^2 - 4ac < 0$. Sử dụng các kết quả đã đạt được ở trên để chỉ ra dạng phân tích một đa thức thuộc $\mathbb{R}[x]$ thành tích các nhân tử bất khả quy.*

Định lý 1.1.2. *Mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$ đều có thể phân tích được một cách duy nhất thành dạng*

$$f(x) = a(x - a_1)^{n_1} \dots (x - a_s)^{n_s} (x^2 + b_1 x + c_1)^{d_1} \dots (x^2 + b_r x + c_r)^{d_r}$$

với các $b_i^2 - 4c_i < 0$ cho $i = 1, \dots, r$ khi $r \geqslant 1$.

Giải phương trình đa thức

Giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. khi đó $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Giải phương trình bậc ba $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Trước tiên đưa $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ về dạng $g(x) = x^3 + ux^2 + vx + t$. với việc đặt $y = x + \dfrac{u}{3}$ ta có đa thức $h(y) = y^3 + py + q$. Với $\epsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, đa thức $h(y)$ có ba nghiệm trong $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ y_2 = \epsilon\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \epsilon^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ y_3 = \epsilon^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \epsilon\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \end{cases}$$

Từ đây suy ra ba nghiệm x_1, x_2, x_3 của $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ và ba hệ thức $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}, x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$.

Giải phương trình bậc bốn $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

Chia hai vế cho a và đạt $y = x + \frac{b}{2a}$ để đưa phương trình đã cho về dạng

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0.$$

Biến đổi tiếp, ta còn có $(y^2+z)^2 = (2z-p)y^2 - qy + z^2 - r$. Giả sử y là một nghiệm của $y^4+py^2+qy+r = 0$. Chon z để sao $(2z-p)y^2-qy+z^2-r = (sy+t)^2$. Để đạt được điều đó chỉ cần xét $\Delta = q^2-4(2z-p)(z^2-r) = 0$. Ta đã biết cách giải phương trình bậc ba với ẩn z. Gọi z_0 là một nghiệm phương trình trên. Khi đó $(y^2 + z_0)^2 = (sy + t)^2$. Giải phương trình này ta sẽ suy ra được bốn nghiệm của $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

1.2. Ma trận và các phép toán

Khi ta có $m \times$ n số ta có thể xếp thành một bảng chữ nhật chứa m hàng n cột. Một bảng số như thế gọi là một ma trận.

Định nghĩa 1.2.1. Một bảng số chữ nhật có m hàng n cột.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$ Gọi là ma trận cỡ $m \times$ n.

a_{ij} là phần tử của ma trận A nằm ở giao điểm của hàng i cột j.

Để kí hiệu ma trận người ta thường dùng ngoặc vuông như ở trên hay dấu ngoặc tròn.
Để nói A là ma trận cỡ $m \times$ n có phần tử nằm ở hàng i cột j ta viết $A = [a_{\mathrm{ij}}]_{m \times n}$
Khi $m = n$, bảng số thành vuông, ta nói ma trận vuông với n hàng n cột, ta gọi nó là ma trận cấp n.

Chú ý 1.2.1. Nếu A là ma trận vuông cấp n thì đường thẳng đi qua $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ gọi là đường chéo chính của ma trận A. Mỗi phần tử a_{ii} gọi là phần tử chéo của A

Ví dụ 1.2.1. Bảng số

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

là một ma trận cỡ 2x3 với các phần tử

$$\begin{matrix} a_{11} = 1 & a_{11} = 3 & a_{11} = 5 \\ a_{11} = 2 & a_{11} = 4 & a_{11} = 6 \end{matrix}$$

Định nghĩa 1.2.2. Ma trận không là ma trận mà tất cả các phần tử đều bằng không.
Ma trận không kí hiệu là (0).

Định nghĩa 1.2.3. Hai ma trận A và B gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng cỡ và các phần tử cùng vị trí bằng nhau, tức là :
1) A $= [a_{\mathrm{ij}}]_{m\mathrm{x}n}$, B $= [b_{\mathrm{ij}}]_{m\mathrm{x}n}$
2) $a_{\mathrm{ij}} = b_{\mathrm{ij}}$ với mọi i và mọi j
Khi A bằng B ta viết A = B

Định nghĩa 1.2.4. Ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & .... & 0 \\ 0 & a_{22} & .... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & .... & a_{nn} \end{bmatrix}$
trong đó các $a_{ij} = 0$ khi $i \neq j$, gọi là ma trận chéo cấp n.

Định nghĩa 1.2.5. Ma trận $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 1 & .... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & .... & 1 \end{bmatrix}$

trong đó các phần tử chéo bằng 1, các phần tử khác bằng không, gọi là ma trận đơn vị cấp n. Đặc điểm của ma trận đơn vị là: $AE = EA = A, \forall A$

Định nghĩa 1.2.6. Xét ma trận $A = [\mathrm{a_{ij}}]_{mxn}$. Đổi hàng thành cột, cột thành hàng ta được ma trận mới gọi là ma trận chuyển vị của A, kí hiệu là A^t. Vậy $A^t = [a_{ji}]_{nxm}$
Ta thấy rằng nếu A có m hàng n cột thì A^t có n hàng m cột.

1.2.1. Cộng ma trận

Định nghĩa 1.2.7. Cho hai ma trận cùng cỡ $m \times$ n:
A $= [a_{\mathrm{ij}}]_{mxn}$, B $= [b_{\mathrm{ij}}]_{mxn}$ Tổng của A + B là ma trận cùng cỡ $m \times$ n xác định bởi $A + B = [a_{\mathrm{ij}} + b_{\mathrm{ij}}]_{mxn}$ tức là $(A+B)_{\mathrm{ij}} = a_{\mathrm{ij}} + b_{\mathrm{ij}}$

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ ta cộng các phần tử cùng vị trí.

Ví dụ 1.2.2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+7 \\ -1+2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tính chất 1.2.1. Dễ thấy rằng:
A+B = B + A và A + 0 = 0 + A = A
Nếu gọi $-A = [-a_{\mathrm{ij}}]_{mxn}$ thì còn có $A + (-A) = (-A) + A = 0$
Nếu có thêm ma trận C với $C = [\mathrm{c_{ij}}]_{mxn}$
thì (A + B) + C = A + (B + C)

Chú ý 1.2.2. Gọi M_{mxn} là tập hợp các ma trận cỡ $m\times$n. Khi đó $(M_{m\mathrm{x}n}, +)$ là một nhóm giao hoán.

1.2.2. Nhân ma trận với một số

Định nghĩa 1.2.8. Cho $A = [\mathrm{a_{ij}}]_{mxn}$, $k \in R$ thì tích kA là một ma trận cỡ $m \times$ n xác định bởi $k\mathrm{A} = [k\mathrm{a_{ij}}]_{mxn}$.
Như vậy, muốn nhân một ma trận với một số ta nhân tất cả các phần tử của ma trận với số đó.

Tính chất 1.2.2. Dễ thấy rằng:
k(A + B) = kA + kB
(k + h)A = kA + hA
k(hA) = (kh)A, 1.A = A và 0.A = 0.

1.2.3. Phép nhân ma trận với ma trận

Định nghĩa 1.2.9. Xét hai ma trận
$A = [a_{ij}]_{m\times p}; B = [b_{ij}]_{p\times n}$ trong đó số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B. Người ta gọi tích AB là ma trận $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ có m hàng n cột mà phần tử c_{ij} được tính bởi công thức
$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$. Tức là: c_{ij} bằng hàng i của A nhân với cột j của B.

Chú ý 1.2.3. Muốn nhân AB (A bên trái, B bên phải) phải có điều kiện: Số cột của A bằng số hàng của B. Muốn nhân BA (B bên trái, A bên phải) phải có điều kiện: Số cột của B bằng số hàng của A. Do đó khi nhân AB được chưa chắc đã nhân BA được. Trường hợp đặc biệt khi A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì nhân AB và BA đều được.

Chú ý 1.2.4. Khi nhân AB và BA được, chưa chắc đã có $AB = BA$.

1.3. Định thức

1.3.1. Định thức của ma trận vuông

Xét ma trận cấp n: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots & a_{1j}\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots & a_{2j}\ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots\ldots & a_{nj}\ldots\ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Ta chú ý đến phần tử a_{ij}, bỏ đi hàng i và cột j ta thu được ma trận chỉ còn $n-1$ hàng và $n-1$ cột, tức là ma trận cấp $n-1$. Ta kí hiệu nó là M_{ij} hoặc A_{ij} và gọi nó là ma trận con ứng với phần tử a_{ij}.

Chẳng hạn với $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ Ta có

$M_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $M_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$, $M_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

Định nghĩa 1.3.1. Định thức của ma trận A, kí hiệu là $det(A)$ hoặc $|A|$, được định nghĩa dần dần như sau:
A là ma trận cấp 1:
$A = [a_{11}]$ thì $det(A) = a_{11}$
A là ma trận cấp 2:
$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$
thì $det(A) = a_{11}det(M_{11}) - a_{12}det(M_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
(Chú ý rằng a_{11} và a_{12} là các phần tử nằm cùng ở hàng 1 của ma trận A), vân vân, và một cách tổng quát, A là ma trận cấp n thì
$det(A) = a_{11}det(M_{11}) - a_{12}det(M_{12}) + ... + (-1)^{1+n}a_{1n}det(M_{1n})$
(Chú ý rằng $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}$ là các phần tử cùng nằm ở hàng 1 của ma trận A).
Để ký hiệu định thức người ta dùng hai gạch đứng đặt ở hai bên. Định thức của ma trận cấp n gọi là định thức cấp n.

1.3.2. Tính chất của định thức

Tính chất 1.3.1. $det(A^t) = det(A)$.

Hệ quả 1.3.1. *Một tính chất đã đúng khi phát biểu về hàng của định thức thì nó vẫn còn đúng khi trong phát biểu ta thay hàng bằng cột.*

Tính chất 1.3.2. Đổi chỗ hai hàng (hay hai cột) của một định thức ta được một định thức mới bằng định thức cũ đổi dấu.

Tính chất 1.3.3. Một định thức có hai hàng (hay hai cột) như nhau thì bằng không.

Tính chất 1.3.4. $det(A) = (-1)^{i+1}[a_{i1}det(M_{i1}) - a_{i2}det(M_{i2}) + ... \pm a_{in}det(M_{in})]$

Tính chất 1.3.5. Một định thức có một hàng (hay một cột) toàn là số không thì bằng không.

Tính chất 1.3.6. Khi nhân các phần tử của một hàng (hay một cột) với một số k thì được một định thức mới bằng định thức cũ nhân với k.

Hệ quả 1.3.2. *Khi các phần tử của một hàng (hay một cột) có một thừa số chung, ta có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài dấu định thức.*

Tính chất 1.3.7. Một định thức có hai hàng (hay hai cột) tỉ lệ thì bằng không.

Tính chất 1.3.8. Khi tất cả các phần tử của một hàng (hay một cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng của hai định thức, chẳng hạn như:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a'_{12} \\ a_{21} & a_{22}+a'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}$$

Tính chất 1.3.9. Nếu một định thức có một hàng (hay một cột) là tổ hợp tuyến tính của các số hàng khác (hay của các cột khác) thì định thức ấy bằng không.

Tính chất 1.3.10. khi ta cộng bội k của một hàng vào một hàng khác (hay bội k của một cột vào một cột khác) thì được một định thức mới bằng định thức cũ.

Tính chất 1.3.11. Các định thức có dạng tam giác bằng tích các phần tử chéo. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}.....a_{nn}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}.....a_{mn}$$

1.4. Ma trận khả đảo và ma trận nghịch đảo

Định nghĩa 1.4.1. Xét $A \in M_n$. Nếu tồn tại ma trận $B \in M_n$ sao cho $AB = BA = E$ thì nói A khả đảo và gọi B là ma trận nghịch đảo của A. Người ta kí hiệu ma trận nghịch đảo của A là A^{-1}, nghĩa là $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Định lý 1.4.1. *Ma trận nghịch đảo A^{-1} của $A \in M_n$ nếu có thì chỉ có một mà thôi.*

Định lý 1.4.2. *Nếu $A \in M_n$ khả đảo tức là có ma trận nghịch đảo A^{-1} thì $det(A) \neq 0$.*

Chú ý 1.4.1. Giả sử $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp n. Ký hiệu A_{ij} là ma trận vuông cấp $n-1$ có được từ A qua việc bỏ đi dòng thứ i và cột thứ j. Khi đó $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ được gọi là phần bù đại số của a_{ij}. Ta có ngay

$$a_{k1}\alpha_{i1} + a_{k2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{kn}\alpha_{in} = \begin{cases} |A| \text{ khi } k = i \\ 0 \quad \text{khi } k \neq i. \end{cases}$$

Định lý 1.4.3. *Nếu $det(A) \neq 0$ thì ma trận A có ma trận nghịch đảo A^{-1} tính bởi công thức sau:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}C^t = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & ... & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & ... & C_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ C_{1n} & C_{2n} & ... & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Cách thứ nhất: Áp dụng định lí 1.4.3
Trước tiên ta tính $det(A)$
Tiếp theo tính ma trận C từ đó có ma trận chuyển vị C^t. Tìm ma trận C như sau:
$C_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$ là phần bù đại số của phần tử a_{ij}.
Với $D_{ij} = det(A_{ij})$ suy ra các phần tử của ma trận C là
$C_{ij} = (-1)^{i+j}det(A_{ij}) = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$

Ví dụ 1.4.1. Xác định ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Lời giải. Ta có $det(A) = -1 \neq 0$
$C_{11} = 40$; $C_{12} = -13$; $C_{13} = -5$

$C_{21} = -16$; $C_{22} = 5$; $C_{23} = 2$
$C_{31} = -9$; $C_{32} = 3$; $C_{33} = 1$
Do đó $C = \begin{pmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ suy ra $C^t = \begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
Vậy $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}C^t = \frac{1}{-1}C^t = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Ví dụ 1.4.2. Xác định ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Lời giải. Lập A^{-1} qua các phần bù đại số

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18, A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2, A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \\
A_{21} &= -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11, A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14, \\
A_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \\
A_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10, A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \\
A_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8.
\end{aligned}$$

Khi đó ma trận nghịch đảo $A^{-1} = \dfrac{A^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 9/23 & 11/46 & 5/23 \\ -1/23 & -7/23 & 2/23 \\ -2/23 & -5/46 & 4/23 \end{pmatrix}$.

Cách thứ hai: Dựa vào các phép biến đổi sơ cấp về hàng của ma trận A (phương pháp Gauss - Jordan).
Có ba phép biến đổi sơ cấp về hàng của A là
1) Nhân (các phần tử của) hàng r với số $\lambda \neq 0$.
2) Đổi chỗ hai hàng r và s.
3) Cộng λ lần hàng r vào hàng s.

1.5. Vành ma trận K[A]

Xét vành đa thức một biến $K[x]$ trên trường K. Giả sử đa thức thuộc $K[x]$ là $f(x) = a_s x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ và ma trận vuông A cấp $n \leqslant 3$. Định nghĩa

$$f(A) = a_s A^s + a_{s-1}A^{s-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

với E là ma trận cùng cấp với ma trận vuông A. Từ các phép toán về ma trận, chẳng hạn như: $EA^r = A^r E = A^r, A^r A^s = A^s A^r = A^{r+s}$ và $A^r(\alpha A^s + \beta A^t) = \alpha A^{r+s} + \beta A^{r+t}$ với $\alpha, \beta \in K$, suy ra các kết quả sau:

Định lý 1.5.1. *Với hai đa thức f và g thuộc $K[x]$ và ma trận A ta có*
(i) Nếu $f = g$ thì $f(A) = g(A)$.
(ii) $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$.
(iii) $(fg)(A) = f(A)g(A)$.
(iv) $f(A)g(A) = g(A)f(A)$.
(v) $(\alpha f)(A) = \alpha f(A)$ với bất kỳ $\alpha \in K$

Ký hiệu $K[A] = \{f(A) | f \in K[x]\}$. Từ Định lý 1.5.1 suy ra kết quả:

Định lý 1.5.2. *Tập $K[A]$ cùng phép cộng, nhân các ma trận và nhân ma trận với một số lập thành một vành giao hoán có đơn vị là E.*

Mệnh đề 1.5.1. *Tương ứng $\phi : K[x] \to K[A], f(x) \mapsto f(A)$, là một toàn cấu với $Ker(\phi) \neq 0$.*

Chứng minh. Do bởi $\phi(f + g) = (f + g)(A) = f(A) + g(A) = \phi(f) + \phi(g)$ và $\phi(fg) = (fg)(A) = f(A)g(A) = \phi(f)\phi(g)$ theo Định lý 1.5.2 nên ϕ là một đồng cấu vành.
Với $f(A) = a_s A^s + a_{s-1}A^{s-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$ có đa thức $f(x) = a_s x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ để $\phi(f) = f(A)$. Do đó ϕ là một toàn cấu vành.
Vì tập $M_{n,n}$ tất cả các ma trận vuông cấp n trên K là một không gian véctơ n^2 chiều trên K với cơ sở $\Delta_{ij} = (1_{ij})$, trong đó tại vị trí (i, j) có $1_{ij} = 1$, còn tại những vị trí khác đều bằng 0. Như vậy nhiều hơn n^2 ma trận vuông cấp n trên K đều phụ phuộc tuyến tính. Như vậy tồn tại đa

thức khác 0 là $f(x) = x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in K[x]$ với $s \geqslant n^2+1$ thỏa mãn $f(A) = 0$. Vậy $Ker(\phi) \neq (0)$. Vì vành $K[x]$ là vành iđêan chính nên có đa thức bậc thấp nhất $F(x) \neq 0$ để $Ker(\phi) = (F) \neq (0)$.

Hệ quả 1.5.1. *Ta có $K[A] \cong K[x]/(F)$.*

Chứng minh. Bởi vì $\phi : K[x] \to K[A], f(x) \mapsto f(A)$, là một toàn cấu với $Ker(\phi) = (F) \neq (0)$ theo mệnh đề 1.5.1 nên $K[A] \cong K[x]/Ker(\phi) = K[x]/(F)$.

Chú ý 1.5.1. Vì $K[x]$ là vành các iđêan chính nên có duy nhất một đa thức bậc thấp nhất dạng $m(x) = x^d + a_1x^{d-1} + \cdots + a_d \in K[x]$ để $Ker(\phi) = (F) = (m(x))$. Hiển nhiên $m(A) = 0$. Đôi khi $m(x)$ còn được gọi là đa thức tối tiểu của ma trận A.

Chú ý 1.5.2. Từ $m(A) = 0$ suy ra $A^d + a_1A^{d-1} + \cdots + a_{d-1}A = -a_dE$. Như vậy $A\big(-\dfrac{1}{a_d}A^{d-1} - \dfrac{a_1}{a_d}A^{d-2} - \cdots - \dfrac{a_{d-1}}{a_d}E\big) = E$ và nhận được ma trận nghịch đảo $A^{-1} = -\dfrac{1}{a_d}A^{d-1} - \dfrac{a_1}{a_d}A^{d-2} - \cdots - \dfrac{a_{d-1}}{a_d}E$ khi nó tồn tại.

1.6. Phương trình đặc trưng của ma trận

Xét không gian véctơ n chiều V trên K với cơ sở $\{e_1, \ldots, e_n\}$ nào đó. Giả sử ánh xạ tuyến tính F được biểu diễn qua một ma trận vuông cấp n với các phần tử $a_{ij} \in K$ là $A = (a_{ij})$. Khi đó ta có $F(\vec{u}) = A\vec{u}$ và như vậy định thức của ma trận $(xE - A)$ là $|xE - A| = F^n + \delta_1F^{n-1} + \cdots + \delta_{n-1}F + \delta_n$.

Định nghĩa 1.6.1. Đa thức $p(x) = x^n + \delta_1x^{n-1} + \cdots + \delta_{n-1}x + \delta_n$ được gọi là đa thức đặc trưng của ma trận vuông A. Phương trình $p(x) = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng của ma trận A. Các nghiệm $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ của $p(x) = 0$ được gọi là các nghiệm đặc trưng hay giá trị riêng của ma trận vuông A.

Định lý 1.6.1. [**Cayley-Hamilton**] *Mọi ma trận vuông A đều là nghiệm của đa thức đăc trưng của nó.*

Chứng minh. Giả sử A là ma trận vuông cấp n với đa thức đặc trưng $p(x) = |xE - A|$. Ký hiệu ma trận phụ hợp của ma trận $xE - A$ qua $(xE - A)_{adj}$. Vì các phần tử trong $(xE - A)_{adj}$ là những định thức con cấp $n - 1$ có được do xóa bỏ từ định thức $|xE - A|$ đi một dòng và một cột. Vậy có thể viết $(xE - A)_{adj}$ thành dạng

$$(xE - A)_{adj} = B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \cdots + B_1x + B_0$$

với các ma trận vuông B_j cấp n. Do $(xE - A)_{adj}(xE - A) = p(x)E$ nên $(xE - A)(B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \cdots + B_1x + B_0) = p(x)E$. Ta có hệ

$$\begin{cases} B_{n-1} = E \\ B_{n-2} - AB_{n-1} = \delta_1 E \\ B_{n-3} - AB_{n-2} = \delta_2 E \\ \ldots \\ B_0 - AB_1 = \delta_{n-1}E \\ -AB_0 = \delta_n E \end{cases} \text{ và suy ra } \begin{cases} A^nB_{n-1} = A^n \\ A^{n-1}B_{n-2} - A^nB_{n-1} = \delta_1 A^{n-1} \\ A^{n-2}B_{n-3} - A^{n-1}B_{n-2} = \delta_2 A^{n-2} \\ \ldots \\ AB_0 - A^2B_1 = \delta_{n-1}A \\ -AB_0 = \delta_n E. \end{cases}$$

Cộng tất cả các ma trận, vế theo vế, ta nhận được phương trình $p(A) = 0$.

Định lý 1.6.2. *Với ma trận vuông cấp n, đa thức $m(x)^n$ chia hết cho đa thức đặc trưng $p(x)$.*

Định lý 1.6.3. *Mỗi đa thức $f(x) \in K[x]$ thỏa mãn $f(A) = 0$ thì $f(x)$ chia hết cho $m(x)$. Đặc biệt $p(x)$ cũng chia hết cho $m(x)$.*

Chứng minh. Giả sử đa thức $f(x)$ thỏa mãn $f(A) = 0$. Sử dụng phép chia với dư, biểu diễn $f(x) = q(x)m(x) + r(x)$ với đa thức $r(x)$ có $deg(r(x)) < deg(m(x))$. Vì $f(A) = 0, m(A) = 0$ nên $r(A) = 0$ và như vậy $r(x) = 0$ hay $f(x)$ chia hết cho $m(x)$. Do bởi $p(A) = 0$ theo Định lý 1.6.2 nên $p(x)$ cũng chia hết cho $m(x)$.

Ví dụ 1.6.1. Xác định đa thức đặc trưng và đa thức tối tiểu của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lời giải. Vì $|xE - A| = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)^2(x-1)$ nên đa thức đặc trưng của A là $(x-2)^2(x-1)$. Vì $A-2E, A-E \neq 0$, nhưng $(A-2E)(A-E) = 0$ nên đa thức tối tiểu là $m(x) = (x-2)(x-1)$.

Ví dụ 1.6.2. Giả sử $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Xác định lũy thừa A^{2012}.

Lời giải. Vì $|xE - A| = \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ -3 & x-5 \end{vmatrix} = (x-2)(x-6)$ nên có tích $(A-2E)(A-6E) = 0$. Đặt $4B = A-2E, 4C = -A+6E$. Khi đó $B+C = E, 6B+2C = A, BC = 0 = CB$. Lại có $\begin{cases} B = BE = B(B+C) = B^2 \\ C = CE = C(B+C) = C^2. \end{cases}$ Từ kết quả này suy ra $A^n = 6^n B + 2^n C$ bằng phương pháp quy nạp theo n. Do đó $A^{2012} = \dfrac{1}{4}\Big[6^{2012}\big(A-2E\big) + 2^{2012}\big(A-6E\big)\Big]$.

Ví dụ 1.6.3. Giả sử $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ với $ad - bc \neq 0$. Xác định ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Lời giải. Vì $|xE - A| = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - bc$ nên $A\dfrac{A-(a+d)E}{bc-ad} = E$. Vậy $A^{-1} = \dfrac{A-(a+d)E}{bc-ad}$.

Ví dụ 1.6.4. Giả sử $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. Xác định ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Lời giải. Vì $|xE - A| = \begin{vmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -6 & 6 & x-4 \end{vmatrix} = x^3 - 12x - 16$ nên $A\dfrac{A^2-12E}{16} = E$. Vậy$A^{-1} = \dfrac{A^2-12E}{16}$.

Ví dụ 1.6.5. Cho ma trận vuông $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$. Khi đó hãy

(i) Xác định $|A|$ và A^{-1}.

(ii) Đặt $A^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n) \\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n) \end{pmatrix}$. Xác định $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)}$.

Lời giải. (i) Ta có$|xE - A|$=$\begin{pmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 7 & x-5 & 1 \\ 6 & -6 & x+2 \end{pmatrix}$=$(x+2)^2(x-4)$.

Từ $|xE - A| = x^3 - 12x - 16$ suy ra $|A| = 16$ và $A\dfrac{A^2 - 12E}{16} = E$. Vậy A có ma trận nghịch đảo là $A^{-1} = \dfrac{A^2 - 12E}{16}$.

(ii) Ta có $(A + 2E)^2(A - 4E) = 0$. Bây giờ xét $g(x) \in K[x]$. Khi đó $g(A) \in K[A]$. Vấn đề đặt ra: Xác định đa thức, đa thức đặc trưng và các giá trị riêng của ma trận $g(A)$ qua đa thức đặc trưng $p(x)$ và các giá trị riêng của A.

Giả sử $g(x)$ có các nghiệm là $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$. Khi đó có sự phân tích trong $K[x]$:

$$g(x) = (-1)^m b_0(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)\dots(\alpha_m - x).$$

Thế x qua A ta được $g(A) = (-1)^m b_0(\alpha_1 E - A)(\alpha_2 E - A)\dots(\alpha_m E - A)$.

Giả sử $p(x) = |xE - A| = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\dots(x - \lambda_n)$. Như vậy

$$\begin{aligned} |g(A)| &= (-1)^{mn} b_0^n |\alpha_1 E - A||\alpha_2 E - A|\dots|\alpha_m I - A| \\ &= (-1)^{mn} b_0^n \prod_{k=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(\alpha_k - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{n}\Big[(-1)^m b_0 \prod_{k=1}^{m}(\alpha_k - \lambda_i)\Big]. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra các kết quả về định thức, giá trị riêng và bất đẳng thức về vết:

Mệnh đề 1.6.1. *Ta luôn có* $|g(A)| = \prod\limits_{i=1}^{n} g(\lambda_i)$ *với mỗi đa thức* $g(x)$.

Chứng minh. Do bởi $|g(A)| = \prod\limits_{i=1}^{n}\Big[(-1)^m b_0 \prod\limits_{k=1}^{m}(\alpha_k - \lambda_i)\Big]$ như đã chỉ ra ở trên nên $|g(A)| = (-1)^{mn} b_0^n \prod\limits_{k=1}^{m}\prod\limits_{i=1}^{n}(\alpha_k - \lambda_i) = \prod\limits_{i=1}^{n}(-1)^m b_0 \prod\limits_{k=1}^{m}(\alpha_k - \lambda_i)$.

Vậy $|g(A)| = \prod\limits_{i=1}^{n} g(\lambda_i)$ với mỗi đa thức $g(x)$.

Định lý 1.6.4. *Nếu ma trận A có các giá trị riêng $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ thì ma trận $g(A)$ có đa thức đặc trưng $h(x) = [x - g(\lambda_1)][x - g(\lambda_2)] \ldots [x - g(\lambda_n)]$ và các giá trị riêng là $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \ldots, g(\lambda_n)$.*

Chứng minh. Xét ma trận $h(A) = xE - g(A)$. Theo mệnh đề 1.6.1 có $|h(A)| = h(\lambda_1)h(\lambda_2) \ldots h(\lambda_n) = [x - g(\lambda_1)][x - g(\lambda_2)] \ldots [x - g(\lambda_n)]$. Vậy ma trận $g(A)$ có đa thức đặc trưng $h(x) = [x - g(\lambda_1)][x - g(\lambda_2)] \ldots [x - g(\lambda_n)]$ và các giá trị riêng là $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \ldots, g(\lambda_n)$.

Hệ quả 1.6.1. *Nếu ma trận $A = (a_{ij})$ có các giá trị riêng $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ và $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$ thì A có nghịch đảo A^{-1} với các giá trị riêng là $\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda_2}, \ldots, \dfrac{1}{\lambda_n}$.*

Chứng minh. Với $g(x) = x$, ma trận $A = g(A)$ có các giá trị riêng là $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ và $|A| = |g(A)| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$ theo Định lý 1.6.4. Theo Định lý 1.4.2, ma trận $A = (a_{ij})$ có ma trận nghịch đảo A^{-1} với các giá trị riêng là $\dfrac{1}{\lambda_1}, \dfrac{1}{\lambda_2}, \ldots, \dfrac{1}{\lambda_n}$.

Hệ quả 1.6.2. *Nếu ma trận $A = (a_{ij})$ có các giá trị riêng $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ thì ma trận A^2 có các giá trị riêng là $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$ và $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.*

Chứng minh. Ma trận A^2 có các giá trị riêng là $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$ theo Định lý1.6.4. Vết của ma trận A^2 bằng $T = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2$. Vì dễ ràng có vết $T = v(A^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji}$ và$v(AA^c) - v(A^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^2 - a_{ij}a_{ji}) = \sum_{i<j}(a_{ij} - a_{ji})^2 \geqslant 0$. Vậy $T = v(A^2) \leqslant v(AA^c) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.

1.7. Hàm hữu tỉ của ma trận vuông

Ta đã biết, nếu ma trận A có $|A| \neq 0$ thì A có ma trận nghịch đảo A^{-1}. Như vậy, khi đa thức $g(x) \in K[x]$ thỏa mãn $|g(A)| \neq 0$ thì $g(A)$ có ma trận nghịch đảo $g(A)^{-1}$.

Giả sử $(g(x), m(x)) = 1$. Khi đó có hai đa thức $h(x), q(x) \in K[x]$ thỏa mãn $h(x)g(x)+m(x)q(x) = 1$. Với $x = A$ ta có $h(A)g(A) = E$. Từ ấy suy ra $g(A)^{-1} = h(A)$. Chú ý rằng, trong biểu diễn $h(x)g(x) + m(x)q(x) = 1$ ta chon $h(x)$ sao cho $\deg(h(x)) < d = \deg(m(x))$. Khi đó $h(x)$ được xác định duy nhất.

Mệnh đề 1.7.1. *Nếu phân thức hữu tỷ* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *có* $(g(x), m(x)) = 1$ *thì* $\dfrac{f(A)}{g(A)} \in K[A]$ *và các giá trị riêng của ma trận* $\dfrac{f(A)}{g(A)}$ *là* $\dfrac{f(\lambda_1)}{g(\lambda_1)}, \ldots, \dfrac{f(\lambda_n)}{g(\lambda_n)}$. *Ngoài ra ta còn có* $|\dfrac{f(A)}{g(A)}| = \dfrac{|f(A)|}{|g(A)|}$.

Chứng minh. Như lập luận trên có $g(A)^{-1} = h(A)$. Do vậy ta có thể viết $\dfrac{f(A)}{g(A)} = f(A)h(A) \in K[A]$. Bởi vì $f(A)h(A)$ có giá trị riêng là $f(\lambda_1)h(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)h(\lambda_n)$ theo Định lý 1.6.4 nên $\dfrac{f(A)}{g(A)}$ có giá trị riêng là $\dfrac{f(\lambda_1)}{g(\lambda_1)}, \ldots, \dfrac{f(\lambda_n)}{g(\lambda_n)}$. Hơn nữa, ta còn có định thức $|\dfrac{f(A)}{g(A)}| = \dfrac{f(\lambda_1)}{g(\lambda_1)}.\dfrac{f(\lambda_2)}{g(\lambda_2)} \ldots \dfrac{f(\lambda_n)}{g(\lambda_n)} = \dfrac{|f(A)|}{|g(A)|}$.

Nhận xét, ta còn có thể xét tiếp trường hợp đa thức tối tiểu $m(x)$ của ma trận vuông A có nghiệm phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ với các bội tương ứng là $r_1, r_2, \ldots, r_s$. Ta có biểu diễn

$$m(x) = (x - \lambda_1)^{r_1}(x - \lambda_2)^{r_2} \ldots (x - \lambda_s)^{r_s}, r_1 + r_2 + \cdots + r_s = d.$$

Đặt $g_i(x) = \dfrac{m(x)}{(x - \lambda_i)^{r_i}}, i = 1, 2, \ldots, s$. Khi đó $(g_i(x), (x - \lambda_i)^{r_i}) = 1$. Vậy có các đa thức $h_i(x), q_i(x)$ thỏa mãn $h_i(x)g_i(x) + q_i(x)(x - \lambda_i)^{r_i} = 1$ và ta chọn $h_i(x)$ sao cho $\deg(h_i(x)) < r_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, s$. Đặt $p_i(x) = h_i(x)g_i(x), i = 1, 2, \ldots, s$. Khi đó $\deg(p_i(x)) < d$ và đa thức $p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_s(x) - 1$ chia hết cho $(x - \lambda_i)^{r_i}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, s$. Như vậy $p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_s(x) - 1$ chia hết cho $m(x)$. Do bởi bậc của $p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_s(x) - 1$ nhỏ hơn d nên

$$p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_s(x) = 1.$$

Giả sử đa thức $f(x) \in K[x]$ có bậc n. Khai triển Taylor tại mỗi λ_i được

$$f(x) = f(\lambda_i) + \frac{f'(\lambda_i)}{1!}(x - \lambda_i) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\lambda_i)}{n!}(x - \lambda_i)^n, i = 1, 2, \ldots, s.$$

Nhân mỗi biểu thức với $p_i(x)$ và cộng tất cả lại. Do $p_1(x)+p_2(x)+\cdots+p_s(x)=1$ nên có thể viết

$$f(x)=\sum_{i=1}^{s}\big[f(\lambda_i)+\frac{f'(\lambda_i)}{1!}(x-\lambda_i)+\cdots+\frac{f^{(r_i-1)}(\lambda_i)}{(r_i-1)!}(x-\lambda_i)^{r_i-1}\big]p_i(x)+$$

$F(x)m(x)$. Đặt $M_i=p_i(A)$ và $N_i=(A-\lambda_iE)p_i(A)$ với $i=1,2,\dots,s$. Khi đó ta có

$$p_1(A)+p_2(A)+\cdots+p_s(A)=E.$$

Vì $p_i(x)[p_i(x)-1]=p_i(x)[p_1(x)+\cdots+p_{i-1}(x)+p_{i+1}(x)+\cdots+p_s(x)]$ và $p_i(x)p_j(x)$ với $i\neq j$ đều chia hết cho $m(x)$ nên $M_i^2=M_i, M_iM_j=0$ khi $i\neq j$. Vấn đề này tác giả xin dừng ở đây.

1.8. Chéo hóa ma trận vuông

Xét không gian véctơ K^3 trên trường K với chiều bằng 3. Giả sử ma trận $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$. Đa thức đặc trưng của ma trận A là định thức sau:

$$|tE-A|=\begin{vmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & t-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & t-a_{33}\end{vmatrix}=t^3+\delta_1t^2+\delta_2t+\delta_3$$

với ba giá trị riêng $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. Ký hiệu $\vec{u}_i=(b_{i1},b_{i2},b_{i3}), i=1,2,3,$ là những véctơ khác váctơ $\vec{0}$ thỏa mãn $A\vec{u}_i^t=\lambda_i\vec{u}_i^t$ với $i=1,2,3$, véctơ $\vec{u}_i$ được gọi là véctơ riêng ứng với giá trị riêng λ_i của ma trận A. Khi ba véctơ này độc lập tuyến tính thì chúng lập thành một cơ sở của K^3. Mỗi véctơ $\vec{x}\in K^3$ đều có một biểu diễn duy nhất $\vec{x}=c_1\vec{u}_1+c_2\vec{u}_2+c_3\vec{u}_3$ và các biểu diễn ma trận

$$\begin{aligned}\vec{x} &= c_1(b_{11},b_{12},b_{13})+c_2(b_{21},b_{22},b_{23})+c_3(b_{31},b_{32},b_{33})\\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31}\\ b_{12} & b_{22} & b_{32}\\ b_{13} & b_{23} & b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= c_1A\vec{u}_1 + c_2A\vec{u}_2 + c_3A\vec{u}_3 = c_1\lambda_1\vec{u}_1 + c_2\lambda_2\vec{u}_2 + c_3\lambda_3\vec{u}_3 \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Từ đây có $AP\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ hay với mỗi véctơ $\vec{x}$:

$$P^{-1}AP\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Dễ ràng suy ra $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ và ta nói rằng đã *chéo hóa* được ma trận vuông A.

Ví dụ 1.8.1. Chéo hóa ma trận sau: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Lời giải. Từ $|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}\right.$

Với $\lambda_1 = 1$ ta có $(A - \lambda E)x = 0$, với $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = (x_1; 0) = x_1(1; 0)$. Vậy ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ ta có véctơ riêng $u_1 = (1; 0)$.

Với $\lambda_2 = 2$ ta có $(A - \lambda E)x = 0$, với $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 0 \\ 0x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow x = (3x_2; x_2) = x_2(3; 1)$. Vậy ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 2$ ta có véctơ riêng $u_2 = (3; 1)$. Hai véctơ riêng này độc lập tuyến tính.

Đặt $P = [u_1; u_2] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Khi đó ma trận P là ma trận làm chéo hóa ma trận A và $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Có thể khái quát quy trình chéo hóa một ma trận như sau:
Bước 1: Tìm các giá trị riêng $\lambda_1; \lambda_2; ......\lambda_n$ từ việc giải phương trình đặc trưng của ma trận.
Bước 2: Tìm các véctơ riêng $u_1; u_2; ....u_n$ tương ứng với các giá trị riêng tim được.
Bước 3: Lập ma trận P có $u_1; u_2; ....u_n$ là các cột. Khi đó ma trận $P^{-1}AP$ sẽ là ma trận chéo, với các phần tử chéo liên tiếp là $\lambda_1; \lambda_2; ......\lambda_n$ trong đó λ_i là giá trị riêng ứng với véctơ riêng $u_i, i = 1, 2, ..., n$.

Ví dụ 1.8.2. Chéo hóa ma trận sau: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Lời giải. Phương trình đặc trưng của A là:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-5)^2 = 0$$

nên các giá trị riêng của A là $\lambda = 1$ và $\lambda = 5$ (bội 2).
Với $\lambda = 1$, giải phương trình $(A - \lambda E)x = 0$ với $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ và ta có $\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & +0x_3 & = 0 \\ -2x_1 & +2x_2 & +0x_3 & = 0 \\ 0x_1 & +0x_2 & +4x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & & = 0 \\ -2x_1 & +2x_2 & & = 0 \\ & & +4x_3 & = 0 \end{cases}$ ta được véctơ riêng là $u_1 = (1; 1; 0)$.
Tương tự ứng với $\lambda = 5$ (bội 2) ta được các véctơ riêng tương ứng là: $u_2 = (-1; 1; 0), u_3 = (0; 0; 1)$. Các véctơ riêng này độc lập tuyến tính. Nên đặt $P = [u_1; u_2; u_3] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{P}^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Chương 2

Xét dãy số qua ma trận

2.1. Xét dãy số qua đồng cấu

Bây giờ ta vận dụng các đồng cấu vành vào việc nghiên cứu toán sơ cấp. Cụ thể ta vận dụng đồng cấu ϕ sau:

Giả thiết p, q là hai số nguyên dương không có nhân tử là số chính phương với $(p, q) = 1$. Khi đó tập
$\mathbb{Z}\left[\sqrt{p}, \sqrt{q}\right] = \{$ a + b$\sqrt{p}$ + c$\sqrt{q}$ + d$\sqrt{pq}$|a,b,c,d $\in \mathbb{Z}\}$ cùng với phép cộng và nhân lập thành một vành giao hoán với đơn vị và các ánh xạ dưới đây: $\phi_i : \mathbb{Z}\left[\sqrt{p}, \sqrt{q}\right] \to \mathbb{Z}\left[\sqrt{p}, \sqrt{q}\right]$

$$z = a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} + d\sqrt{pq} \mapsto \begin{cases} \phi_1(z) = a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} + d\sqrt{pq} \\ \phi_2(z) = a - b\sqrt{p} + c\sqrt{q} - d\sqrt{pq} \\ \phi_3(z) = a + b\sqrt{p} - c\sqrt{q} - d\sqrt{pq} \\ \phi_4(z) = a - b\sqrt{p} - c\sqrt{q} + d\sqrt{pq} \end{cases}$$

là những tự đẳng cấu.

Ví dụ 2.1.1. Với mỗi số nguyên dương n ta biểu diễn $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}$, trong đó $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng nếu n lẻ thì $a_n^2 - 3c_n^2$ chia hết cho 2^{n+1}.

Lời giải. Sử dụng quy nạp theo n cho đồng nhất thức

$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}$ và qua đồng cấu, ta được

$$\begin{aligned}
(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^n &= a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}\\
(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})^n &= a_n - b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} - d_n\sqrt{6}\\
(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})^n &= a_n + b_n\sqrt{2} - c_n\sqrt{3} - d_n\sqrt{6}\\
(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})^n &= a_n - b_n\sqrt{2} - c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}. \text{ Do đó ta có}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2a_n + 2c_n\sqrt{3} &= (1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{2}+\sqrt{3})^n\\
2a_n - 2c_n\sqrt{3} &= (1+\sqrt{2}-\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{2}-\sqrt{3})^n.
\end{aligned}$$

Vậy $4a_n^2 - 12c_n^2 = (2\sqrt{2})^n + (-2\sqrt{2})^n + (-4-2\sqrt{6})^n + (-4+2\sqrt{6})^n$. Khi n lẻ thì $4a_n^2 - 12c_n^2 = -2^n[(2+\sqrt{6})^n + (2-\sqrt{6})^n]$.

Do đó $a_n^2 - 3c_n^2 = -2^{n-1}\left[2^n + \binom{n}{2}2^{n-2}.6 + \cdots + \binom{n}{n-1}2.6^{\frac{n-1}{2}}\right]$ chia hết cho 2^{n+1}.

Ví dụ 2.1.2. Giả sử các dãy số $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ được xác định như sau:

$$\begin{cases}
a_1 = 1, b_1 = 1, c_1 = 1, d_1 = 0\\
a_{n+1} = a_n + 2b_n + 5c_n\\
b_{n+1} = a_n + b_n + 5d_n\\
c_{n+1} = a_n + c_n + 2d_n\\
d_{n+1} = b_n + c_n + d_n
\end{cases}$$

Chứng minh rằng nếu n lẻ thì $a_n^2 - 10d_n^2$ chia hết cho 2^{n-1}, nhưng không chia hết cho 2^n.

Lời giải. Với mỗi số nguyên dương n ta biểu diễn $(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})^n = A_n + B_n\sqrt{2} + C_n\sqrt{5} + D_n\sqrt{10}$, trong đó $A_n, B_n, C_n, D_n \in \mathbb{N}$. Hiển nhiên $A_1 = 1 = a_1, B_1 = 1 = b_1, C_1 = 1 = c_1, D_1 = 0 = d_1$. Từ $A_{n+1} + B_{n+1}\sqrt{2} + C_{n+1}\sqrt{5} + D_{n+1}\sqrt{10} = (1+\sqrt{2}+\sqrt{5})^{n+1}$ ta suy ra

$$A_{n+1} = a_{n+1}, B_{n+1} = b_{n+1}, C_{n+1} = c_{n+1}, D_{n+1} = d_{n+1}.$$

Sử dụng phương pháp quy nap theo n cho đồng nhất thức

$(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{5} + d_n\sqrt{10}$, ta có các biểu thức sau:

$$\begin{aligned}
(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})^n &= a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{5} + d_n\sqrt{10}\\
(1-\sqrt{2}+\sqrt{5})^n &= a_n - b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{5} - d_n\sqrt{10}\\
(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})^n &= a_n + b_n\sqrt{2} - c_n\sqrt{5} - d_n\sqrt{10}\\
(1-\sqrt{2}-\sqrt{5})^n &= a_n - b_n\sqrt{2} - c_n\sqrt{5} + d_n\sqrt{10}. \text{ Do đó ta có}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2a_n + 2d_n\sqrt{10} &= (1+\sqrt{2}+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{2}-\sqrt{5})^n\\
2a_n - 2d_n\sqrt{10} &= (1-\sqrt{2}+\sqrt{5})^n + (1+\sqrt{2}-\sqrt{5})^n.
\end{aligned}$$

Vậy khi n lẻ thì

$$4a_n^2 - 40d_n^2 = 2^n\Big[(2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{2})^n - (1+\sqrt{2})^n\Big]$$

hay $a_n^2 - 10d_n^2 = 2^{n-1}\Big[(2^n-1)\binom{n}{0} + (2^{n-2}.5 + (-1)^n.2)\binom{n}{2} + \cdots + (2^{n-2k}.5^k + (-1)^n.2^k)\binom{n}{2k} + \cdots\Big]$. Vậy $a_n^2 - 10d_n^2$ chia hết cho 2^{n-1}, nhưng không chia hết cho 2^n.

Ví dụ 2.1.3. Xét dãy

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1\\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n \geqslant 1.\end{cases}$$

Khi đó có

(i) $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^{n+1}$.

(ii) $a_n^4 = [a_{n+1}a_{n-1} + (-1)^n][a_{n+2}a_{n-2} - (-1)^n] = a_{n+1}a_{n-1}a_{n+2}a_{n-2} + 1$.

(iii) $a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2$ luôn luôn là hợp số khi $n \geqslant 2$.

(iv) $a_n + 1$ là hợp số $n \geqslant 3$.

Lời giải. (i) Biểu diễn $\begin{pmatrix} a_{n+1}\\ a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix}$. Như vậy có biểu diễn $\begin{pmatrix} a_{n+1}\\ a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}$, $n \geqslant 1$.

Đặt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ta nhận được $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2c+d \end{pmatrix}$. Vậy

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & a+b \\ 2c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$$

hay $\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1}$. Lấy định thức ở hai vế để có đồng nhất thức $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^{n+1}$.

(ii) Hiển nhiên có các hệ thức $a_{n+2} = 3a_{n-1} + 2a_{n-2}$ và $a_{n+1} = 2a_{n-1} + a_{n-2}$. Do đó

$$\begin{aligned} a_{n+2}a_{n-2} - a_{n+1}a_{n-1} &= (3a_{n-1} + 2a_{n-2})a_{n-2} - a_{n+1}a_{n-1} \\ &= 2a_{n-2}^2 + a_{n-1}[3a_{n-2} - a_{n+1}] \\ &= 2a_{n-2}^2 + a_{n-1}[2a_{n-2} - 2a_{n-1}] \\ &= -2a_{n-1}^2 + a_{n-2}[2a_{n-2} + 2a_{n-1}] \\ &= 2a_{n-2}a_n - 2a_{n-1}^2 = 2(-1)^n. \end{aligned}$$

Vậy $a_n^4 = [a_{n+1}a_{n-1} + (-1)^n][a_{n+2}a_{n-2} - (-1)^n] = a_{n+1}a_{n-1}a_{n+2}a_{n-2} + 1$.

(iii) Vì $a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2 = a_na_{n+1}$ nên $a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2$ luôn luôn là hợp số $n \geqslant 2$.

(iv) Nếu $a_n + 1 = p$ là số nguyên tố $n \geqslant 3$ thì từ $a_n^4 = a_{n+1}a_{n-1}a_{n+2}a_{n-2} + 1$ suy ra $a_{n+1}a_{n-1}a_{n+2}a_{n-2} \,\vdots\, p$. Vậy $a_{n+1}a_{n+2} \,\vdots\, p$. Nếu $a_{n+1} \,\vdots\, p$ thì $a_{n-1} \,\vdots\, p$ mâu thuẫn. Nếu $a_{n+2} \,\vdots\, p$ thì $a_{n+1} - 1 + a_n + 1 \,\vdots\, a_n + 1$ hay $a_{n+1} - 1 \,\vdots\, a_n + 1$. Vậy $a_{n-1} - 2 \,\vdots\, a_n + 1$ mâu thuẫn vì $n \geqslant 3$. Do đó $a_n + 1$ là hợp số.

Ví dụ 2.1.4. Giả sử hai dãy số (a_n) và (b_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} a_0 = 3, a_1 = 8, a_2 = 58 \\ a_{n+2} = 8a_{n+1} - 3a_n - 3a_{n-1}, n \geqslant 2; \\ b_0 = 3, b_1 = 5, b_2 = 45 \\ b_{n+2} = 5b_{n+1} + 10b_n - 7b_{n-1}, n \geqslant 2. \end{cases}$$

Ta có $\binom{2011}{1}b_{2010} + \cdots + \binom{2011}{2010}b_1 = \binom{2011}{1}a_{2010} - \binom{2011}{2}a_{2009} + \cdots - \binom{2011}{2010}a_1$.

Lời giải. Đây là bài toán về dãy các số nguyên. Nhưng ta lại xét bài toán trên $\mathbb{C}$. Xét phương trình $f(x) = x^3 - 8x^2 + 3x + 3 = 0$. Gọi ba nghiệm của nó trong $\mathbb{C}$ là x_1, x_2, x_3. Dễ dàng kiểm tra $x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = a_0, x_1+x_2+x_3 = a_1, x_1^2+x_2^2+x_3^2 = a_2$, tổng quát $a_n = x_1^n+x_2^n+x_3^n, n \geqslant 0$. Tương tự $b_n = y_1^n + y_2^n + y_3^n, n \geqslant 0$, trong đó y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của $g(y) = y^3 - 5y^2 - 10y + 7 = 0$. Kiểm tra trực tiếp: $f(y+1) = g(y)$ và $g(x-1) = f(x)$.
Vậy ta nhận được các hệ thức sau đây:

$$a_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n = (y_1+1)^n + (y_2+1)^n + (y_3+1)^n$$

$$b_n = y_1^n + y_2^n + y_3^n = (x_1-1)^n + (x_2-1)^n + (x_3-1)^n, n \geqslant 0.$$

Do vậy $\begin{cases} a_n = C_n^0 b_n + C_n^1 b_{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} b_1 + C_n^n b_0 \\ b_n = C_n^0 a_n - C_n^1 a_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a_1 + (-1)^n C_n^n a_0 \end{cases}$
và có $\binom{2011}{1} b_{2010} + \cdots + \binom{2011}{2010} b_1 = \binom{2011}{1} a_{2010} - \binom{2011}{2} a_{2009} + \cdots - \binom{2011}{2010} a_1$.

Ví dụ 2.1.5. Giả sử hai dãy số $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} a_0 = 3, a_1 = 2, a_2 = -6 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 5a_n + a_{n-1}, n \geqslant 2; \\ b_0 = 3, b_1 = -4, b_2 = -2 \\ b_{n+2} = -4b_{n+1} - 9b_n - 9b_{n-1}, n \geqslant 2. \end{cases}$$

Khi đó ta có các kết quả sau đây:

(i) $a_n = C_n^0 b_n + 2C_n^1 b_{n-1} + \cdots + 2^{n-1} C_n^{n-1} b_1 + 2^n C_n^n b_0$
$b_n = C_n^0 a_n - 2C_n^1 a_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} 2^{n-1} C_n^{n-1} a_1 + (-1)^n 2^n C_n^n a_0$.

(ii) Tìm số dư của phép chia a_p cho p khi p là số nguyên tố.

Lời giải. (i) Đây là bài toán về dãy các số nguyên. Nhưng ta lại xét bài toán trên $\mathbb{C}$. Xét phương trình $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1 = 0$. Gọi ba nghiệm của nó trong $\mathbb{C}$ là x_1, x_2, x_3.
Dễ dàng kiểm tra $x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = a_0, x_1 + x_2 + x_3 = a_1, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a_2$, tổng quát

$$a_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n, n \geqslant 0.$$

Tương tự $b_n = y_1^n + y_2^n + y_3^n, n \geqslant 0$, trong đó y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của $g(y) = y^3 + 4y^2 + 9y + 9 = 0$. Kiểm tra trực tiếp: $f(y+2) = g(y)$ và $g(x-2) = f(x)$. Vậy ta nhận được các hệ thức sau đây và suy ra (i):

$$a_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n = (y_1+2)^n + (y_2+2)^n + (y_3+2)^n$$

$$b_n = y_1^n + y_2^n + y_3^n = (x_1-2)^n + (x_2-2)^n + (x_3-2)^n, n \geqslant 0.$$

(ii) Từ $a_p = x_1^p + x_2^p + x_3^p = (x_1+x_2+x_3)^p - \sum\limits_{0 \leqslant i,j,k < p}^{i+j+k=p} \binom{p}{i,j,k} x_1^i x_2^j x_3^k$.

Với bộ ba i, j, k cố định, những hoán vị cho nhau, trong a_p có tổng con $\frac{p!}{i!j!k!}(x_1^i x_2^j x_3^k + x_1^i x_2^k x_3^j + x_1^j x_2^i x_3^k + x_1^j x_2^k x_3^i + x_1^k x_2^j x_3^i + x_1^k x_2^i x_3^j)$ là đa thức đối xứng của x_1, x_2, x_3.

Tổng này được viết thành đa thức với hệ số nguyên của $x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 5$ và $x_1x_2x_3 = 1$. Vậy $\sum\limits_{0 \leqslant i,j,k < p}^{i+j+k=p} \binom{p}{i,j,k} x_1^i x_2^j x_3^k$ là số nguyên chia hết cho p. Do đó $a_p \equiv 2^p (\mod p)$. Nếu $p = 2$ thì $a_2 = -6$ chia hết cho 2 và dư bằng 0. Nếu $p > 2$ thì $a_p \equiv 2^p \equiv 2(\mod p)$. Vậy dư bằng 2.

2.2. Xét dãy số qua phép nhân ma trận

Ví dụ 2.2.1. [Olympic IMO 2008] Giả sử A là ma trận vuông cấp 2 với định thức $|A| < 0$. Chứng minh rằng tồn tại hai số thực α_1, α_2 và hai ma trận cấp 2 là A_1, A_2 để có thể biểu diễn $A^n = \alpha_1^n A_1 + \alpha_2^n A_2$ với mọi số nguyên dương $n \geqslant 1$.

Lời giải. Giả sử $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Khi đó ta có đa thức đặc trưng $|xE - A| = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - bc$ và phương trình ma trận $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$. Do bởi $ad - bc = |A| < 0$ nên $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt α_1, α_2 và ta biểu diễn tích hai ma trận $(A - \alpha_1 E)(A - \alpha_2 E) = 0$. Hiển nhiên

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}(A - \alpha_2 E) - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}(A - \alpha_1 E) = A \\ \dfrac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(A - \alpha_2 E) - \dfrac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(A - \alpha_1 E) = E. \end{cases}$$

Như vậy, với $A_1 = \dfrac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(A - \alpha_2 E), A_2 = \dfrac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}(A - \alpha_1 E)$ ta có ngay các biểu diễn $A_1 + A_2 = E, \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = A$. Kiểm tra được ngay $A_1A_2 = A_2A_1 = -\dfrac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}(A - \alpha_2 E)(A - \alpha_1 E) = 0$ và $A_1 = A_1^n, A_2 = A_2^n$ với mọi $n \geqslant 1$. Từ đây suy ra $A^n = (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)^n = \alpha_1^n A_1 + \alpha_2^n A_2$ với mọi số nguyên $n \geqslant 1$.

Ví dụ 2.2.2. Giả sử $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$. Biểu diễn $A^n = \begin{pmatrix} a(n) & b(n) \\ c(n) & d(n) \end{pmatrix}$ với mỗi số tự nhiên n. Xác định các hàm số học $a(n), b(n), c(n), d(n)$.

Lời giải. Đa thức đặc trưng $|xE - A| = \begin{vmatrix} x-2 & 8 \\ -2 & x-10 \end{vmatrix} = (x-6)^2$ và phương trình ma trận $(A - 6E)^2 = 0$. Hàm số $f(x) = x^n$ có khai triển Taylor tại $x = 6$ như sau

$$f(x) = f(6) + \frac{f'(6)}{1!}(x-6) + \frac{f"(6)}{2!}(x-6)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(6)}{n!}(x-6)^n.$$

Với $x = A$ có $A^n = 6^n E + n6^{n-1}(A - 6E) = \begin{pmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix} + n6^{n-1}\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ hay $A^n = \begin{pmatrix} 6^n - 4n6^{n-1} & -8n6^{n-1} \\ 2n6^{n-1} & 6^n + 4n6^{n-1} \end{pmatrix}$.

Ví dụ 2.2.3. Với $A = \begin{pmatrix} 3 & 21 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $A^n = \begin{pmatrix} a(n) & b(n) & c(n) \\ a'(n) & b'(n) & c'(n) \\ a"(n) & b"(n) & c"(n) \end{pmatrix}$. Chứng minh rằng $a(n) + b'(n) + c"(n) = 3^{n+1}$.

Lời giải. Đa thức đặc trưng $|xE - A| = \begin{vmatrix} x-3 & -21 & -12 \\ 0 & x-2 & -1 \\ 0 & 1 & x-4 \end{vmatrix} = (x-3)^3$ và phương trình ma trận $(A - 3E)^3 = 0$. Hàm số $f(x) = x^n$ có khai triển Taylor tại $x = 3$ như sau

$$f(x) = f(3) + \frac{f'(3)}{1!}(x-3) + \frac{f"(3)}{2!}(x-3)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n.$$

Với $x = A$ có $A^n = 3^n E + n3^{n-1}(A - 3E) + \dfrac{n(n-1)3^{n-2}}{2}(A - 3E)^2$ hay $A^n = \dfrac{(n^2 - 3n + 2)3^n}{2}E + (2n - n^2)3^{n-1}A + \dfrac{n(n-1)3^{n-2}}{2}A^2$. Từ đó suy ra $A^n = \dfrac{(n^2-3n+2)3^n}{2}E + (2n-n^2)3^{n-1}\begin{pmatrix} 3 & 21 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} +$ $\dfrac{n(n-1)3^{n-2}}{2}\begin{pmatrix} 9 & 93 & 105 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & 15 \end{pmatrix}$ và được $a(n) = 3^n, b'(n) = (3-n)3^{n-1}$, $c"(n) = (3+n)3^{n-1}$. Do đó $a(n) + b'(n) + c"(n) = 3^{n+1}$.

Ví dụ 2.2.4. Xét ba dãy số $(a_n), (b_n), (c_n)$ với $a_0 = 1, b_0 = 2, c_0 = 3$ và

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n + c_n \\ b_{n+1} = -a_n + b_n \\ c_{n+1} = -2a_n + c_n, n \geqslant 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a_n^2 + a_n + 1 = c_n = 2b_n - 1$ với mọi số nguyên $n \geqslant 0$.

Lời giải. Biểu diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
Chú ý $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E + A$. Hiển nhiên $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ và $A^3 = 0$. Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = (E+A)^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = (E + nA + C_n^2A^2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ và ta nhận được $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2n & n \\ -n & n^2-n+1 & \dfrac{-n^2+n}{2} \\ -2n & 2n^2-2n & -n^2+n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

hay $\begin{cases} a_n = 1-n \\ b_n = \dfrac{n^2-3n+4}{2} \\ c_n = n^2-3n+3, n \geqslant 0. \end{cases}$ Việc kiểm tra $a_n^2 + a_n + 1 = c_n = 2b_n - 1$ với mọi số nguyên $n \geqslant 0$ là tầm thường.

Ví dụ 2.2.5. Ba dãy số $(a_n), (b_n), (c_n)$ xác định bởi $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$ và

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + 3b_n - 3c_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n - 2c_n \\ c_{n+1} = 4a_n + 4b_n - 3c_n, n \geqslant 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

(i) $a_n + 2 \equiv 0 (\mod 2^n), b_n + 1 \equiv 0 (\mod 2^{n+1}), c_n + 3 \equiv 0 (\mod 2^{n+2})$ và $a_n + b_n = c_n + 2^n$ với mọi số nguyên $n \geqslant 0$ khi $a = 1, b = 1, c = 1$.

(ii) $4a_n^2 + 4c_n^2 = 25b_n^2$ với mọi số nguyên $n \geqslant 0$ khi $a = 3, b = 2, c = 4$.

Lời giải. Biểu diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
Vì $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ nên ta có ngay $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
hay $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 \\ 2.2^n - 1 \\ 4.2^n - 3 \end{pmatrix}$. Do đó ta có $\begin{cases} a_n = 3.2^n - 2 \\ b_n = 2.2^n - 1 \\ c_n = 4.2^n - 3. \end{cases}$ Việc kiểm tra $a_n + 2 \equiv 0 (\mod 2^n), b_n + 1 \equiv 0 (\mod 2^{n+1}), c_n + 3 \equiv 0 (\mod 2^{n+2})$; $a_n + b_n = c_n + 2^n$ và đã có (i).
(ii) $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ hay $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2^n \\ 2.2^n \\ 4.2^n \end{pmatrix}$. Do đó ta nhận được $4a_n^2 + 4c_n^2 = 25b_n^2$ với mọi số nguyên $n \geqslant 0$.

Ví dụ 2.2.6. [Olympic IMO 1996] Cho ma trận vuông

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Giả sử $A^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n) \\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n) \end{pmatrix}$.

Xác định giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)}$.

Lời giải. Biểu diễn $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B + C$.

Khi đó $A = B + C$ và $BC = CB = 0$. Từ đây suy ra $A^n = B^n + C^n$ và có $a_{11}(n) = 2^n, a_{12}(n) = a_{13}(n) = a_{21}(n) = a_{31}(n) = 0$. Quy nạp theo n có $a_{22}(n) = 3^n, a_{23}(n) = 0, a_{32}(n) = 3^n - 2^n, a_{33}(n) = 2^n$. Giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n}{3^n - 2^n} = 1$.

Ví dụ 2.2.7. Xét dãy $a_0 = a_1 = 1$ và $a_{n+2} = 9a_{n+1} - 14a_n$ với $n \geqslant 0$. Khi đó ta luôn có đồng nhất thức $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = -6.14^{n-1}$.

Lời giải. Biểu diễn $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -14 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$. Như vậy ta có $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -14 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n \geqslant 1$. Đặt $\begin{pmatrix} 9 & -14 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ta nhận được $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vậy $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a+b \\ -5c+d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a+b & a+b \\ -5c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hay $\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -14 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Lấy định thức ở hai vế để có đồng nhất thức $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = -6.14^{n-1}$.

Ví dụ 2.2.8. Xét dãy $a_0 = a_1 = 1$ và $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$ với $n \geqslant 0$. Chứng minh rằng $a_{n+1}a_{n-1}a_{n+2}a_{n-2} + 9.2^{2n+1}$ chia hết cho a_n^2 và $a_n^2 + 7.2^n$ khi n là số nguyên dương chẵn.

Lời giải. (i) Biểu diễn $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$. Như vậy ta có

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, n \geqslant 1$. Đặt $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ta nhận được $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vậy $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+b \\ 5c+d \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+b & a+b \\ 5c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hay $\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Lấy định thức hai vế để có đồng nhất thức $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^{n-1}2^{n+1}$.
(ii) Hiển nhiên $a_{n+2} = 39a_{n-1} + 22a_{n-2}$ và $a_{n+1} = 11a_{n-1} + 6a_{n-2}$. Do đó

$$\begin{aligned} a_{n+2}a_{n-2} - a_{n+1}a_{n-1} &= (39a_{n-1} + 22a_{n-2})a_{n-2} - a_{n+1}a_{n-1} \\ &= 22a_{n-2}^2 + a_{n-1}[39a_{n-2} - a_{n+1}] \\ &= 22a_{n-2}^2 + a_{n-1}[39a_{n-2} - (11a_{n-1} + 6a_{n-2})] \\ &= -11a_{n-1}^2 + 11a_{n-2}[2a_{n-2} + 3a_{n-1}] \\ &= 11a_{n-2}a_n - 11a_{n-1}^2 = (-1)^{n-2}11.2^n. \end{aligned}$$

Vậy $a_{n+1}a_{n-1}a_{n+2}a_{n-2} = [a_n^2 - 2(-1)^n.2^n][a_n^2 + 9(-1)^n.2^n]$. Từ đây suy ra hệ thức $a_{n+1}a_{n-1}a_{n+2}a_{n-2} + 9.2^{2n+1} = a_n^2\big(a_n^2 + (-1)^n.7.2^n\big)$ và như thế khi n là số nguyên dương chẵn có $a_{n+1}a_{n-1}a_{n+2}a_{n-2} + 9.2^{2n+1}$ chia hết cho a_n^2 và $a_n^2 + 7.2^n$.

Ví dụ 2.2.9. Xét hai dãy số $(x_n), (y_n)$ với $x_0 = a, y_0 = b$ và số hạng khác:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 17x_n - 6y_n + 22 \\ y_{n+1} = 35x_n - 12y_n + 48, n \geqslant 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

(i) $x_n \equiv 3^{n+2} - 1 (\mod 2^{n+3})$, $y_n \equiv -5.2^{n+2} + 1 (\mod 3^{n+1})$ và quan hệ $12x_n - 5y_n = 3^{n+1} + 2^{n+2} - 17$ với mọi số nguyên $n \geqslant 0$ khi $a = 0, b = 2$.

(ii) $7x_n + 10 = 3y_n$ với mọi số nguyên $n \geqslant 0$ khi $a = 2, b = 8$.

Lời giải. (i) Thực hiện phép biến đổi
$\begin{cases} x_{n+1} + 1 = 17(x_n + 1) - 6(y_n - 1) \\ y_{n+1} - 1 = 35(x_n + 1) - 12(y_n - 1). \end{cases}$ Nếu coi $x_n + 1$ và $y_n - 1$ như a_n

và b_n thì có biểu diễn dạng ma trận sau đây

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Vì $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ nên ta có ngay biểu diễn $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hay có biểu diễn

$$\begin{pmatrix} x_n + 1 \\ y_n - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.2^n + 9.3^n \\ -20.2^n + 21.3^n \end{pmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x_n = -8.2^n + 9.3^n - 1 \\ y_n = -20.2^n + 21.3^n + 1. \end{cases}$$

Việc kiểm tra $12x_n - 5y_n = 3^{n+1} + 2^{n+2} - 17$ để có (i) với mọi số nguyên $n \geqslant 0$ là tầm thường.
(ii) Biểu diễn $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ hay có $\begin{pmatrix} x_n + 1 \\ y_n - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} \\ 7.3^n \end{pmatrix}$. Như vậy $x_n = 3^{n+1} - 1, y_n = 7.3^n + 1$. Từ đây suy ra $7x_n + 10 = 3y_n$ với mọi số nguyên $n \geqslant 0$ khi $a = 2, b = 8$.

Chú ý 2.2.1. Đối với những bài toán xác định số hạng của dãy số cho bởi $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ hoặc $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ ta nên chéo hóa ma trận.

2.3. Xét dãy số qua chéo hóa ma trận

Ví dụ 2.3.1. Xét hai dãy các số nguyên $(x_n), (y_n)$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_0 = 4, y_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n, n \geqslant 0. \end{cases}$$

Biểu diễn x_n, y_n theo n.

Lời giải.
Biểu diễn ma trận $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$. Vậy $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Đa thức đặc trưng $\begin{vmatrix} 1-x & 4 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix}$ có hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 5$ với hai véctơ tương ứng là $(1;1), (2;-1)$. Chéo hóa $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Tóm lại có

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hay $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5^n + 2(-1)^n \\ 2.5^n + (-1)^{n-1} \end{pmatrix}$.

Ví dụ 2.3.2. Tìm a_n và b_n theo n của dãy số (a_n) và (b_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} a_0 = 3, b_0 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 2b_n \\ n > 0. \end{cases}$$

Lời giải. Biểu diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ và như vậy có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Phương trình đặc trưng của $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ là

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix} = x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4).$$

Với giá trị riêng -1 được véctơ riêng $(1;-1)$ và với giá trị riêng 4 được véctơ riêng $(2;3)$. Hai véctơ này độc lập tuyến tính. Đặt $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Khi đó ma trận nghịch đảo $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}$ và ta có ngay ma trận hệ thức

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ hay } A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Từ đây suy ra
$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
hay $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ và nhận được công thức xác định: $\begin{cases} a_n = \dfrac{4^{n+2} - (-1)^{n+2}}{5} \\ b_n = \dfrac{6.4^{n+1} + (-1)^n}{5}, n \geqslant 0. \end{cases}$

Ví dụ 2.3.3. Tìm dư của phép chia số $a_{2011} + b_{2011}$ cho 2011 biết hai dãy số (a_n) và (b_n) được xác định bởi: $\begin{cases} a_0 = 2, b_0 = 3 \\ a_{n+1} = 17a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = 35a_n - 12b_n, n > 0. \end{cases}$

Lời giải. Biểu diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ và như vậy $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ma trận $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}$ có phương trình đặc trưng $\begin{vmatrix} 17 - x & -6 \\ 35 & -12 - x \end{vmatrix} = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Với giá trị riêng $x = 2$ được véctơ riêng $(2; 5)$ và với giá trị riêng $x = 3$ được véctơ riêng $(3; 7)$. Hai véctơ này độc lập tuyến tính. Đặt $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Khi đó ma trận nghịch đảo $P^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ và ta có ngay ma trận hệ thức

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ hay } A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Từ đây suy ra
$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ hay $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ và nhận được công thức xác định a_n và b_n như sau: $\begin{cases} a_n = 12.3^n - 10.2^n \\ b_n = 28.3^n - 25.2^n, n \geqslant 0. \end{cases}$

Do bởi $3^{2010} \equiv 1(\mod 2011)$ và $2^{2010} \equiv 1(\mod 2011)$ nên $a_{2011} + b_{2011}$ chia cho 2011 dư $40.3 - 35.2 = 50$.

Ví dụ 2.3.4. Giả sử hai dãy số nguyên dương (a_n) và (b_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} a_0 = 1, b_0 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \\ n > 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $|a_n - b_n| = 3$ với mọi $n \geqslant 0$ và $(a_{2012} + 2)(b_{2012} - 1)$ chia hết cho 5^{4024}, nhưng không chia hết cho 5^{4025}.

Lời giải. Biểu diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ và như vậy có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Phương trình đặc trưng của $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ là $\begin{vmatrix} x-1 & -4 \\ -2 & x-3 \end{vmatrix} = x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$. Với giá trị riêng $x = 5$ được véctơ riêng $(1;1)$ và với giá trị riêng $x = -1$ được véctơ riêng $(2;-1)$. Hai véctơ này độc lập tuyến tính. Đặt $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Khi đó ma trận nghịch đảo $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ và ta có ngay ma trận hệ thức

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ hay } A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Từ đây suy ra

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$ hay $$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$ và nhận được công thức $\begin{cases} a_n = 3.5^n - 2(-1)^n \\ b_n = 3.5^n + (-1)^n \end{cases}$ với mọi số nguyên $n \geqslant 0$. Như vậy $|a_n - b_n| = 3, n \geqslant 0$. Kết quả $(a_{2012} + 2)(b_{2012} - 1)$ chia hết cho 5^{4024}, nhưng không chia hết cho 5^{4025} là hiển nhiên.

Ví dụ 2.3.5. Xét ba dãy các số $(x_n), (y_n)$ và (z_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_0 = 4, y_0 = 2, z_0 = 1 \\ x_{n+1} = -9x_n + 2y_n + 6z_n \\ y_{n+1} = 5x_n - 3z_n \\ z_{n+1} = -16x_n + 4y_n + 11z_n, n \geqslant 0. \end{cases}$$

Biểu diễn x_n, y_n, z_n theo n.

Lời giải. Biểu diễn ma trận $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \\ -16 & 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$. Như vậy $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$ và suy ra $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Đa thức đặc trưng $\begin{vmatrix} -9-x & 2 & 6 \\ 5 & -x & -3 \\ -16 & 4 & 11-x \end{vmatrix}$ có ba nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$ với ba véctơ riêng tương ứng là $(1; -1; 2), (2; -1; 3), x_3 = (2; -1; 4)$. Chéo hóa $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \\ -16 & 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Tóm lại ta có biểu diễn $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ qua tích ba ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ hay } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 2.3.6. Ba dãy số $(a_n), (b_n), (c_n)$ xác định bởi các phương trình sau:

$$\begin{cases} a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c \\ a_{n+1} = 4a_n + 3b_n - 3c_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n - 2c_n \\ c_{n+1} = 4a_n + 4b_n - 3c_n \\ n > 0. \end{cases}$$

Khi đó hãy chứng minh các kết quả sau đây:

(i) $a_n + b_n = c_n$ với mọi số nguyên $n \geqslant 0$ khi $a = 1, b = 2, c = 3$.

(ii) $a_{2010} \equiv b_{2010} + c_{2010} (\mod 2011)$ khi $a = 3, b = 2, c = 1$.

(iii) $a_n c_n = 3b_n^2$ với mọi số nguyên $n \geqslant 0$ khi $a = 12, b = 8, c = 16$.

Lời giải. Biểu diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$ và như vậy có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Phương trình đặc trưng của $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ là $\begin{vmatrix} x-4 & -3 & 3 \\ -2 & x-3 & 2 \\ -4 & -4 & x+3 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-2)$. với giá trị riêng $x = 1$ được hai véctơ riêng độc lập tuyến tính là $(1; 2; 3)$ và $(1; 1; 2)$ với giá trị riêng $x = 2$ được véctơ riêng $(3; 2; 4)$. Ba véctơ này độc lập tuyến tính. Đặt $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Khi đó ma trận nghịch đảo $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ và ta có ngay ma trận hệ thức $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hay ta có được $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$. Từ đây suy ra biểu diễn dạng ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

(i) Ta có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3.2^n & 1 \\ 2 & 2.2^n & 1 \\ 3 & 4.2^n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ khi $a = 1, b = 2$ và $c = 3$. Như vậy $a_n = 1, b_n = 2, c_n = 3$ và $a_n + b_n = c_n$ với mọi $n \geqslant 0$.

(ii) Ta có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3.2^n & 1 \\ 2 & 2.2^n & 1 \\ 3 & 4.2^n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$ khi $a = 3, b = 2$ và $c = 1$. Như vậy $a_n = 3.2^{n+2} - 9, b_n = 2^{n+3} - 6, c_n = 2^{n+4} - 15$ với mọi $n \geqslant 0$. Từ đây suy ra $a_{2010} \equiv 3 \equiv 2 + 1 \equiv b_{2010} + c_{2010} (\mod 2011)$,

(iii) Ta có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3.2^n & 1 \\ 2 & 2.2^n & 1 \\ 3 & 4.2^n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ khi $a = 12, b = 8$ và $c = 16$. Như vậy $a_n = 3.2^{n+2}, b_n = 2^{n+3}, c_n = 2^{n+4}$ với mọi $n \geqslant 0$. Từ đây suy ra $a_n c_n = 3b_n^2$

Ví dụ 2.3.7. Tìm a_n, b_n và c_n theo n của ba dãy số $(a_n), (b_n)$ và (c_n) được xác định bởi các phương trình sau đây:

$$\begin{cases} a_0 = 2, b_0 = 3, c_0 = 4 \\ a_{n+1} = a_n - 3b_n + 3c_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 5b_n + 3c_n \\ c_{n+1} = 6a_n - 6b_n + 4c_n \\ n > 0. \end{cases}$$

Lời giải. Biểu diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$ và như vậy có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Phương trình đặc trưng của $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ là $\begin{vmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -6 & 6 & x-4 \end{vmatrix} = (x+2)^2(x-4)$.

Với giá trị riêng -2 được hai véctơ riêng độc lập tuyến tính là $(1;1;0)$ và $(1;0;-1)$; với giá trị riêng 4 được véctơ riêng $(1;1;2)$. Ba véctơ này độc lập tuyến tính. Đặt $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Khi đó ta có ma trận nghịch đảo P^{-1} và có ngay ma trận hệ thức

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ hay ta có được $A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Từ đây suy ra biểu diễn dạng ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 2.3.8. Ba dãy số $(a_n), (b_n)$ và (c_n) xác định bởi các phương trình:

$$\begin{cases} a_0 = 1, b_0 = 2, c_0 = 4 \\ a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = b_n - c_n \\ c_{n+1} = 2b_n + 4c_n, n > 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a_n + b_n + c_n$ chia hết cho 2^n, nhưng không chia hết cho 2^{n+1} với mọi số nguyên $n \geqslant 0$.

Lời giải. Biểu diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$ và như vậy có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Phương trình đặc trưng của $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ là $\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & -2 & x-4 \end{vmatrix} = (x-2)^2(x-3)$. Với giá trị riêng $x = 2$ được một véctơ riêng là $(1;0;0)$; với giá trị riêng $x = 3$ được véctơ riêng $(1;1;-2)$. Hai véctơ trên độc lập tuyến tính, không lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Vậy ma trận $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ không thể chéo hóa được.

Để giải quyết tình huống này, biến đổi $\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$ và suy ra $\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Phương trình đặc trưng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ là $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -2 & x-4 \end{vmatrix} = (x-2)(x-3)$. Với giá trị riêng $x = 2$ được một véctơ đọc lập tuyến tính là $(1; -1)$; với giá trị riêng $x = 3$ được véctơ riêng $(1; -2)$. Hai véctơ này độc lập tuyến tính, lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Đặt $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Khi đó ma trận nghịch đảo $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ và ta có ngay ma trận hệ thức $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ hay ta có được $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$. Từ đây suy ra biểu diễn dạng ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

hay $b_n = 8.2^n - 6.3^n = 2^{n+3} - 2.3^{n+1}, c_n = -2^{n+3} + 4.3^{n+1}$.
Vấn đề xác định a_n. Vì$a_{n+1} = 2a_n + b_n = 2a_n + 2^{n+3} - 2.3^{n+1}$ nên ta tìm a_n trong dạng $a_n = (un+v)2^n + t3^n$. Ta có hệ $\begin{cases} v + t = a_0 = 1 \\ 2u + 2v + 3t = a_1 = 4 \\ 8u + 4v + 9t = a_2 = 6. \end{cases}$
Giải ra được $u = 4, t = -6, v = 7$ và $a_n = (4n + 7)2^n - 2.3^{n+1}$. Từ đây suy ra $a_n + b_n + c_n = (4n + 7).2^n$.

2.4. Xây dựng bài toán mới cho dãy số

Ta sẽ xây dựng bài toán mới từ bài toán đã biết. Nó được đặt ra như sau:

Bài toán 1

Giả sử hai dãy các số nguyên $(a_n), (b_n)$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} a_0 = a, b_0 = b \\ a_{n+1} = a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n, n \geqslant 0. \end{cases}$$

Biểu diễn ma trận $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$. Vậy ta có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$. Chéo hóa ma trận A qua tích ma trận:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Như vậy có được $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
Giả sử đa thức $g(x) \in \mathbb{R}[x]$. Xét hai dãy $(x_n), (y_n)$ xác định bởi phương trình ma trận như sau: $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = g(A)^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Vấn đề đặt ra: Phát hiện kết quả mới về x_n và y_n.
Dễ dàng có biến đổi $g(A) = P \begin{pmatrix} g(5) & 0 \\ 0 & g(-1) \end{pmatrix} P^{-1}$. Ta có biểu diễn:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} g(5)^n & 0 \\ 0 & g(-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g(5)^n & 2g(-1)^n \\ g(5)^n & g(-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a+2b}{3} \\ \frac{a-b}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Để có quan hệ mới, ta chọn $g(x)$ một cách thích hợp. Với $g(x) = x + 5$ và $a = b = 1$ ta có $g(5) = 10$ và xây dựng bài toán mới:

Ví dụ 2.4.1. Hai dãy số $(x_n), (y_n)$ xác định bởi các phương trình sau:

$$\begin{cases} x_0 = 1, y_0 = 1 \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \big(A + 5E\big) \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \text{ với } n > 0. \end{cases}$$

Hãy xác định x_n và y_n theo n.

Lời giải. Sử dụng quy nạp theo n được $x_n = y_n = 10^n$. Với $g(x) = x + 20$ và $a = 2, b = -1$ ta có $g(-1) = 19$ và như vậy $x_n = 2.19^n, y_n = 19^n$. Từ đây xây dựng được bài toán mới:

Ví dụ 2.4.2. Hai dãy số $(x_n), (y_n)$ xác định bởi các phương trình sau:

$$\begin{cases} x_0 = 2, y_0 = -1 \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \big(A + 20E\big) \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 4 \\ 2 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \text{ với } n > 0. \end{cases}$$

Khi đó hãy xác định số nguyên dương nhỏ nhất r để phương trình dưới đây có nghiệm $t, z \in \mathbb{Z}$:

$$x_{2011}t - y_{2011}z = r.$$

Lời giải. Sử dụng quy nạp theo n được $x_n = 2.19^n, y_n = 19^n$. Số nguyên dương nhỏ nhất r để phương trình $x_{2011}t - y_{2011}z = r.$ có nghiệm nguyên $t, z \in \mathbb{Z}$ là $r = 19^{2011}$.

Bài toán 2

Giả sử ba dãy số $(a_n), (b_n)$ và (c_n) được xác định bởi các phương trình:

$$\begin{cases} a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c \\ a_{n+1} = 4a_n + 3b_n - 3c_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n - 2c_n \\ c_{n+1} = 4a_n + 4b_n - 3c_n \\ n > 0. \end{cases}$$

Biểu diễn dạng ma trận
$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$ và như vậy có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Với ma trận $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ và ma trận nghịch đảo $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ ta có ngay ma trận hệ thức $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hay ta có được $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$. Từ đây suy ra biểu diễn ma trận: $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Giả sử đa thức $g(x) \in \mathbb{R}[x]$. Xét ba dãy $(x_n), (y_n)$ và (z_n) xác định bởi phương trình ma trận như sau: $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = g(A)^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Vấn đề đặt ra: Phát hiện kết quả mới về x_n, y_n và z_n.

Dễ dàng có biến đổi $g(A) = P \begin{pmatrix} g(1) & 0 & 0 \\ 0 & g(2) & 0 \\ 0 & 0 & g(1) \end{pmatrix} P^{-1}$. Từ đây suy ra biểu diễn ma trận: $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} g(1)^n & 0 & 0 \\ 0 & g(2)^n & 0 \\ 0 & 0 & g(1)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Khi $a = 12, b = 8, c = 16$ ta có biểu diễn:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} g(1)^n & 0 & 0 \\ 0 & g(2)^n & 0 \\ 0 & 0 & g(1)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12g(2)^n \\ 8g(2)^n \\ 16g(2)^n \end{pmatrix}$$

và vẫn có $x_n z_n = 3y_n^2$. Để có quan hệ mới, ta sẽ chọn $g(x)$ một cách thích hợp. Với $g(x) = x^2 + x + 1$ ta có $g(2) = 7$. Khi đó $x_n = 12.7^n, y_n = 8.7^n, z_n = 16.7^n$. Từ đây suy ra ước chung lớn nhất $(x_{2011}, y_{2011}, z_{2011}) = 4.7^{2011}$ và xây dựng được bài toán mới:

Ví dụ 2.4.3. Ba dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ xác định bởi các phương trình sau:

$$\begin{cases} x_0 = 12, y_0 = 8, z_0 = 16 \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \left(A^2 + A + E\right) \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \text{ với } n > 0 \text{ và } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Hãy xác định ước chung lớn nhất $(x_{2011}, y_{2011}, z_{2011})$.

Lời giải. Sử dụng quy nạp theo n được $x_n = 12.7^n, y_n = 8.7^n, z_n = 16.7^n$. Từ đây suy ra ước chung lớn nhất $(x_{2011}, y_{2011}, z_{2011}) = 4.7^{2011}$.
Với $g(x) = x^2 + 2x + 4$ ta có $g(2) = 12$. Khi đó $x_n = 12.12^n, y_n = 8.12^n, z_n = 16.12^n$. Từ đây suy ra $4x_n = 6y_n = 3z_n$ và xây dựng được bài toán mới:

Ví dụ 2.4.4. Ba dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ xác định bởi các phương trình sau:

$$\begin{cases} x_0 = 12, y_0 = 8, z_0 = 16 \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \left(A^2 + A + E\right) \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \text{ với } n > 0 \text{ và } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Hãy chứng minh $4x_n = 6y_n = 3z_n$ với mọi $n \geqslant 0$.

Lời giải. Sử dụng quy nạp theo n được $x_n = 12.12^n, y_n = 8.12^n, z_n = 16.12^n$. Từ đây suy ra $4x_n = 6y_n = 3z_n$.
Với $g(x) = 2x^2 + x + 6$ ta có $g(2) = 16$. Khi đó $x_n = 12.16^n, y_n = 8.16^n, z_n = 16.16^n$.

Từ đây suy ra $x_n \,\vdots\, 2^{4n+2}, y_n \,\vdots\, 2^{4n+3}, z_n \,\vdots\, 2^{4n+4}$ và xây dựng được bài toán mới:

Ví dụ 2.4.5. Ba dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ xác định bởi các phương trình:

$$\begin{cases} x_0 = 12, y_0 = 8, z_0 = 16 \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \left(A^2 + A + E\right) \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \text{ với } n > 0 \text{ và } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Hãy chứng minh $x_n \vdots 2^{4n+2}, y_n \vdots 2^{4n+3}, z_n \vdots 2^{4n+4}$ và $x_n \not\vdots 2^{4n+3}$, $y_n \not\vdots 2^{4n+4}$, $z_n \not\vdots 2^{4n+5}$ với mọi $n \geqslant 0$.

Lời giải. Sử dụng quy nạp theo n được $x_n = 12.16^n, y_n = 8.16^n, z_n = 16.16^n$. Từ đây suy ra $x_n \vdots 2^{4n+2}, y_n \vdots 2^{4n+3}, z_n \vdots 2^{4n+4}$ và $x_n \not\vdots 2^{4n+3}$, $y_n \not\vdots 2^{4n+4}$, $z_n \not\vdots 2^{4n+5}$ với mọi $n \geqslant 0$.
Khi $a = 1, b = 2, c = 3$ ta có biểu diễn:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} g(1)^n & 0 & 0 \\ 0 & g(2)^n & 0 \\ 0 & 0 & g(1)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(1)^n \\ 2g(1)^n \\ 3g(1)^n \end{pmatrix}$$

và luôn có $x_n + y_n = z_n$. Để có quan hệ mới, chọn $g(x)$ một cách thích hợp.
Với $g(x) = x^2 + x + 1$ ta có $g(1) = 3$. Khi đó $x_n = 3^n, y_n = 2.3^n, z_n = 3^{n+1}$.
Xây dựng được bài toán mới:

Ví dụ 2.4.6. Ba dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ xác định bởi các phương trình:

$$\begin{cases} x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 3 \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \left(A^2 + A + E\right) \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \text{ với } n > 0 \text{ và } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $x_n + y_n = 3^{n+1}$.

Lời giải. Sử dụng quy nạp theo n được $x_n = 3^n, y_n = 2.3^n, z_n = 3^{n+1}$. Từ đây suy ra $x_n + y_n = 3^{n+1}$.
Với $g(x) = x^2 + 2x + 4$ ta có $g(1) = 7$. Khi đó $x_n = 7^n, y_n = 2.7^n, z_n = 3.7^n$.
Từ đây suy ra $x_n y_n = 2.14^n$ và xây dựng bài toán mới:

Ví dụ 2.4.7. Ba dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 3 \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \left(A^2 + A + E\right) \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \text{ với } n > 0 \text{ và } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Hãy chứng minh $x_n y_n = 2.14^n$ với mọi $n \geqslant 0$.

Lời giải. Sử dụng quy nạp theo n được $x_n = 7^n, y_n = 2.7^n, z_n = 3.7^n$. Từ đây suy ra $x_n y_n = 2.14^n$.

Kết luận

Luận văn đã trình bày và nhận được những kết quả sau đây.

1. Trình bày một số định lý, tính chất đã chứng minh được tính đóng đại số của Trường $\mathbb{C}$ và các ví dụ áp dụng có tính hệ thống của Trường số phức.

2. Xây dựng vành ma trận K[A], đã tính được định thức và giá trị riêng của đa thức g(A) khi biết định thức và giá trị riêng của A và cách tính ma trận nghịch đảo, chéo háo ma trận có ví dụ minh họa.

3. Đã biểu diễn được dãy số dưới dạng ma trận, vận dụng các phép biến đổi của ma trận để tìm số hạng tổng quát của dãy số. Chuyển bài toán dãy số về bài toán ma trận. Đặc biệt trong luận văn này nghiên cứu 2, 3 dãy số đồng thời.

4. Sử dụng ma trận để xây dựng bài toán mới từ một bài toán ban đầu, điều này rất thiết thực với việc bồi dưỡng Học sinh giỏi.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Duy Thuận, Phi Mạnh Ban, Nông Quốc Chinh (2003), *Đại Số Tuyến Tính*, NXB Đại Học Sư Phạm Hà Nội.

[2] Nguyễn Đình Trí, Lê Trọng Vinh, Dương Thủy Vỹ (1996), *Toán Học Cao Cấp*, Tập một, NXB Giáo Dục Hà Nội.

[3] *Bản tin Dạy và Học trong nhà trường, số 2* - Viện nghiên cứu sư phạm - Trường đại học sư phạm Hà Nội.

[4] Tuyển tập: *The IMO Compendium 1959-2004.*

[5] D. Faddéev et I. Sominski, *Recueil D'Exercices D'Algèbre Supérieure,* Editions Mir-Moscou 1977.

[6] Z. Kadelburg, D. Đukie', M. Lukie' and I. Matie', *Inequalities of Karamata, Schur and Muirhead and some applications,*, The Teaching of Mathematics 2005, Vol. VIII,1, pp. 31-45.