A: ĐẶT VẤN ĐỀ

Toán học là một môn khoa học tự nhiên , toán học có một vai trò rất quan trọng trong các lình vực khoa học , toán học nghiên cứu rất nhiều và rất đa dạng và phong phú , trong đó các bài toán về bất đẳng thức là những bài toán khó , để giải đ- ợc các bài toán về bất đẳng thức, bên cạnh việc nắm vững khái niệm và các tính chất cơ bản của bất đẳng thức, còn phải nắm đ- ợc các ph- ơng pháp chứng minh bất đẳng thức.

Có nhiều ph- ơng pháp để chứng minh bất đẳng và ta phải căn cứ vào đặc thù của mỗi bài toán mà sử dụng ph- ơng pháp cho phù hợp. Mỗi bài toán chứng minh bất đẳng thức có thể áp dụng đ- ợc nhiều ph- ơng pháp giải khác nhau , cũng có bài phải phối hợp nhiều ph- ơng pháp một cách hợp lí .

Bài toán chứng minh bất đẳng thức đ- ợc vận dụng nhiều vào các dạng bài toán giải và biện luận ph- ơng trình, bất ph- ơng trình, hệ ph- ơng trình đặc biệt , tìm giá trị lớn nhất , nhỏ nhất của biểu thức ...và đ- ợc sử dụng nhiều trong khi ôn tập , ôn thi ngoại khoá ...Vì vậy học sinh cần thiết phải nắm đ- ợc những kiến thức cơ bản về bất đẳng thức .

Trong thực tế giảng dạy ở tr- ờng THCS , học sinh gặp nhiều khó khăn khi giải các bài toán liên quan về bất đẳng thức , vì các bài toán chứng minh bất đẳng thức th- ờng không có cách giải mẫu , không theo một ph- ơng pháp nhất định nên học sinh không xác định đ- ợc h- ớng giải bài toán . Mặt khác vì nhận thức của học sinh THCS còn có nhiều hạn chế và khả năng t- duy ch- a tốt do đó học sinh còn lúng túng nhiều và không biết vận dụng kiến thức vào giải các dạng bài tập khác .

Trong nội dung của đề tài xin đ- ợc tập trung giới thiệu một số ph- ơng pháp hay đ- ợc sử dụng khi chứng minh bất đẳng thức nh- : dùng định nghĩa , biến đổi t- ơng đ- ơng , dùng các bất đẳng thức đã biết , ph- ơng pháp phản chứng ......và một số bài tập vận dụng , nhằm giúp học sinh bớt lúng túng khi gặp các bài toán về chứng minh hay vận dụng bất đẳng thức , giúp học sinh có thể tự định h- ớng đ- ợc ph- ơng pháp chứng minh và hứng thú hơn khi học về bất đẳng thức nói riêng và bộ môn Toán nói chung .

Qua đề tài ((**một số ph- ơng pháp chứng minh bất đẳng thức và ứng dụng của bất đẳng thức**)) tôi muốn giúp học học sinh có thêm một số ph- ơng pháp chứng minh bất đẳng thức đó là lý do tôi chọn đề tài này , khi nghiên cứu không tránh khỏi còn những hạn chế rất mong đ- ợc sự góp ý của các thày cô giáo để đề tài đ- ợc hoàn thiện hơn , tôi xin chân thành cảm ơn

B GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ

PHẦN I: ĐIỀU TRATHỰC TRẠNG TR□ỚC KHI NGHIÊN CỨU

Khigiảng dạy trên lớp gặp một số bài tập về bất đẳng thức tôi thấy học sinh còn rất nhiều lúng túng trong việc làm bài tập ,hay định h- ớng cách làm ,đặc biệt là học sinh học ở mức độ trung bình

Thực hiện việc kiểm tra một vài bài tập về nội dung đề tài thấy

Số l- ợng học sinh	Điểm giỏi	Điểm khá	Điểm trung bình	Điểm yếu	Điểm kém
30	0	5	6	13	6

Tr- ớc vấn đề trên tôi thấy việc cần thiết phải h- ớng dẫn học sinh một số ph- ơng pháp chứng minh bất đẳng thức và các ứng dụng của bất đẳng thức là một việc cần thiết cho học sinh , để giúp học sinh có thêm kiến thức về bất đẳng thức , taođiều kiện cho học sinh khi làm bài tập về bất đẳng thức

PHẦN II: CÁC PH□ƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Ph- ơng pháp điều tra

Ph- ơng pháp đối chứng

Ph- ơng pháp nghiên cứu tài liệu

PHẦN III: NỘI DUNG CỦA ĐỀ TÀI

I : CÁC KIẾN THỨC CẦN L□U Ý

1, Định nghĩa bất đẳng thức

+ a nhỏ hơn b , kí hiệu a < b

+ a lớn hơn b , kí hiệu a > b ,

+ a nhỏ hơn hoặc bằng b , kí hiệu a < b,

+ a lớn hơn hoặc bằng b , kí hiệu a > b ,

2, Một số tính chất cơ bản của bất dẳng thức :

a, Tính chất 1: a > b <=> b < a

b, Tính chất 2: a > b và b > c => a > c

c, Tính chất 3: a > b <=> a + c > b + c

Hệ quả : a > b <=> a - c > b - c

a + c > b <=> a > b - c

d, Tính chất 4 : a > c và b > d => a + c > b + d

a > b và c < d => a - c > b - d

e, Tính chất 5 : a > b và c > 0 => ac > bd

a > b và c < 0 => ac < bd

f, Tính chất 6 : a > b > 0 ; c > d > 0 => ac > bd

g, Tính chất 7 : a > b > 0 => $a^n > b^n$

a > b <=> $a^n > b^n$ với n lẻ .

h, Tính chất 8 : a > b ; ab > 0 =>

3, Một số bất đẳng thức thông dụng :

a, Bất đẳng thức Côsi :

Với 2 số d- ơng a , b ta có : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi : a = b

b, Bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

Với mọi số a ; b; x ; y ta có : $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

Dấu đẳng thức xảy ra <=> $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

c, Bất đẳng thức giá trị tuyệt đối :

$|a| + |b| \geq |a+b|$

Dấu đẳng thức xảy ra khi : ab $\geq$ 0

II : MỘT SỐ PH□ƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1.Ph- ơng pháp 1 : Dùng định nghĩa

- Kiến thức : Để chứng minh A > B , ta xét hiệu A - B rồi chứng minh A - B > 0 .

- L- u ý : $A^2 \geq 0$ với mọi A ; dấu " = " xảy ra khi A = 0 .

- Ví dụ :

Bài 1.1 :

Với mọi số : x, y, z chứng minh rằng : $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

Giải :

Ta xét hiệu : $H = x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2(x + y + z)$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2x - 2y - 2z$

$= (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1)$

$= (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$

Do $(x - 1)^2 \geq 0$ với mọi x

$(y - 1)^2 \geq 0$ với mọi y

$(z - 1)^2 \geq 0$ với mọi z

=> $H \geq 0$ với mọi x, y, z

Hay $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$ với mọi x, y, z .

Dấu bằng xảy ra <=> $x = y = z = 1$.

Bài 1.2 :

Cho a, b, c, d, e là các số thực :

Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

Giải :

Xét hiệu : $H = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b + c + d + e)$

$= (\frac{a}{2} - b)^2 + (\frac{a}{2} - c)^2 + (\frac{a}{2} - d)^2 + (\frac{a}{2} - e)^2$

Do $(\frac{a}{2} - b)^2 \geq 0$ với mọi a, b

Do$(\frac{a}{2} - c)^2 \geq 0$ với mọi a, c

Do $(\frac{a}{2} - d)^2 \geq 0$ với mọi a, d

Do $(\frac{a}{2} - e)^2 \geq 0$ với mọi a, e

=> $H \geq 0$ với mọi a, b, c, d, e

Dấu " = " xảy ra <=> $b = c = d = e = \frac{a}{2}$

Bài 1.3 : Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$$

Giải :

Xét hiệu : H = $\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$= \frac{2(a^2+b^2)-(a^2+2ab+b^2)}{4}$

$= \frac{1}{4}(2a^2+2b^2-a^2-b^2-2ab)=\frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$. Với mọi a, b .

Dấu " = " xảy ra khi a = b .

2. Ph- ơng pháp 2 ; Dùng phép biến đổi t- ơng đ- ơng .

- Kiến thức : Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh t- ơng đ- ơng với bất đẳng thức đúng hoặc bất đẳng thức đã đ- ợc chứng minh là đúng .

- Một số bất đẳng thức th- ờng dùng :

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

$(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC$

$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

$(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$

....

Ví dụ :

Bài 2. 1 : Cho a, b là hai số d- ơng có tổng bằng 1 . Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1} \geq \frac{4}{3}$$

Giải:

Dùng phép biến đổi t- ơng đ- ơng ;

$3(a + 1 + b + 1) \geq 4(a + 1)(b + 1)$

$\Leftrightarrow 9 \geq 4(ab + a + b + 1)$ (vì a + b = 1)

$\Leftrightarrow 9 \geq 4ab + 8$ $\Leftrightarrow 1 \geq 4ab$ $\Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$

Bất đẳng thức cuối đúng . Suy ra điều phải chứng minh .

Bài 2. 2: Cho a, b, c là các số d- ơng thoả mãn : a + b + c = 4

Chứng minh rằng : $(a + b)(b + c)(c + a) \geq a^3b^3c^3$

Giải:

Từ : $(a + b)^2 \geq 4ab$, $(a + b + c)^2 = [(a+b)+c]^2 \geq 4(a+b)c$

$\Rightarrow 16 \geq 4(a + b)c \Rightarrow 16(a + b) \geq 4(a + b)^2c \geq 16\,abc$

$\Rightarrow a + b \geq abc$

T- ơng tự : $b + c \geq abc$

$c + a \geq abc$

$\Rightarrow (a + b)(b + c)(c + a) \geq a^3b^3c^3$

Bài 2.3 : Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$; trong đó a > 0 ; b > 0

Giải :

Dùng phép biến đổi t- ơng đ- ơng : Với a > 0 ; b > 0 => a + b > 0

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right).(a^2-ab+b^2) \geq \left(\frac{a+b}{2}\right).\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 4ab + 4b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 6ab + 3b^2 \geq 3(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng ; suy ra : $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)$

Bài 2.4:

Cho 2 số a, b thoả mãn a + b = 1 . CMR $a^3 + b^3 + ab \geq \frac{1}{2}$

Giải :

Ta có : $a^3 + b^3 + ab \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^3 + b^3 + ab - \frac{1}{2} \geq 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) + ab - \frac{1}{2} \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - \frac{1}{2} \geq 0$. Vì a + b = 1

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2(1-a)^2 - 1 \geq 0$ (vì b = a -1)

$\Leftrightarrow 4a^2 - 4a + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow (2a - 1)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng . Vậy $a^3 + b^3 + ab \geq \frac{1}{2}$

Dấu " = " xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$

Bài 2.5 : Chứng minh bất đẳng thức : $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$

Trong đó : a > 0 , b > 0 .

Giải :

Với a > 0 , b > 0 => a + b > 0

Ta có : $\frac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$

<=> $\left(\frac{a+b}{2}\right).(a^2-ab+b^2) \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

<=> $a^2-ab+b^2 \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

<=> $4a^2 - 4ab + 4b^2 \ge a^2 + 2ab + b^2$

<=> $3(a^2 - 2ab + b^2) \ge 0$

<=> $3(a - b)^2 \ge 0$. Bất đẳng thức này đúng

=> $\frac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$

Dấu " = " xảy ra khi a = b .

Bài 2.6 : Với a > 0 , b > 0 . Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a}{\sqrt{b}} - \sqrt{a} \ \ge\ \sqrt{b} - \frac{b}{\sqrt{a}}$$

Giải :

Dùng phép biến đổi t- ơng đ- ơng :

$$\frac{a}{\sqrt{b}} - \sqrt{a} \ \ge\ \sqrt{b} - \frac{b}{\sqrt{a}}$$

$\Leftrightarrow$ $(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})-\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \ge 0$

$\Leftrightarrow$ $\left[(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3\right]-\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \ge 0$

$\Leftrightarrow$ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)-\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \ge 0$

$\Leftrightarrow$ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-2\sqrt{ab}+b) \ge 0$

$\Leftrightarrow$ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \ge 0$

Bất đẳng thức cuối đúng ; suy ra : $\frac{a}{\sqrt{b}} - \sqrt{a} \ \ge\ \sqrt{b} - \frac{b}{\sqrt{a}}$

3. Ph- ơng pháp 3: dùng bất đẳng thức quen thuộc .

- Kiến thức : Dùng các bất đẳng thức quen thuộc nh- : Côsi , Bunhiacôpxki , bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối để biến đổi và chứng minh , Một số hệ quả từ các bất đẳng thức trên : $x^2 + y^2 \geq 2xy$

Với a, b > 0 , $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

Các ví dụ :

Bài 3.1 : Giả sử a, b, c là các số d- ơng , chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$$

Giải

áp dụng BĐT Cauchy , ta có :

$$a + (b + c) \geq 2\sqrt{a(b+c)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$$

T- ơng tự ta thu đ- ợc :

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c} \quad , \quad \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$$

Dấu bằng của ba BĐT trên không thể đồng thời xảy ra , vì khi đó có : a = b + c , b = c + a , c = a + b nên a + b + c = 0 (trái với giả thiết a, b, c đều là số d- ơng).

Từ đó suy ra : $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$

Bài 3.2:

Cho x , y là 2 số thực thoả mãn :

$$x^2 + y^2 = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

Chứng minh rằng : $3x + 4y \leq 5$

Giải :

□p dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có :

$(x^2 + y^2)^2 = (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})^2 \quad (|x| \leq 1 \; ; \; |y| \leq 1)$

$\leq (x^2 + y^2)(1 - y^2 + 1 - x^2)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$

Ta lại có : $(3x + 4y)^2 \leq (3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) \leq 25$

$\Rightarrow 3x + 4y \leq 5$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x > 0, y > 0 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}$

Điều kiện : $\frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2}$

Bài 3. 3: Cho a, b, c $\ge$ 0 ; a + b + c = 1 . Chứng minh rằng :

a, $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \le \sqrt{6}$

b, $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1} < 3,5$

Giải

a, □p dụng bất dẳng thức Bunhiacôpxki với 2 bộ 3 số ta có :

$$\left(\sqrt{a+b}.1+\sqrt{b+c}.1+\sqrt{c+a}.1\right) \le (1+1+1)\left[\left(\sqrt{a+b}\right)^2+\left(\sqrt{b+c}\right)^2+\left(\sqrt{c+a}\right)^2\right]$$

=> $\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)^2 \le 3.(2a+2b+ac) = 6$

=> $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \le \sqrt{6}$.

Dấu " = " xảy ra khi : a = b = c = $\frac{1}{3}$

b, □p dụng bất đẳng thức Côsi , ta có :

$$\sqrt{a+1} \le \frac{(a+1)+1}{2} = \frac{a}{2}+1$$

T- ơng tự : $\sqrt{b+1} \le \frac{b}{2}+1$; $\sqrt{c+1} \le \frac{c}{2}+1$

Cộng từng vế của 3 bất đẳng thức trên ta đ- ợc :

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1} \le \frac{a+b+c}{2}+3 = 3,5$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi a = b = c =0 trái với giả thiết : a + b + c = 1

Vậy : $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1} < 3,5$

Bài 3.4 : Cho các số d- ơng a , b , c thoả mãn : a + b + c = 1 .

Chứng minh rằng : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 9$

Giải :

Ta có : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} > 0$, a , b > 0

Ta có : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = (\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}).1 = (\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}).(a + b + c)$

$$= 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$$

$$= 3+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}) \ge 3+2+2+2 = 9$$

=> $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 9$

Dấu "=" xảy ra khi : a = b = c = $\frac{1}{3}$

Bài 3.5

Cho x , y > 0 . Chứng minh rằng : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$

Giải

□p dụng bất đẳng thức Côsi ta có : $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}$$

$$=> (x + y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}) \geq 4$$

$$=> \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

4. Ph- ơng pháp 4 ; Dùng các tính chất của bất đẳng thức :

- Kiến thức : Dùng các tính chất đã đ- ợc học để vận dụng vào giải các bài tập .

Các ví dụ :

Bài 4.1 : Cho 2 số x , y thoả mãn điều kiện : x + y = 2 .

Chứng minh rằng : $x^4 + y^4 \geq 2$

Giải

Theo tính chất bắc cầu ta có : $(x^2 - y^2) \geq 0 \Leftrightarrow x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$

$\Leftrightarrow 2(x^4 + y^4) \geq (x^2 + y^2)^2$ (1)

Ta có : $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$

$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$

$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) \geq 4$ Vì : x + y = 2

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $x^4 + y^4 \geq 2$

Dấu " = " xảy ra khi x = y = 1 .

Bài 4.2:

Cho 0 < a, b, c, d < 1 . Chứng minh rằng :

(1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) > 1 - a - b - c - d .

Giải :

Ta có : (1 - a)(1 - b) = 1 - a - b + ab

Do a, b > 0 nên ab > 0 => (1 - a)(1 - b) > 1 - a - b .

Do c < 1 nên 1 - c > 0 => (1 - a)(1 - b)(1 - c) > (1 - a - b)(1 - c)

$\Leftrightarrow$ (1 - a)(1 - b)(1 - c) > 1 - a - b - c + ac + bc .

Do a, b, c, d > 0 nên 1 - d > 0 ; ac + bc > 0 ; ad + bd + cd > 0

=>(1 - a)(1 - b)(1 - c) > 1 - a - b - c

=> (1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) > (1 - a - b - c)(1 - d)

=> (1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) > 1 - a - b - c - d + ad + bd + cd

=> (1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) > 1 - a - b - c - d .

Bài 4.3 : Cho 0 < a, b, c < 1 . Chứng minh rằng :

$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 < 3 + a^2b + b^2c + c^2a$

Giải :

Do a, b < 1 => $a^3 < a^2 < a < 1$; $b^3 < b^2 < b < 1$; ta có :

$(1 - a^2)(1 - b) > 0$ => $1 + a^2b > a^2 + b$

=> $1 + a^2b > a^3 + b^3$ hay $a^3 + b^3 < 1 + a^2b$.

T- ơng tự : $b^3 + c^3 < 1 + b^2c$; $c^3 + a^3 < 1 + c^2a$.

=> $2a^3 + 2b^3 + 2c^3 < 3 + a^2b + b^2c + c^2a$

5.ph- ơng pháp 5 : Dùng bất đẳng thức tổng quát chứa luỹ thừa các số tự nhiên

Bài 5.1: Cho a>b>0 CMR:

$$\frac{a^{1996}-b^{1996}}{a^{1996}+b^{1996}} > \frac{a^{1995}-b^{1995}}{a^{1995}+b^{1995}}$$

Giải :

Để chứng minh bất đẳng thức trên , ta chứng minh bất đẳng thức trung gian sau nếu a>b>0 và m,n là hai số tự nhiên mà m>n thì $\frac{a^m-b^m}{a^m+b^m} > \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ (1)

Thật vậy ta dùng phép biến đổi t- ơng đ- ơng để chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a^m+b^m-2b^m}{a^m+b^m} > \frac{a^n+b^n-2b^n}{a^n+b^n}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{2b^m}{a^m+b^m} > 1-\frac{2b^n}{a^n+b^n} \Leftrightarrow -\frac{2b^m}{a^m+b^m} > -\frac{2b^n}{a^n+b^n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^m}{a^m+b^m} < \frac{b^n}{a^n+b^n} \Leftrightarrow \frac{\frac{b^m}{b^m}}{\frac{a^m}{b^m}+\frac{b^m}{b^m}} < \frac{\frac{b^n}{b^n}}{\frac{a^n}{b^n}+\frac{b^n}{b^n}} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}+1} < \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}+1} \Leftrightarrow \frac{a^m}{b^m}+1 > \frac{a^n}{b^n}+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^m}{b^m} > \frac{a^n}{b^n} \Leftrightarrow (\frac{a}{b})^m > (\frac{a}{b})^n \quad (2)$$

Bất đẳng thức (2) luôn đúng vì a>b>0 nên $\frac{a}{b}>1$ và m>n vậy bất đẳng thức (1) luôn đúng

□p dụng bất đẳng thức trung gian $\frac{a^m-b^m}{a^m+b^m}>\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ với a>b>0 và m>n nên khi m=1996, n=1995 thì bất đẳng thức phảI chứng minh luôn đúng $\frac{a^{1996}-b^{1996}}{a^{1996}+b^{1996}}>\frac{a^{1995}-b^{1995}}{a^{1995}+b^{1995}}$

6. ph- ơng pháp 6: Dùng bất đẳng thức về 3 cạnh của tam giác

a , b, c, là độ dài ba cạnh của tam giác $\Leftrightarrow$ a<b+c (1)

b < a+c (2)

c< a+b (3)

Từ 3 bất đẳng thức về tổng ba cạnh của tam giác ta suy ra đ- ợc 3 bất đẳng thức về hiệu hai cạnh

a<b+c (1) $\Rightarrow |a-b|<c$ (4)

b < a+c (2) $\Rightarrow |b-c|<a$ (5)

c< a+b (3) $\Rightarrow |c-a|<b$ (6)

Bài 6.1:

Cho tam giác ABC có chu vi 2p = a + b + c (a, b , c là độ dài các cạnh của tam giác) . Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Giải:

Ta có : p - a = $\frac{b+c-a}{2}>0$

T- ơng tự : p - b > 0 ; p - c > 0 ;

áp dụng kết quả bài tập (**3.5**) , ta đ- ợc ; $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\ge\frac{4}{(p-a)+(p-b)}=\frac{4}{c}$

T- ơng tự : $\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge\frac{4}{a}$

$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-c}\ge\frac{4}{b}$

=> $2\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-c}\right)\ge 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

=> điều phải chứng minh .

Dấu " = " xảy ra khi : p - a = p - b = p - c $\Leftrightarrow$ a = b = c .

Khi đó tam giác ABC là tam giác đều .

Bài 6.2:

Cho a, b, c , là độ dài ba cạnh của một tam giác CMR:

(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) $\leq$abc

Giải:

Bất đẳng thức về ba cạnh của tam giác cho ta viết

$$|b-c|<a \Rightarrow 0<a^2-(b-c)^2 \leq a^2$$

$$|c-a|<b \Rightarrow 0<b^2-(c-a)^2 \leq b^2$$

$$|a-b|<c \Rightarrow 0<c^2-(a-b)^2 \leq c^2$$

Từ đó $\left|a^2-(b-c)^2\right|\left|b^2-(c-a)^2\right|\left|c^2-(a-b)^2\right| \leq a^2b^2c^2$

$\Leftrightarrow$ (a+b-c)(a-b+c)(b-c+a)(b+c-a)(c-a+b)(c+a-b) $\leq a^2b^2c^2$

$\Leftrightarrow$ $(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 \leq a^2b^2c^2$

$\Leftrightarrow$ (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$\leq$abc

Vì a, b, c, là ba cạnh của một tam giác nên

a+b-c>0

b+c-a>0

c+a-b>0 và abc>0

Vậy bất đẳng thức dã đ- ợc chứng minh

7. Ph- ơng pháp 7 : Chứng minh phản chứng .

- Kiến thức : Giả sử phải chứng minh bất đẳng thức nào đó đúng , ta hãy giả sử bất dẳng thức đó sai , sau đó vận dụng các kiến thức đã biết và giả thiết của đề bài để suy ra điều vô lý .

Điều vô lý có thể là trái với giả thiết , hoặc là những điều trái nh- ợc nhau , từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh là đúng .

Một số hình thức chứng minh bất đẳng thức :

+ Dùng mệnh đề đảo

+ Phủ định rồi suy ra điều trái với giả thiết .

+ Phủ định rồi suy ra trái với đIều đúng .

+ Phủ định rồi suy ra hai đIều tràI ng- ợc nhau .

+ Phủ định rồi suy ra kết luận .

Các ví dụ :

Bài 7. 1 :

Cho 0 < a,b,c,d <1 . Chứng minh rằng ; ít nhất có một bất đẳng thức sau là sai :

2a(1 - b) > 1

3b(1 - c) > 2

8c(1 - d) > 1

32d(1 - a) > 3

Giải:

Giả sử ng- ợc lại cả bốn đẳng thức đều đúng . Nhân từng về ;

ta có : 2.3.8.32a(1 - b)b(1 - c)c(1 - d)d(1 - a) > 2 .3

=> $\left[a(1-a)\right]\left[b(1-b)\right]\left[c(1-c)\right]\left[d(1-d)\right] > \dfrac{1}{256}$ (1)

Mặt khác , áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$\sqrt{a(1-a)} \le \dfrac{a+1-a}{2} = \dfrac{1}{2}$ => a(1 - a) $\le \dfrac{1}{4}$

T- ơng tự : b(1 - b) $\le \dfrac{1}{4}$

c(1 - c) $\le \dfrac{1}{4}$

d(1 - d) $\le \dfrac{1}{4}$

Nhân từng vế các bất đẳng thức ; ta có :

$\left[a(1-a)\right]\left[b(1-b)\right]\left[c(1-c)\right]\left[d(1-d)\right] > \dfrac{1}{256}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra vô lý .

Điều vô lý đó chứng tỏ ít nhất một trong 4 bất đẳng thức cho trong đầu bài là sai .

Bài 7.2 :

(Phủ định rồi suy ra hai điều trái ng- ợc nhau)

Chứng minh rằng không có 3 số d- ơng a, b, c nào thoả mãn cả ba bất đẳng thức sau : $a+\dfrac{1}{b}<2$; $b+\dfrac{1}{c}<2$; $c+\dfrac{1}{a}<2$

Giải

Giả sử tồn tại 3 số d- ơng a, b, c thoả mãn cả 3 bất đẳng thức :

$a+\dfrac{1}{b}<2$; $b+\dfrac{1}{c}<2$; $c+\dfrac{1}{a}<2$

Cộng theo từng vế của 3 bất đẳng thức trên ta đ- ợc :

$$a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}<6$$

$$\Leftrightarrow\ (a+\frac{1}{a})+(b+\frac{1}{b})+(c+\frac{1}{c})<6 \quad (1)$$

Vì a, b, c > 0 nên ta có : $(a+\frac{1}{a})\geq 2$; $(b+\frac{1}{b})\geq 2$; $(c+\frac{1}{c})\geq 2$

=> $(a+\frac{1}{a})+(b+\frac{1}{b})+(c+\frac{1}{c})\geq 6$ Điều này mâu thuẫn với (1)

Vậy không tồn tại 3 số d- ơng a, b, c thoả mãn cả 3 bất đẳng thức nói trên . => đpcm

Bài 7.3 :

Chứng minh rằng không có các số d- ơng a, b, c thoả mãn cả 3 bất đẳng thức sau :

$4a(1 - b) > 1$; $4b(1 - c) > 1$; $4c(1 - a) > 1$.

H- ớng dẫn : t- ơng tự nh- bài 2 :

Bài 7.4 :

(Phủ định rồi suy ra trái với điều đúng)

Cho $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh rằng : $a + b \leq 2$.

Giải :

Giả sử : $a + b > 2 \Rightarrow (a + b)^3 > 8$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) > 8$

$\Rightarrow 2 + 3ab(a + b) > 8$ (Vì : $a^3 + b^3 = 2$)

$\Rightarrow ab(a + b) > 2$

$\Rightarrow ab(a + b) > a^3 + b^3$ (Vì : $a^3 + b^3 = 2$)

Chia cả hai vế cho số d- ơng a, b ta đ- ợc :

$ab > a^2 - ab + b^2 \Rightarrow 0 > (a - b)^2$ Vô lý

Vậy : $a + b \leq 2$

8. Ph- ơng pháp 8 : Đổi biến số

- Kiến thức : Thực hiện ph- ơng pháp đổi biến số nhằm đ- a bài toán đã cho về dạng đơn giản hơn , gọn hơn , dạng những bài toán đã biết cách giải ...

Các ví dụ :

Bài 8. 1 :

Chứng minh rằng : Nếu a , b , c > 0 thì :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{b+a}\geq\frac{3}{2}$$

Giải:

Đặt : b +c = x , c + a = y , a + b = z

=> a + b + c = $\frac{x+y+z}{2}$

=> a = $\frac{y+z-x}{2}$, b = $\frac{z+x-y}{2}$, c = $\frac{x+y-z}{2}$

Khi đó :

$$VT = \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{b+a} = \frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})+\frac{1}{2}(\frac{z}{x}+\frac{x}{z})+\frac{1}{2}(\frac{z}{y}+\frac{y}{z})-\frac{3}{2}\geq 1+1+1-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

Bài 8.2 :

Chứng minh rằng ; với mọi số thực x, y ta có bất đẳng thức :

$$-\frac{1}{4}\leq\frac{(x^2-y^2)(1x^2y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}\leq\frac{1}{4}$$

Giải:

Đặt : a = $\frac{x^2-y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}$ và b = $\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}$

=> ab = $\frac{(x^2-y^2)(1-x^2y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}$

Ta có dễ thấy với mọi a, b thì : $-\frac{1}{4}(a-b)^2\leq ab\leq\frac{1}{4}(a+b)^2$

Mà : $(a - b)^2 = \left[1-\frac{2}{x^2+1}\right]^2$

$(a + b)^2 = \left[1-\frac{2}{y^2+1}\right]^2$

Suy ra : $-\frac{1}{4} \leq ab \leq \frac{1}{4}$.

Bài 8.3 :

Cho a, b, c > 0 ; a + b + c $\leq$ 1 . Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\geq 9$$

Giải :

Đặt : $a^2 + 2bc = x$; $b^2 + 2ca = y$; $c^2 + 2ab = z$

Khi đó : $x + y + z = a^2 + 2bc + b^2 + 2ca + c^2 + 2ab$

$= (a + b + c)^2 \le 1$

Bài toán trở thành : Cho x, y, z > 0 , $x + y + z \le 1$.

Cứng minh rằng :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge 9$$

Ta chứng minh đ- ợc : $(x + y + z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) \ge 9$

Theo bất đẳng thức Côsi

Mà : $x + y + z \le 1$ nên suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge 9$.

9.Ph- ơng pháp 9: Dùng phép quy nạp toán học .

- Kiến thức : Để chứng minh một bất đẳng thức đúng với n > 1 bằng ph- ơng pháp quy nạp toán học , ta tiến hành :

+ Kiểm tra bất đẳng thức đúng với n = 1 ($n = n_0$)

+ Giả sử bất đẳng thức đúng với n = k > 1 ($k > n_0$)

+ Chứng minh bất đẳng thức đúng với n = k + 1

+ Kết luận bất đẳng thức đúng với n > 1 ($n > n_0$)

- Ví dụ :

Bài 9.1 :

Chứng minh rằng với mọi số nguyên d- ơng $n \ge 3$ thì

$2^n > 2n + 1$ (*)

Giải :

+ Với n = 3 , ta có : $2^n = 2^3 = 8$; 2n + 1 = 2.3 + 1 = 7 ; 8 > 7 . Vậy đẳng thức (*) đúng với n = 3 .

+ Giả sử (*) đúng với n = k ($k \in N$; $k \ge 3$) , tức là : $2^k > 2k + 1$

ta phải chứng minh : $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$

hay : $2^{k+1} > 2k + 3$ (**)

+ Thật vậy : $2^{k+1} = 2.2^k$, mà $2^k > 2k + 1$ (theo giả thiết quy nạp)

do đó : $2^{k+1} > 2(2k + 1) = (2k + 3) +(2k - 1) > 2k + 3$ (Vì : 2k - 1 > 0)

Vậy (**) đúng với mọi $k \ge 3$.

+ Kết luận : $2^n > 2n + 1$ với mọi số nguyên d- ơng $n \ge 3$.

Bài 9.2 :.

Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\ \frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$ (*) (n là số nguyên d- ơng)

Giải :

+ Với n = 1 , ta có : VT = VP = $\frac{1}{2}$. Vậy (*) đúng với n = 1 .

+ Giả sử (*) đúng với n = k $\ge$ 1 ta có : $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\ \frac{2k-1}{2k}\le\frac{1}{\sqrt{3k+1}}$

Ta cần chứng minh (*) đúng với n = k + 1 , tức là :

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\ \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)}\le\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)}$$

do đó chỉ cần chứng minh : $\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\ \frac{2k+1}{2(k+1)}\ \le\ \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$

dùng phép biến đổi t- ơng đ- ơng , ta có :

$(2k + 1)^2(3k + 4) \le (3k + 1)4(k +1)^2$

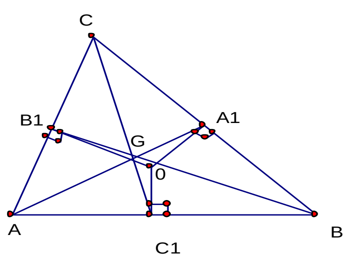
$\Leftrightarrow$ $12k^3 + 28k^2 + 19k + 4 \le 12k^3 + 28k^2 + 20k +4$

$\Leftrightarrow$ k $\ge$ 0 . => (**) đúng với mọi k $\ge$ 1 .

Vậy (*) dúng với mọi số nguyên d- ơng n .

10. Ph- ơng pháp 10 : Chứng minh bất đẳng thức trong hình học phẳng

Bài 10.1 :CMR trong một tam giác nhọn thì tổng các trung tuyến của nó lớn hơn 4lần bán kính đ- ờng tròn ngoại tiếp



Giải:

Gọi ma, mb, mc là độ dài ba đ- ờng trung tuyến và R là bán kính đ- ờng tròn ngoại tiếp ΔABC, ta phải chứng minh ma+ mb+mc>4R

Vì Δ ABC là một tam giác nhọn nên tâm đ- ờng tròn ngoại tiếp tam giác nằm trong tam giác ABCnếu G là trọng tâm tam giác ABC thì tâm 0 nằm ở một trong ba tam giác tam giác GAB, tam giác GAC ,tam giác GBC . Giả sử tâm 0 nằm trong tam giác GAB thì 0A +0B=2R và GA+ GB > 2R mà GA=$\frac{2}{3}AA_1$=$\frac{2}{3}$ma ,GB=$\frac{2}{3}BB_1$ =$\frac{2}{3}$mb

Nên GA+GB > 2R $\Rightarrow \frac{2}{3}$(ma+mb) >2R $\Rightarrow$ma+mb >3R

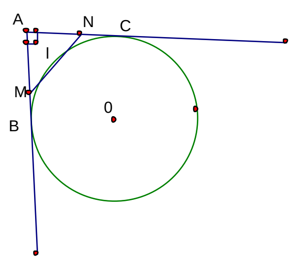
Mà trong tam giác $0CC_1$ có CC_1 >0C $\Rightarrow$mc >R

Do đó ma+ mb+ mc > 3R+R=4R .

Vậy ma+mb+ mc >4R

Bài 10. 2: Một đ- ờng tròn tiếp xúc với hai cạnh của một tam giác vuông đỉnh A tại hai điểm B và C , kẻ một tiếp tuyến với đ- ờng tròn cắt các cạnh AB và AC tại M và N , chứng minh rằng $\frac{AB+AC}{3} <$ MB+NC< $\frac{AB+AC}{2}$

Giải



Gọi I là tiếp điểm của tiếp tuyến MN với đ- ờng tròn tâm 0 tính chất tiếp tuyên cho ta

MB=MI ,NC=NI

Từ đó MN=MB+NC nh- ng tam giác vuông AMN thì MN< AM+AN

Nên 2MN < AM+AN +BM+ CN =AB +AC

$\Rightarrow$MN< $\frac{AB+AC}{2}$

Ngoài ra trong tam giác vuông AMN ta cũng có cạnh huyền MN>AM và MN> AN $\Rightarrow$2MN > AM+AN

Vì MN=BC+CN

Nên 3MN > AM+AN +BM+CN do đó 3MN > AB+AC $\Rightarrow$MN > $\frac{AB+AC}{3}$

Vậy $\frac{AB+AC}{3} <$ MB+NC< $\frac{AB+AC}{2}$

11 . Ngoài ra còn có một số ph- ơng pháp khác để chứng minh bất đẳng thức nh- : Ph- ơng pháp làm trội , tam thức bậc hai ... ta phải căn cứ vào đặc thù của mỗi bài toán mà sử dụng ph- ơng pháp cho phù hợp . Trong phạm vi nhỏ của đề tài này không hệ thống ra những ph- ơng pháp đó .

III : ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

1- Dùng bất đẳng thức để tìm cực trị .

- Kiến thức : Nếu f(x) $\geq$ m thì f(x) có giá trị nhỏ nhất là m .

Nếu f(x) $\leq$ M thì f(x) có giá trị lớn nhất là M .

Ta th- ờng hay áp dụng các bất đẳng thức thông dụng nh- : Côsi , Bunhiacôpxki , bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối .

Kiểm tra tr- ờng hợp xảy ra dấu đẳng thức để tìm cực trị .

Tìm cực trị của một biểu thức có dạng là đa thức , ta hay sử dụng ph- ơng pháp biến đổi t- ơng đ- ơng , đổi biến số , một số bất đẳng thức ...

Tìm cực trị của một biểu thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối , ta vận dụng các bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

Chú ý : $|A|+|B|\geq|A+B|$

Xảy ra dấu " = " khi AB $\geq$ 0

$|A|\geq 0$ Dấu "= " xảy ra khi A = 0

Bài 1 : Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $B = a^3 + b^3 + ab$; Cho biết a và b thoả mãn : a + b = 1 .

Giải

$B = (a + b)(a^2 - ab + b^2) + ab$

$= a^2 - ab + b^2 + ab = a^2 + b^2$

Ta có : $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

Vậy min B = $\frac{1}{2}$ khi a = b = $\frac{1}{2}$

Bài 2: a, Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$A = (x^2 + x)(x^2 + x - 4)$

b, Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$B = - x^2 - y^2 + xy + 2x +2y$

Giải

a, $A = (x^2 + x)(x^2 + x - 4)$. Đặt : $t = x^2 + x - 2$

$\Rightarrow A = (t - 2)(t + 2) = t^2 - 4 \geq - 4$

Dấu bằng xảy ra khi : t = 0 $\Leftrightarrow$ $x^2 + x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 ; x = 1$.

=> min A = - 4 khi x = -2 ; x = 1 ;

b, T- ơng tự

Bài 3 : Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

a, C = $|2x-3|+|2x-1|$

b, D = $|x^2+x+3|+|x^2+x-6|$

c, E = $|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$

Giải :

a, □p dụng BĐT : $|A|+|B|\ge|A+B|$

Dấu " = "xảy ra khi AB ≥ 0 .

=> C = $|2x-3|+|1-2x|\ge|2x-3+1-2x|=|-2|=2$

Dấu " = " xảy ra khi (2x - 3)(1 - 2x) ≥ 0 ⇔ $\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$

Vậy minC = 2 khi $\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$

b, T- ơng tự : minD = 9 khi : -3 $\le$ x $\le$ 2

c, minE = 4 khi : 2 $\le$ x $\le$ 3

Bài 4 : Cho a < b < c < d , tìm :

Minf(x) = $|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$

H- ớng dẫn : t- ơng tự : minf(x) = d + c - b - a khi b $\le$ x $\le$ c

Bài 5 : Cho ba số d- ơng x , y , z thoả mãn : $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\ge 2$

Tìm giá trị lớn nhất của tích : P = xyz

Giải :

$$\frac{1}{1+x}\ge(1-\frac{1}{1+y})+(1-\frac{1}{1+z})=\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\ge 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}$$

T- ơng tự : $\frac{1}{1+y}\ge 2\sqrt{\frac{zx}{(1+x)(1+z)}}$

$$\frac{1}{1+z}\ge 2\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}}$$

Từ đó suy ra : P = xyz $\le\frac{1}{8}$

MaxP = $\frac{1}{8}$ khi x = y = z = $\frac{1}{2}$

Bài 6 : Cho 3 số d- ơng a, b, c thảo mãn : a + b + c = 1 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : F = $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2+(c+\frac{1}{c})^2$

Giải:

Ta có : F = $(a^2 + b^2 + c^2) + (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}) + 6$

Vận dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki , ta có :

$(a.1 + b.1 + c.2)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{1}{3}$

T- ơng tự : $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2 \le 3(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2})$

Mặt khác : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}).1 = (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})(a + b + c)$

$= 3 + (\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) + (\frac{b}{c} + \frac{c}{b}) + (\frac{c}{a} + \frac{a}{c}) \ge 3 + 2 + 2 + 2 = 9$

$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge 9$

$\Rightarrow (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2 \ge 81$

$\Rightarrow (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}) \ge 27$

$F \ge \frac{1}{3} + 27 + 6 = 33$

Dấu " = " xảy ra khi : $a = b = c = \frac{1}{3}$

Vậy MinF = $33\frac{1}{3}$ khi : $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 7 : Cho G = $\frac{yz\sqrt{x-1} + zx\sqrt{y-2} + xy\sqrt{z-3}}{xyz}$

Tìm giá trị lớn nhất của G :

Giải : Tập xác định : $x \ge 1$; $y \ge 2$; $z \ge 3$

Ta có : G = $\frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-2}}{y} + \frac{\sqrt{z-3}}{z}$

Theo BĐT Côsi ta có : $\sqrt{x-1} \le \frac{x-1+1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{x} \le \frac{1}{2}$

T- ơng tự : $\frac{\sqrt{y-2}}{y} \le \frac{1}{2\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{z-3}}{z} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$\Rightarrow G \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Vậy MaxG = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$ đạt đ- ợc khi x = 2 ; y = 2 ; z = 6

Bài 8 a, Tìm giá trị nhỏ nhất của H = $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ với x > 1 .

b. Tìm giá trị lớn nhất của K = $|x|.\sqrt{1-x^2}$

HD : áp dụng bất đẳng thức Côsi và làm t- ơng tự nh- bài 5 :

2 - Dùng bất đẳng thức để giải ph- ơng trình .

- Kiến thức : Nhờ vào các tính chất của bất đẳng thức , các ph- ơng pháp chứng minh bất đẳng thức , ta biến đổi hai vế (VT , VP) của ph- ơng trình sau đó suy luận để chỉ ra nghiệm của ph- ơng trình .

Nếu VT = VP tại một hoặc một số giá trị nào đó của ẩn (thoả mãn TXĐ)

=> ph- ơng trình có nghiệm .

Nếu VT > VP hoặc VT < VP tại mọi giá trị của ẩn .

=> ph- ơng trình vô nghiệm .

- Các ví dụ :

Bài 1 : Giải ph- ơng trình :

$13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x$

Giải:

Điều kiện : x $\geq$ 1 (*)

Cách 1 : áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có : $13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1}$

$$= 13.2.\frac{1}{2}\sqrt{x-1} + 3.2.\frac{3}{2}\sqrt{x+1}$$

$$\leq 13(x - 1 + \frac{1}{4}) + 3(x + 1 + \frac{9}{4}) = 16x$$

Dấu " = " xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-1} = \dfrac{1}{2}\\ \sqrt{x+1} = \dfrac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \text{ thoả mãn (*)}$$

Ph- ơng trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ dấu " = " ở (2) xảy ra

Vậy (1) có nghiệm x = $\dfrac{5}{4}$.

Bài 2: a, Tìm giá trị lớn nhất của L = $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x}$

b. Giải ph- ơng trình : $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} - x^2 + 4x - 6 = 0$ (*)

Giải :

a. Tóm tắt : $(\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x})^2 \le 2(2x - 3 + 5 - 2x) = 4$

⇔ $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} \le 2$

=> MaxL = 2 khi x = 2 .

b. TXĐ : $\frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2}$

(*) ⇔ $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = x^2 - 4x + 6$

VP = $(x - 2)^2 + 2 \ge 2$, dấu " = " xảy ra khi x = 2 .

=> với x = 2 (thoả mãn TXĐ) thì VT = VP = 2 .

=> ph- ơng trình (*) có nghiệm x = 2 .

Bài 3 : Giải ph- ơng trình :

$$\sqrt{6-x} + \sqrt{x+2} = x^2 - 6x + 13$$

Giải : TXĐ : $-2 \le x \le 6$.

VP = $(x - 3)^2 + 4 \ge 4$. Dấu " = " xảy ra khi x = 3 .

$VT^2 = (\sqrt{6-x}.1 + \sqrt{x+2}.1)^2 \le (6 - x + x + 2)(1 + 1) = 16$

=> VT $\le$ 4 , dấu " = " xảy ra khi $\sqrt{6-x} = \sqrt{x+2}$ ⇔ x = 2 .

=> không có giá trị nào của x để VT = VP => Ph- ơng trình vô nghiệm

Bài 4 : Giải ph- ơng trình :

$$\sqrt{3x^2-12x+16} + \sqrt{y^2-4y+13} = 5$$

HD : $\sqrt{3x^2-12x+16} \ge 2$; $\sqrt{y^2-4y+13} \ge 3$ => VT $\ge$ 5 .

Dấu " = " xảy ra khi : $\begin{cases} x-2=0 \\ y-2=0 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

=> ph- ơng trình có nghiệm : x = 2 ; y = 2 .

3 - Dùng bất đẳng thức để giải hệ ph- ơng trình :

- Kiến thức : Dùng bất đẳng thức để biến đổi từng ph- ơng trình của hệ , suy luận và kết luận nghiệm .

L- u ý : Một số tính chất : a, $a^2 + b^2 \ge 2ab$

b. a + c < ; c > 0 => a < b

c. $\frac{a}{b} > 1$ nếu a > b > 0 .

- Các ví dụ :

Bài 1 : Giải hệ ph- ơng trình :

$$\begin{cases} x^3 + 2y^2 - 4y + 3 = 0 \\ x^2 + x^2y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

(1) ⇔ $x^3 = -1 - 2(y-1)^2$ ⇔ $x^3 \le -1$ ⇔ $x \le -1$. (*)

(2) ⇔ $x^2 \le \dfrac{2y}{1+y^2} \le 1$ (vì $1 + y^2 \ge 2y$) ⇔ $-1 \le x \le 1$ (**)

Từ (*) và (**) => x = -1 . Thay x = -1 vào (2) ta có : y = 1 .

=> Hệ ph- ơng trình có nghiệm duy nhất : x = -1 ; y = 1 .

- Kiến thức : Biến đổi một ph- ơng trình của hệ , sau đó so sánh với ph- ơng trình còn lại , l- u ý dùng các bất đẳng thức quen thuộc .

Bài 2 : Giải hệ ph- ơng trình :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^4 + y^4 + z^4 = xyz \end{cases}$$

Giải :

□p dụng : BĐT : $A^2 + B^2 \ge 2AB$ dấu " = " xảy ra khi A = B

Ta có : $x^4 + y^4 \ge 2x^2y^2$; $y^4 + z^4 \ge 2y^2z^2$; $z^4 + x^4 \ge 2z^2x^2$.

=> $x^4 + y^4 + z^4 \ge x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ (*)

Mắt khác : $x^2y^2 + y^2z^2 \ge 2x^2yz$

$y^2z^2 + z^2x^2 \ge 2xy^2z$

$x^2y^2 + z^2x^2 \ge 2xyz^2$

=> $2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \ge 2xyz(x + y + z) = 2xyz$.

=> $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \ge xyz$. (**)

Từ (*) và (**) => $x^4 + y^4 + z^4 \ge xyz$

Dấu " = " xảy ra khi : x = y = z mà x + y + z = 1 nên : $x = y = z = \dfrac{1}{3}$

Vậy hệ ph- ơng trình có nghiệm : $x = y = z = \dfrac{1}{3}$

Cách 2: áp dụng BĐT Côsi ;

- Kiến thức : Dùng ph- ơng pháp thế

Bài 3 : Giải hệ ph- ơng trình

$$\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 14 \\ \left(\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3y} + \dfrac{1}{6z}\right)\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6}\right) = 1 \end{cases} \quad \text{(với x, y, z > 0)}$$

Giải :

áp dụng : Nếu a, b > 0 thì : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

(2) ⇔ $(\frac{3}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z})(3x+2y+z)=36$

⇔ $6\,(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+3(\frac{x}{z}+\frac{z}{x})+2(\frac{y}{z}+\frac{z}{y})=22$

Mặt khác : vì x, y, z > nên $6\,(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})\geq 12$

$3(\frac{x}{z}+\frac{z}{x})\geq 6$; $2(\frac{z}{y}+\frac{y}{z})\geq 4$

$(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+3(\frac{x}{z}+\frac{z}{x})+2(\frac{y}{z}+\frac{z}{y})\geq 22$

Dấu " = " xảy ra khi x = y = z , thay vào (1) ta đ- ợc :

$x + x^2 + x^3 = 14$ <=> $(x - 2)(x^2 + 3x + 7) = 0$

<=> x - 2 = 0 <=> x = 2 .

Vậy hệ ph- ơng trình có nghiệm duy nhất : x = y = z = 2 .

4. Dùng bất đẳng thức để giải ph- ơng trình nghiệm nguyên

Ngoài ra còn có một số những ứng dụng khác của bất đẳng thức , đòi hỏi học sinh phải linh hoạt và sáng tạo trong khi giải , học sinh phải nắm chắc đ- ợc các kiến thức về bất đẳng thức thì mới vận dụng đ- ợc .

Ví dụ : Dùng bất đẳng thức để giải ph- ơng trình nghiệm nguyên .

Bài 1 : Tìm nghiệm nguyên d- ơng của ph- ơng trình :

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$

Giải :

Không mất tính tổng quát , ta giả sử $x \geq y \geq z$, ta có :

$2 = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq \frac{3}{z}$ => $2z \leq 3$, mà z nguyên d- ơng

Vậy z = 1 . Thay z = 1 vào ph- ơng trình ta đ- ợc :

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

Theo giả sử , $x \geq y$, nên $1 = \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{2}{y}$

Y nguyên d- ơng nên y = 1 hoặc y = 2 .

Với y = 1 không thích hợp

Với y = 2 ta có : x = 2 .

Vậy (2 ; 2 ; 1) là một nghiệm của ph- ơng trình .

Hoán vị các số trên , ta đ- ợc nghiệm của ph- ơng trình là :

(2 ; 2 ; 1) ; (2 ; 1 ; 2) ; (1 ; 2 ; 2)

IV:BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Cho hai số x và y mà x+y=1 CMR :

a) $x^2 + y^2 \ge \frac{1}{2}$

b) $x^4 + y^4 \ge \frac{1}{8}$

Bài 2: Cho a,b, c, d ,e là các số thực CMR

$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=a(b+c+d+e)$

Bài 3: Cho hai số d- ơng x,y và $x^3+y^3=x-y$ CMR: $x^2+y^2<1$

Bài 4: Cho hai số d- ơng x,y CMR : $\frac{x^3+y^3}{2} \ge (\frac{x+y}{2})^3$

Bài 5: Cho $ab \ge 1$ CMR: $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2} \ge \frac{2}{1+ab}$

Bài 6 : Cho 3 số x,y,z không âm sao cho x+y+z=a

CMR: $(a-x)(a-y)(a-z) \ge 8xyz$

Bài 7: Cho $a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0$

CMR: $a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c)$

Bài 8: Cho $x^2+4y^2=1$ CMR: $|x-y| \le \frac{\sqrt{5}}{2}$

Bài 9: CMR: Nếu $|a|<1; |b|<1$ thì $|a+b|<|1+ab|$

Bài 10: CMRvới mọi số nguyên d- ơng $n \ge 3$thì $2^n > 2n+1$

Bài 11: Cho a,b,c là độ dài các cạnh của một tam giác .

CMR: $\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|<\frac{1}{8}$

V : KẾT QUẢ ĐẠT Đ□ỢC

Qua việc áp dụng kinh nghiệm trên vào giảng dạy cho học sinh tôi thấy học sinh đã xác định đ- ợc loại toán và cách làm ,nhiều em học sinh đã làm đ- ợc các bài tập về bất đẳng thức và đã có h- ớng thú hơn khi học toán

Kết quả kiểm tra sau khi áp dụng đề tài

Số l- ợng học sinh	Điểm Giỏi	Điểm khá	Điểm trung bình	Điểm yếu	Điểm kém
30	5	8	12	5	0

VI:BÀI HỌC KINH NGHIỆM

Qua việc h- ớng dẫn học sinh làm bài tập cho thấy phần kiến thức về đề tài là phần kiến thức mở do giáo viên đ- a vào cuối các giờ luyện tập , hoặc giờ tự chọn nên nội dung đối với học sinh còn phức tạp , khó hình dung , vì vậy cần đ- a kiến thức cho học sinh cần làm từ dễ đến khó ,kết hợp ôn tập , giao bài tập về nhà , kiểm tra học sinh …

Sau khi h- ớng dẫn xong nội dung chuyên đề cần chỉ cho học sinh những kiến thức cần thiết , đồng thời rèn luyện những kỹ năng làm bài tập cho học sinh Cần đ- a nội dung vào giờ dạy cho phù hợp ,tránh dồn ép học sinh tiếp nhận kiến thức một cách thụ động mà đạt kết quả không mong muốn

VII: PHẠM VI ÁP DỤNG ĐỀ TÀI

Chuyên đề ((**một số ph- ơng pháp chứng minh bất đẳng thức và ứng dụng của bất đẳng thức**)) đ- ợc áp dụng cho học sinh lớp 8, 9 thích hợp nhất là học sinhlớp 9 và với đối t- ợng là học sinh khá giỏi

C: KẾT LUẬN

Các bài tập về bất đẳng thức th- ờng là t- ơng đối khó đối với học sinh , nh- ng khi h- ớng dẫn học sinh xong đề tài ((**một số ph- ơng pháp chứng minh bất đẳng thức và ứng dụng của bất đẳng thức**)), học sinh sẽ thấy rằng việc làm bài toán về bất đẳng thức sẽ rễ hơn . Đồng thời đứng tr- ớc bài toán khó cho dù ở dạng bài tập nào học sinh cũng có h- ớng suy nghĩ và tập suy luận , các em sẽ có tự tin hơn .

Chuyên đề còn có thể còn nhiều thiếu sót , rất mongđ- ợc sự ủng hộ của các thày cô giáo để đề tài ngày càng hoàn thiện hơn .

Tôi xin chân thành cảm ơn

Tháng 2 năm 2008.

MUC LUC

	TRANG
□ĐT V□N □□	6