

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VĂN TUẤN

PHƯƠNG TRÌNH HÀM SINH BỞI PHÉP QUAY VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 40

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN, 2010

Mục lục

Mở đầu	4
1 Đặc trưng các biến đổi cyclic	6
1.1 Phép biến đổi phân tuyến tính	6
1.1.1 Mối liên hệ giữa hàm phân tuyến tính và phương trình bậc hai	6
1.1.2 Nhóm cyclic các hàm phân tuyến tính	8
1.2 Một số nhóm hữu hạn trên đường tròn	11
1.2.1 Nhóm cyclic trên đường tròn đơn vị	11
1.2.2 Nhóm cyclic các hàm số phân tuyến tính trên đường tròn đơn vị	12
1.2.3 Nhóm cyclic trên đường thẳng thực	14
2 Phương trình hàm sinh bởi phép đối hợp với hệ số hằng	15
2.1 Phương trình hàm tuyến tính và phân tuyến tính với hệ số hằng	15
2.2 Phương trình hàm với vế phải là hàm số	23
3 Phương trình hàm sinh bởi phép đối hợp với hệ số biến thiên	27
3.1 Nghiệm riêng của phương trình hàm	27
3.2 Nghiệm của phương trình thuần nhất	28
3.3 Nghiệm của phương trình không thuần nhất	30
4 Một số áp dụng	33
4.1 Xác định dãy cấp số đặc biệt	33
4.1.1 Cấp số cộng	34
4.1.2 Cấp số nhân	35
4.1.3 Cấp số tổng quát	35
4.2 Xác định một số dãy số phân tuyến tính	37
4.3 Phương trình hàm trên tập số tự nhiên	38

Kết luận	43
Tài liệu tham khảo	44

Mở đầu

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong toán học phổ thông mỗi bài toán về phương trình hàm là các loại toán thường rất khó. Liên quan đến các dạng toán này là các bài toán về đặc trưng hàm số và các tính chất liên quan.

Để tổng quan các phương pháp giải các dạng toán trên, cần thiết phải hệ thống hóa các kiến thức cơ bản và nâng cao về các dạng phương trình hàm cũng như các ứng dụng của chúng.

Đề tài "*Phương trình hàm sinh bởi phép quay và một số áp dụng*" nhằm đáp ứng mong muốn của bản thân về một đề tài phù hợp mà sau này có thể phục vụ thiết thực cho việc giảng dạy của mình trong nhà trường phổ thông.

Đề tài liên quan đến nhiều chuyên đề, trong đó có các đặc trưng tính chất của hàm số, các tính chất của dãy số, các tính chất của nhóm cyclic (nhóm quay vòng) và nhiều kiến thức cơ bản khác.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Nhằm hệ thống và tổng quan các bài toán về phương trình hàm và cho các ứng dụng khác nhau trong toán phổ thông.

Nắm được một số kĩ thuật về tính toán trên biến đổi tuyến tính và phân tuyến tính, về đặc trưng hàm số, về tính chất cơ bản của hàm thực và số phức.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu các bài toán về phương trình hàm và xét các ứng dụng liên quan.

Nghiên cứu từ các tài liệu, giáo trình của GS - TSKH Nguyễn Văn Mậu, các tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi, tủ sách chuyên toán, Tạp chí toán học và tuổi trẻ,...

5. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ THỰC TIỄN CỦA ĐỀ TÀI

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh trung học phổ thông.

Đề tài đóng góp thiết thực cho việc dạy và học các chuyên đề toán trong trường THPT, đem lại niềm đam mê sáng tạo từ những bài toán cơ bản nhất.

6. CẤU TRÚC CỦA LUẬN VĂN

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm 4 chương

Chương 1 : Đặc trưng các biến đổi cyclic.

Chương 2: Phương trình hàm sinh bởi phép đối hợp với hệ số hằng.

Chương 3: Phương trình hàm sinh bởi phép đối hợp với hệ số biến thiên.

Chương 4: Một số áp dụng.

Qua đây tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn đến GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu đã tận tình giúp đỡ, định hướng, động viên và ân cần chỉ bảo cho tôi hoàn thành bản luận văn này. Đồng thời tác giả cũng xin chân thành cảm ơn tới các thầy cô trong hội đồng khoa học thuộc Đại học Thái Nguyên, các thầy, cô giảng dạy lớp cao học Toán K2 trường Đại học khoa học-Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện cho tôi được học tập, nghiên cứu và định hướng cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tuy đã cố gắng nghiên cứu kĩ đề tài và viết luận văn song khó tránh khỏi những sai sót. Tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo, hướng dẫn của các thầy cô và sự đóng góp ý kiến của các bạn bè đồng nghiệp để bản luận văn của tôi được hoàn chỉnh và có ý nghĩa hơn. Tôi xin chân thành cảm ơn.

Thái nguyên, ngày 09.09.2010

Chương 1

Đặc trưng các biến đổi cyclic

1.1 Phép biến đổi phân tuyến tính

1.1.1 Mối liên hệ giữa hàm phân tuyến tính và phương trình bậc hai

Trước hết ta khảo sát phương trình bậc hai với hệ số thực dạng

$$\frac{m}{x + \gamma} = x, \quad m \neq 0. \quad (1.1)$$

Ta có

$$(1.1) \Leftrightarrow x^2 + \gamma x - m = 0, \quad x \neq -\gamma. \quad (1.2)$$

Phương trình (1.2) có nghiệm thực khi và chỉ khi $\Delta = \gamma^2 + 4m \geq 0$.

- i. Nếu $\Delta = 0$ thì (1.2) có nghiệm kép $x_0 = -\frac{\gamma}{2}$.
- ii. Nếu $\Delta \geq 0$ thì (1.2) có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$.
- iii. Nếu $\Delta < 0$ thì (1.2) có 2 nghiệm phức liên hợp $x_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \mp \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2}$.

Tiếp theo ta chỉ ra cách đặt ẩn số phụ để đưa phương trình đại số tổng quát sinh bởi hàm phân tuyến tính $\omega(x)$ dạng

$$\frac{\alpha x + \beta}{x + \gamma} = x, \quad \alpha\gamma - \beta \neq 0 \quad (1.3)$$

về phương trình dạng (1.1). Thật vậy ta sử dụng đồng nhất thức sau

$$\frac{\alpha x + \beta}{x + \gamma} = \alpha + \frac{\beta - \alpha\gamma}{x + \gamma}$$

và viết phương trình (1.3) dưới dạng

$$\alpha + \frac{\beta - \alpha\gamma}{x + \gamma} = x \Leftrightarrow \alpha + \frac{\beta - \alpha\gamma}{(x - \alpha) + (\gamma + \alpha)} = x - \alpha + \alpha$$

hay

$$\frac{\beta - \alpha\gamma}{t + (\gamma + \alpha)} = t, \quad (1.4)$$

trong đó $t = x - \alpha$. Rõ ràng phương trình (1.4) có dạng (1.1). Trong trường hợp đặc biệt khi $\gamma + \alpha = 0$ thì phương trình (1.4) có dạng đơn giản hơn

$$\frac{\beta + \alpha^2}{t} = t \quad (1.5)$$

và hàm phân tuyến tính tương ứng có tính chất đặc biệt: $\omega(\omega(x)) = x$ tức là hàm $\omega(x)$ có tính chất đối hợp (đối hợp bậc 2).

Từ những nhận xét trên ta thấy mọi hàm phân tuyến tính $\omega(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ đều đưa về dạng $\omega(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, với $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ hoặc $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$. Từ đây bài toán về phương trình hàm sinh bởi các hàm phân tuyến tính đều có thể đưa về phương trình sinh bởi các biến đổi dạng (1.1) bằng các phép biến hình sơ cấp như phép tịnh tiến, phép quay, phép đồng dạng và phép nghịch đảo. Đồng thời từ đây ta có thể dùng tất cả các biến đổi của hàm bậc hai áp dụng cho các hàm phân tuyến tính.

Trong trường hợp phương trình (1.1) chỉ có nghiệm phức và hàm $\omega(x)$ không phải là hàm đối hợp bậc 2 thì bài toán sẽ được giải quyết như thế nào? Đó là những vấn đề phức tạp, vượt ra khỏi khuôn khổ chương trình toán bậc phổ thông.

Vấn đề đặt ra là làm thế nào mà ta có thể chọn được hàm $\omega(x)$ thỏa mãn điều kiện nêu trên?

- Trường hợp 1: Xây dựng hàm $\omega(x)$ sao cho phương trình $\omega(x) = x$ có nghiệm kép $x = x_0$. Xuất phát từ đẳng thức

$$(x - x_0)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2xx_0 + x_0^2 = 0 \Rightarrow x(x - 2x_0) = -x_0^2 \Rightarrow x = -\frac{x_0^2}{x - 2x_0}.$$

Suy ra hàm $\omega(x)$ cần tìm là

$$\omega(x) = -\frac{x_0^2}{x - 2x_0}.$$

- Trường hợp 2: Xây dựng hàm $\omega(x)$ sao cho phương trình $\omega(x) = x$ có 2 nghiệm phân biệt $x = x_1; x = x_2$. Xuất phát từ đẳng thức

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Rightarrow x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 0 \Rightarrow x[x - (x_1 + x_2)] = -x_1x_2$$

$$\Rightarrow x = -\frac{x_1 x_2}{x - (x_1 + x_2)}.$$

Suy ra hàm $\omega(x)$ cần tìm là

$$\omega(x) = -\frac{x_1 x_2}{x - (x_1 + x_2)}.$$

Tiếp theo ta khảo sát một số tính chất của các hàm phân tuyến tính tổng quát trên $\mathbb{C}$.

1.1.2 Nhóm cyclic các hàm phân tuyến tính

Xét các hàm phân tuyến tính dạng

$$\omega(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad (1.6)$$

khi đó nếu

$$L_1(z) = \frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1}$$

và

$$L_2(z) = \frac{\alpha_2 z + \beta_2}{\gamma_2 z + \delta_2}$$

là hai hàm phân tuyến tính tùy ý thì tích của chúng được kí hiệu bởi $L_1 \circ L_2(z)$ và được xác định như sau

$$L(z) = L_1 \circ L_2(z) = \frac{\alpha_1 \frac{\alpha_2 z + \beta_2}{\gamma_2 z + \delta_2} + \beta_1}{\gamma_1 \frac{\alpha_2 z + \beta_2}{\gamma_2 z + \delta_2} + \delta_1} = \frac{(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \gamma_2)z + \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \delta_2}{(\gamma_1 \alpha_2 + \delta_1 \gamma_2)z + \gamma_1 \beta_2 + \delta_1 \delta_2}.$$

Rõ ràng $L(z)$ cũng là một hàm phân tuyến tính. Suy ra với tích này tập hợp các hàm phân tuyến tính lập thành một nhóm. Ta kí hiệu nhóm này là G . Dễ thấy G là nhóm vô hạn và không giao hoán.

Với hàm phân tuyến tính

$$\omega(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{với } ad - bc \neq 0 \quad (1.7)$$

ta chia cả tử và mẫu cho $\sqrt{|ad - bc|}$ ta thu được

$$\omega(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{với } \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1, \quad (1.8)$$

do đó ta luôn có thể giả thiết $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ khi đó ta có thể thấy G là nhóm các hàm phân tuyến tính dạng $\omega(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ với $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$.

Với $\forall \omega \in G$ ta viết

$$A_\omega = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Khi đó ta có các nhận xét sau.

Nhận xét 1.1. Giả sử ω_1 và ω_2 thuộc G thì ta có

$$A_{\omega_2\omega_1} = A_{\omega_2}A_{\omega_1}. \quad (1.9)$$

Nhận xét 1.2.

$$e(z) = \frac{1z + 0}{0z + 1} \equiv \frac{-1z + 0}{0z - 1}$$

là phần tử đơn vị của nhóm G . Ta kí hiệu I là phần tử đơn vị của nhóm G .

Nhận xét 1.3. Giả sử $\omega \in G$ khi đó $\omega \equiv I$ khi và chỉ khi $A = E$ hoặc $A = -E$, trong đó E là ma trận đơn vị.

Mệnh đề 1.1. Giả sử $\omega(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ thuộc G . Khi đó với $\forall n \in \mathbb{N}$ ta có

$$A_\omega^n = \lambda_n A_\omega - \lambda_{n-1} E \quad (1.10)$$

trong đó $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ và

$$\lambda_k - (\alpha + \delta)\lambda_{k-1} + \lambda_{k-2} = 0 \quad (1.11)$$

với $k = 1, 2, \dots$

Chứng minh. Theo quy nạp với $n = 1$ thì (1.10) hiển nhiên đúng. Giả sử đúng với $n = k$ khi đó với $n = k+1$ ta có: $A_\omega^{k+1} = A_\omega^k A_\omega = (\lambda_k A_\omega - \lambda_{k-1} E) A_\omega = \lambda_k A_\omega^2 - \lambda_{k-1} A_\omega = \lambda_k [(\alpha + \delta) A_\omega - E] - \lambda_{k-1} A_\omega = [\lambda_k(\alpha + \delta) - \lambda_{k-1}] A_\omega - \lambda_k E = \lambda_{k+1} A_\omega - \lambda_k E$ trong đó $\lambda_{k+1} = \lambda_k(\alpha + \delta) - \lambda_{k-1}$. Bây giờ ta xác định λ_k từ công thức (1.11). Dễ thấy (1.11) là phương trình vi phân tuyến tính bậc 2 có phương trình đặc trưng là $t^2 - (\alpha + \delta)t + 1 = 0$ với biệt số $\Delta = (\alpha + \delta)^2 - 4$. Vậy ta có

Nhận xét 1.4. Giả sử $\omega(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ thuộc G và $n \in \mathbb{N}$. Khi đó

- Nếu $\alpha + \delta = 2$ thì $\lambda_n = n$.
- Nếu $\alpha + \delta = -2$ thì $\lambda_n = (-1)^{n+1}n$.
- Nếu $\alpha + \delta \neq \pm 2$ thì $\lambda_n = \frac{1}{\theta_1}(x_1^n - x_2^n) = \frac{1}{\theta_2}(x_2^n - x_1^n)$ trong đó θ_1 và θ_2 là căn bậc hai của $(\alpha + \delta)^2 - 4$ và $x_1 = \frac{\alpha + \delta + \theta_1}{2}$; $x_2 = \frac{\alpha + \delta + \theta_2}{2}$.

Từ nhận xét trên ta thấy để $A_\omega^n = E$ thì điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} \lambda_n = 0 \\ \lambda_{n-1} = -1 \end{cases}$$

Vậy ta có thể phát biểu kết quả nhận được dưới dạng

Mệnh đề 1.2. Giả sử $\omega \in G$ có dạng (1.6) và $\omega \neq I$. Khi đó $\omega^n \equiv I$ khi và chỉ khi

$$\alpha + \delta = 2 \cos \frac{k\pi}{n} \quad \text{với} \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Định lý 1.1. Giả sử $\omega \in G$ cho trước và $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ cố định. Khi đó ω thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \omega^n \equiv I \\ \omega^m \not\equiv I, m = 1, 2, 3, \dots, n-1 \end{cases} \quad (1.12)$$

khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \alpha + \delta = 2 \cos \frac{k\pi}{n}, k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, (n, k) = 1 \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \end{cases}.$$

Chứng minh. Theo mệnh đề 1.2, ta có

$$\alpha + \delta = 2 \cos \frac{k\pi}{n}, \text{ với } k \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Nếu $(n, k) = l > 1$ thì $\alpha + \delta = 2 \cos \frac{k\pi}{n} = 2 \cos \frac{\frac{k}{l}\pi}{\frac{n}{l}} = 2 \cos \frac{k_1\pi}{n_1}$ trong đó $n_1 = \frac{n}{l} < n$. Theo mệnh đề 1.2, ta có $\omega^{n_1} \equiv I$, mâu thuẫn với giả thiết $\omega^{n_1} \not\equiv I$ với $\forall m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Vậy nên $(n, k) = 1$.

Ngược lại, giả sử $\alpha + \delta = 2 \cos \frac{k\pi}{n}$ ứng với $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ và $(n, k) = 1$. Từ mệnh đề 1.2, suy ra $\omega^n \equiv I$. Giả sử tồn tại $m \in \mathbb{N}$, $2 \leq m < n$ sao cho $\omega^m \equiv I$. Từ mệnh đề 1.1, suy ra tồn tại $k_1 \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ sao cho $\alpha + \delta = 2 \cos \frac{k_1\pi}{m}$. Khi đó

$\cos \frac{k\pi}{n} = \cos \frac{k_1\pi}{m} \Rightarrow \frac{k\pi}{n} = \frac{k_1\pi}{m}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $(n, k) = 1$. Để kết thúc, ta chứng minh $\omega \neq I$. Thật vậy, giả sử $\omega \equiv I$, tức là

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = z, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Theo nhận xét 1.3, ta có $\alpha = \delta = 1$ hoặc $\alpha = \delta = -1$. Từ giả thiết suy ra $\cos \frac{k\pi}{n} = 1$ hoặc $\cos \frac{k\pi}{n} = -1$ ứng với $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Không tồn tại m nguyên. $\square$

Nhận xét 1.5. Nếu $\omega \in G$ thỏa mãn điều kiện (1.12) thì ω là phần tử sinh của nhóm cyclic bậc m .

1.2 Một số nhóm hữu hạn trên đường tròn

1.2.1 Nhóm cyclic trên đường tròn đơn vị

Trong mặt phẳng phức mở rộng, một trong những phép biến hình tạo nên nhóm cyclic trên đường tròn đó là phép quay. Cụ thể

Phép quay. Phép quay tâm $M_0(z_0)$ góc quay α là phép biến hình biến điểm $M(z)$ thành điểm $M'(z')$ sao cho $M_0M = M_0M'$ và $(\overrightarrow{M_0M}; \overrightarrow{M_0M'}) \equiv \alpha \pmod{2\pi}$. Từ đó biểu thức của phép quay là

$$z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0).$$

Trong trường hợp tâm quay M_0 trùng với gốc tọa độ thì biểu thức của phép quay trở thành:

$$z' = e^{i\theta}z = z(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Đặt $\omega = \cos \theta + i \sin \theta$. Trong mặt phẳng phức xét điểm $A_1(z_1)$. Khi đó qua phép quay $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, ta được

$$z_2 = z_1 \cdot \omega$$

$$z_3 = z_2 \cdot \omega = z_1 \cdot \omega^2$$

$$z_4 = z_3 \cdot \omega = z_1 \cdot \omega^3$$

.....

$$z_n = z_{n-1} \cdot \omega = z_1 \cdot \omega^n = z_1.$$

Từ đó suy ra các số phức $\{z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n-1}\}$ lập thành một nhóm hữu hạn. Nếu biểu diễn các điểm $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n-1}$ trên mặt phẳng phức ta được một $(n-1)$ -giác đều nội tiếp trong đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $|z_1|$.

Trong trường hợp đặc biệt $\theta = \pi$ ta có phép phản xạ.

1.2.2 Nhóm cyclic các hàm số phân tuyến tính trên đường tròn đơn vị

Giả sử $\Gamma = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ là đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Ta xác định dạng tổng quát của hàm phân tuyến tính $\omega(z)$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$\omega(\Gamma) \subset \Gamma, \omega^n \equiv I, \omega^m \not\equiv I, m = 1, 2, \dots, n-1, \quad (1.13)$$

trong đó $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ cho trước.

Ta biết rằng hàm phân tuyến tính $\omega(z)$ ánh xạ Γ vào Γ khi và chỉ khi nó có dạng

$$\omega(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1}, \quad (1.14)$$

trong đó $\theta \in \mathbb{R}$, α là không điểm của $\omega(z)$, $i, e, \alpha \in \mathbb{C}, \omega(\alpha) = 0$. Ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1: $\alpha = \infty$. Từ (1.14), ta có $\omega(z) = e^{i\theta} \frac{1}{z}$ và $\omega^2 = I$. Do đó, ta có thể kết luận

- Nếu $n = 2$ thì $\omega(z) = e^{i\theta} \frac{1}{z}$.
- Nếu $n > 2$ thì không tồn tại $\omega(z)$.

Trường hợp 2: $\alpha < \infty$. Từ điều kiện $\omega(z) \in \Gamma$ nên $\forall z \in \Gamma$, suy ra $|t| \neq 1$. Kí hiệu θ_1 là một giá trị của $\sqrt{\alpha\bar{\alpha} - 1}$. Chia cả tử và mẫu của (1.14) cho $e^{\frac{i\theta}{2}}$ ta thu được.

$$\omega(z) = \frac{\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\theta_1} z - \frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\theta_1} \alpha}{\frac{e^{-\frac{i\theta}{2}}}{\theta_1} az - \frac{e^{-\frac{i\theta}{2}}}{\theta_1}}.$$

Theo định lí 1.1, ta có

$$\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{\theta_1} + \frac{-e^{-\frac{i\theta}{2}}}{\theta_1} = 2 \cos \frac{k\pi}{n}, \text{ ứng với } k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, (k, n) = 1. \text{ Vì rằng}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \theta_1 \cos \frac{k\pi}{n}. \quad (1.15)$$

- Nếu $n = 2$ thì $k = 1$. Từ (1.15), ta có $\theta = 2m\pi$, ứng với $m \in \mathbb{Z}$. Khi đó ta có

$$\omega(z) = e^{2m\pi i} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1} = \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1}.$$

- Nếu $n > 2$ thì từ điều kiện $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $(n, k) = 1$, suy ra $\cos \frac{k\pi}{n} \neq 0$. Do vậy ta có

$$\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{k\pi}{n}} = \theta_1.$$

Suy ra θ_1 là số thực, do đó $|\alpha| < 1$. Vậy nên $|\alpha| < 1$ là điều kiện cần. Ta có

$$\cos \theta = 1 - 2(1 - \alpha\bar{\alpha}) \cos^2 \frac{k\pi}{n}.$$

Do đó ta chứng minh được định lý sau.

Định lý 1.2. Giả sử $\omega(z)$ là hàm phân tuyến tính thỏa mãn điều kiện

$$\omega(\Gamma) \subset \Gamma, \omega^n \equiv I, \omega^m \neq I, m = 1, 2, \dots, n-1,$$

trong đó $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ cho trước.

1, Nếu $n = 2$ thì ω có dạng

$$\omega(z) = e^{i\theta} \frac{1}{z}, \theta \in \mathbb{R}$$

hoặc

$$\omega(z) = \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1}, |\alpha| \neq 1.$$

2, Nếu $n > 2$ thì ω có dạng

$$\omega(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1},$$

trong đó $|\alpha| < 1, \cos \theta = 1 - 2(1 - \alpha\bar{\alpha}) \cos^2 \frac{k\pi}{n}$, ứng với $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $(n, k) = 1$.

Nhận xét 1.6. Giả sử hàm phân tuyến tính $\omega(z)$ thỏa mãn (1.13) và bảo toàn hướng của Γ , tức là

$$\begin{cases} \omega(\Gamma) \subset \Gamma \\ \omega^n \equiv I \\ \omega^m \neq I, m = 1, 2, \dots, n-1. \\ \omega \text{ hướng dương của } \Gamma \end{cases}$$

thì trong kết luận ta cần bổ sung thêm điều kiện $|\alpha| < 1$. Khi đó, ta có thể kết luận rằng

- Nếu $n = 2$ thì ω có dạng

$$\omega(z) = \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1}, (|\alpha| < 1).$$

- Nếu $n > 2$ thì ω có dạng

$$\omega(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1},$$

trong đó $|\alpha| < 1$, $\cos \theta = 1 - 2(1 - \alpha\bar{\alpha}) \cos^2 \frac{k\pi}{n}$, ứng với $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $(n, k) = 1$.

1.2.3 Nhóm cyclic trên đường thẳng thực

Về sau, ta chỉ xét các dạng phương trình hàm trên trục thực nên cần tìm các điều kiện để các hàm tuyến tính $\omega(x) = \alpha x + \beta$ và phân tuyến tính $\omega(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ với $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ và $x \in \mathbb{R}$ có tính chất $\omega(\omega(x)) = x$.

- Với hàm tuyến tính $\omega(x) = \alpha x + \beta$ ta có.

$$\omega[\omega(x)] = x \Rightarrow \alpha(\alpha x + \beta) + \beta = x \Rightarrow \alpha^2 x + (\alpha + 1)\beta = x \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 1 \\ (\alpha + 1)\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \forall \beta \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Do đó hàm tuyến tính tổng quát có tính chất phản xạ là

$$\omega(x) = \beta - x$$

- Với hàm phân tuyến tính $\omega(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ với $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ta có.

$$\omega[\omega(x)] = x \Rightarrow \frac{\alpha[\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}] + \beta}{\gamma[\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}] + \delta} = x \Rightarrow \alpha + \delta = 0.$$

$$\text{Do đó nếu hàm } \omega(x) \text{ thỏa mãn } \begin{cases} \alpha + \delta = 0 \\ \gamma \neq 0 \\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \end{cases} \quad \text{thì } \omega[\omega(x)] = x.$$

Chương 2

Phương trình hàm sinh bởi phép đối hợp với hệ số hằng

Cho hàm số $\omega(x)$ xác định trên tập D . Xét dãy số $\omega_1(x) = \omega(x)$; $\omega_2(x) = \omega(\omega_1(x))$; $\dots$; $\omega_n(x) = \omega(\omega_{n-1}(x))$.

Nếu $\omega_n(x) = x$ thì hàm $\omega(x)$ có tính chất đối hợp bậc n .

2.1 Phương trình hàm tuyến tính và phân tuyến tính với hệ số hằng

Bài toán 2.1. Xác định tất cả các hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Giải. Ta có

$$(2.1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

Ta chứng minh rằng mọi hàm chẵn đều có dạng

$$f(x) = \frac{1}{2}[g(x) + g(-x)] \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

trong đó $g(x)$ là hàm tùy ý. Thật vậy từ (2.3) ta có

$$f(-x) = \frac{1}{2}[g(-x) + g(x)] = f(x).$$

Ngược lại mọi hàm chẵn đều có dạng (2.3) vì hàm chẵn có dạng (2.2) là trường hợp đặc biệt của dạng (2.3).

Nhận xét 2.1. Trong ví dụ trên hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn tại 0. Trong trường hợp tổng quát hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn tại một giá trị x_0 bất kì thì biểu thức của hàm số $f(x)$ được xác định như thế nào? Ta cùng xét bài toán sau

Bài toán 2.2. Xác định tất cả các hàm số trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) = f(a - x) , \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Giải. Với $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có $f(\frac{a}{2} + x) = f(\frac{a}{2} - x)$. Gọi $g(x) = f(\frac{a}{2} + x)$ thì $f(x) = g(x - \frac{a}{2})$ và $g(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$. Theo bài toán 2.1 thì $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}[h(x) + h(-x)]$. Suy ra

$$f(x) = \frac{1}{2}[h(x - \frac{a}{2}) + h(-\frac{a}{2} - x)]$$

với $h(x)$ là hàm số bất kì.

Bài toán 2.3. Xác định tất cả các hàm lẻ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(-x) = -f(x) , \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Giải. Ta có

$$(2.5) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] . \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

Ta chứng minh rằng mọi hàm lẻ đều có dạng

$$f(x) = \frac{1}{2}[g(x) - g(-x)] . \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

trong đó $g(x)$ là hàm tùy ý. Thật vậy từ (2.7) ta có

$$f(-x) = \frac{1}{2}[g(-x) - g(x)] = -\frac{1}{2}[g(x) - g(-x)] = -f(x) , \forall x \in \mathbb{R}$$

Ngược lại mọi hàm lẻ đều có dạng (2.7) vì hàm lẻ có dạng (2.6) là trường hợp đặc biệt của dạng (2.7)

Nhận xét 2.2. Trong ví dụ trên hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ tại 0. Trong trường hợp tổng quát hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ tại một giá trị x_0 bất kì thì biểu thức của hàm số $f(x)$ được xác định như thế nào? Ta cùng xét bài toán sau

Bài toán 2.4. Xác định tất cả các hàm số trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) = -f(a - x) , \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

Giải. Với $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có $f(\frac{a}{2}+x) = -f(\frac{a}{2}-x)$. Gọi $g(x) = f(\frac{a}{2}+x)$ thì $f(x) = g(x-\frac{a}{2})$ và $g(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$. Theo bài toán (2.3) thì $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}[h(x) - h(-x)]$. Suy ra

$$f(x) = \frac{1}{2}[h(x - \frac{a}{2}) - h(-\frac{a}{2} - x)]$$

với $h(x)$ là hàm số bất kì.

Bài toán 2.5. Xác định tất cả các hàm số trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) = 2 - f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

Giải. Với $\forall x \in \mathbb{R}$, từ giả thiết ta có $f(x) - 1 = -[f(-x) - 1]$. Gọi $g(x) = f(x) - 1$ thì $f(x) = g(x) + 1$ và $g(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$. Theo bài toán 2.3 thì $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}[h(x) - h(-x)]$. Suy ra

$$f(x) = \frac{1}{2}[h(x) - h(-x)] + 1$$

với $h(x)$ là hàm số bất kì.

Bài toán 2.6. Xác định tất cả các hàm số trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) = a - f(b - x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

Giải. Với $\forall x \in \mathbb{R}$, từ giả thiết ta có

$$f(\frac{b}{2} + x) = a - f(\frac{b}{2} - x) \Leftrightarrow f(x + \frac{b}{2}) - \frac{a}{2} = -[f(-x + \frac{b}{2}) - \frac{a}{2}].$$

Gọi $g(x) = f(x + \frac{b}{2}) - \frac{a}{2}$ thì $f(x) = g(x - \frac{b}{2}) + \frac{a}{2}$ và $g(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$. Theo bài toán 2.3 thì $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}[h(x) - h(-x)]$. Suy ra

$$f(x) = \frac{1}{2}[h(x - \frac{b}{2}) - h(-x + \frac{b}{2})] + \frac{a}{2}.$$

với $h(x)$ là hàm số bất kì.

Bài toán 2.7. Xác định các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(\frac{1}{2-x}) = 2f(x) \quad (2.11)$$

Nhận xét 2.3. Xét phương trình $\frac{1}{2-x} = x \Leftrightarrow 2x - x^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (là nghiệm kép)

Giải. Đặt $\frac{1}{x-1} = t$. Khi đó $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{t} \\ \frac{1}{2-x} = 1 + \frac{1}{t-1} \end{cases}$
 Thế vào (2.11) ta được $f(1 + \frac{1}{t-1}) = 2f(1 + \frac{1}{t})$ với $\forall t \neq 1, t \neq 0$. Đặt $f(1 + \frac{1}{t}) = g(t)$ thì $f(1 + \frac{1}{t-1}) = g(t-1)$. Ta được

$$g(t-1) = 2g(t) \quad (2.12)$$

với $\forall t \neq 1$ và $t \neq 0$. Đặt $g(x) = (\frac{1}{2})^x \cdot h(x) = 2^{-x} \cdot h(x)$. Thay vào (2.12) ta được

$$2^{-(t-1)} \cdot h(t-1) = 2 \cdot 2^{-t} \cdot h(t) \Leftrightarrow h(t-1) = h(t) \Leftrightarrow h(t+1) = h(t).$$

Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = 2^{-\frac{1}{x-1}} \cdot h(\frac{1}{x-1})$$

Trong đó $h(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 1 tùy ý.

Nhận xét 2.4. Với ý tưởng trên để sáng tác các bài tập dạng này ta chỉ cần xuất phát từ một hàm phân tuyến tính $\omega(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ với $\gamma(x) \neq 0$ mà phương trình $\omega(x) = x$ có nghiệm kép $x = x_0$. Chẳng hạn ta xuất phát từ đẳng thức: $(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{x+4}$. Từ đó ta xét bài toán:

Bài toán 2.8. Tìm các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(-\frac{4}{x+4}) = -3f(x) + 2, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq -4 \quad (2.13)$$

Giải. Theo giả thiết phương trình $-\frac{4}{x+4} = x$ có nghiệm kép $x = -2$. Đặt $\frac{1}{x+2} = t$. Khi đó

$$\begin{cases} x = -2 + \frac{1}{t} \\ -\frac{4}{x+4} = -2 + \frac{1}{t + \frac{1}{2}} \end{cases}$$

Thế vào (2.13) ta được $f(-2 + \frac{1}{t + \frac{1}{2}}) = -3f(-2 + \frac{1}{t}) + 2$ với $\forall t \neq -\frac{1}{2}, t \neq 0$. Đặt

$f(-2 + \frac{1}{t}) = g(t)$ thì $f(-2 + \frac{1}{t + \frac{1}{2}}) = g(t + \frac{1}{2})$. Ta được

$$g(t + \frac{1}{2}) = -3g(t) + 2. \quad (2.14)$$

Đặt $g(x) = \frac{1}{2} + h(x)$. Thay vào (2.14) ta được $h(t + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = -3(\frac{1}{2} + h(t)) + 2$

$$\Leftrightarrow h(t + \frac{1}{2}) = -3h(t). \quad (2.15)$$

Đặt $h(x) = 9^x \cdot p(x)$. Thay vào (2.15) ta được $9^{t+\frac{1}{2}} \cdot p(t + \frac{1}{2}) = -3 \cdot 9^t \cdot p(t) \Leftrightarrow p(t + \frac{1}{2}) = -p(t)$. Ta có $p(t + 1) = p((t + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}) = -p(t + \frac{1}{2}) = p(t)$. Suy ra $p(t)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 1. Mặt khác thay $x = -2$ vào phương trình (2.13) ta được $f(-2) = \frac{1}{2}$. Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{khi } x = -2 \\ \frac{1}{2} + 9^{\frac{1}{x+2}} \cdot p(\frac{1}{x+2}) & \text{khi } x \neq -2 \end{cases}$$

Trong $p(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 bất kỳ.

Nhận xét 2.5. Ta vẫn xuất phát từ đẳng thức: $(x+2)^2 = 0$. Nhưng ta lựa chọn phép biến đổi khác thì ta sẽ nhận được một phương trình hàm ở dạng khác nhưng vẫn có cùng đáp số. Ví dụ như $(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = -3x - 4 \Leftrightarrow x = -\frac{3x+4}{x+1}$. Từ đó ta có bài toán.

Bài toán 2.9. Tìm các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(-\frac{3x+4}{x+1}) = -3f(x) + 2, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq -1 \quad (2.16)$$

Cách giải hoàn toàn tương tự như cách giải trong bài toán 2.8

Nhận xét 2.6. Nếu chọn phép biến đổi $(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = -x - 4 \Leftrightarrow x = -\frac{x+4}{x+3}$. Từ đó ta có bài toán:

Bài toán 2.10. Tìm các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(-\frac{x+4}{x+3}) = -3f(x) + 2, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq -3 \quad (2.17)$$

Cách giải hoàn toàn tương tự như cách giải trong bài toán 2.8

Nhận xét 2.7. Ta có thể tổng quát bài toán trong trường hợp này như sau:

Cho hàm số $\omega(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, $\gamma \neq 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ sao cho phương trình $\omega(x) = x$ có nghiệm kép $x = x_0$. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$af(\omega(x)) = bf(x) + c, \forall x, a, b, c \in \mathbb{R}, x \neq -\frac{\delta}{\gamma}. \quad (2.18)$$

Đến đây ta đã giải quyết xong trường hợp phương trình $\omega(x) = x$ có nghiệm kép. Vậy trường hợp phương trình $\omega(x) = x$ có hai nghiệm phân biệt thì bài toán được giải quyết như thế nào? Ta cùng xét một số bài toán minh họa

Bài toán 2.11. Tìm các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\frac{2}{3-x}\right) = 2f(x) - 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 3. \quad (2.19)$$

Nhận xét 2.8. Phương trình $\frac{2}{3-x} = x$ có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = 2$. Để giải phương trình dạng này ta cần chuyển một nghiệm về 0 còn nghiệm kia ra ∞ . Vận dụng tư tưởng này ta có lời giải như sau.

Giải. Thay $x = 1$ và $x = 2$ vào phương trình (2.19) ta được $f(1) = f(2) = 3$. Xét trường hợp $x \neq 1$ và $x \neq 2$. Đặt $\frac{x-1}{x-2} = t \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, x \notin \{1, 2, 3\}$. Khi đó $x = \frac{2t-1}{t-1} = 2 + \frac{1}{t-1}$; $\frac{2}{3-x} = 2 + \frac{1}{\frac{2}{2}-1}$. Thay vào phương trình (2.19) ta được $f\left(2 + \frac{1}{\frac{2}{2}-1}\right) = 2f\left(2 + \frac{1}{t-1}\right) - 3$. Đặt $g(t) = f\left(2 + \frac{1}{t-1}\right)$ ta được

$$g\left(\frac{t}{2}\right) = 2g(t) - 3 \quad (2.20)$$

Với $\forall t \in \mathbb{R}, t \notin \{0, 1, 2\}$. Đặt $g(t) = 3 + h(t)$ thay vào (2.20) ta được $3 + h\left(\frac{t}{2}\right) = 2(3 + h(t)) - 3 \Leftrightarrow h\left(\frac{t}{2}\right) = 2h(t)$ hay

$$h(2t) = \frac{1}{2}h(t) \quad (2.21)$$

Đặt $h(t) = t^{-1}p(t)$ thay vào (2.21) ta được

$$p(2t) = p(t) \quad (2.22)$$

$\forall t \in \mathbb{R}, t \notin \{0, 1, 2\}$ Đặt $t = 2^y$ thì $2t = 2^{y+1}$ thay vào (2.22) ta được $p(2^{y+1}) = p(2^y)$, với $\forall y \in \mathbb{R}$. Đặt $h(2^y) = \varphi(y)$ thì $p(2^{y+1}) = \varphi(y+1)$ suy ra phương trình (2.22) có dạng

$$\varphi(y+1) = \varphi(y) \quad (2.23)$$

Suy ra $\varphi(y)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x \in \{1, 2\} \\ 3 + t^{\frac{x-2}{x-1}} \varphi(\log_2(\frac{x-1}{x-2})) & \text{khi } x \notin \{1, 2\} \end{cases}$$

Trong đó $\varphi(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 bất kỳ.

Nhận xét 2.9. Ta xuất phát từ đẳng thức $(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 1-2x \Leftrightarrow x = \frac{1-2x}{x-2}$. Ta có bài toán

Bài toán 2.12. Tìm các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f\left(\frac{1-2x}{x-2}\right) = 2f(x) - 3, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2. \quad (2.24)$$

Giải. Thay $x = 1$ và $x = -1$ vào phương trình (2.24) ta được $f(1) = f(-1) = 3$.

Xét trường hợp $x \neq 1$ và $x \neq -1$. Đặt $\frac{x+1}{x-1} = t \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, t \notin \{1, 2, 3\}$. Khi đó $x = \frac{t+1}{t-1} = 1 + \frac{2}{t-1}$; $\frac{1-2x}{x-2} = 1 + \frac{2}{\frac{t}{3}-1}$. Thay vào phương trình (2.24) ta được

$$f\left(1 + \frac{2}{\frac{t}{3}-1}\right) = 2f\left(1 + \frac{2}{t-1}\right) - 3. \text{ Đặt } g(t) = f\left(1 + \frac{2}{t-1}\right) \text{ ta được}$$

$$g\left(\frac{t}{3}\right) = 2g(t) - 3, \forall t \in \mathbb{R}, t \notin \{1, 3\}. \quad (2.25)$$

Đặt $g(t) = 3 + h(t)$ thay vào (2.25) ta được $3 + h\left(\frac{t}{3}\right) = 2(3 + h(t)) - 3 \Leftrightarrow h\left(\frac{t}{3}\right) = 2h(t)$ hay

$$h(3t) = \frac{1}{2}h(t). \quad (2.26)$$

Đặt $h(t) = t^{-\log_3 2} p(t)$ thay vào (2.26) ta được

$$p(3t) = p(t). \quad (2.27)$$

$\forall t \in \mathbb{R}, t \notin \{1, 3\}$. Đặt $t = 3^y$ thì $3t = 2^{y+1}$ thay vào (2.27) ta được $p(3^{y+1}) = p(3^y)$, với $\forall y \in \mathbb{R}$. Đặt $h(3^y) = \varphi(y)$ thì $p(3^{y+1}) = \varphi(y+1)$ suy ra phương trình (2.27) có dạng

$$\varphi(y+1) = \varphi(y). \quad (2.28)$$

Suy ra $\varphi(y)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = \pm 1 \\ 3 + t^{-\log_3 2} \varphi(\log_3(\frac{x+1}{x-1})) & \text{khi } x \neq \pm 1 \end{cases}$$

Trong đó $\varphi(x)$ là hàm tuần hoàn cộng tính chu kỳ 1 bất kỳ.

Với ý tưởng như trên ta hoàn toàn có thể giải được bài toán tổng quát sau. Cho hàm số $\omega(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, $\gamma \neq 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ sao cho phương trình $\omega(x) = x$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(\omega(x)) = af(x) + b, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq -\frac{\delta}{\gamma} \quad (2.29)$$

Bài toán 2.13. Cho hàm số $\omega(x) = \frac{2x-5}{x-2}$. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(\omega(x)) + f(x) = 3, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2 \quad (2.30)$$

Giải. Dễ thấy phương trình $\omega(x) = x$ không có nghiệm thực và $\omega(\omega(x)) = x$. Đặt $f(t) = \frac{3}{2} + g(t)$ thay vào phương trình (2.30) ta được $\frac{3}{2} + g(\omega(x)) + \frac{3}{2} + g(x) = 3 \Leftrightarrow g(\omega(x)) + g(x) = 0$

$$\Leftrightarrow g(\omega(x)) = -g(x). \quad (2.31)$$

Ta có $g(x) = \frac{1}{2}[g(\omega(x)) - g(x)]$. Ta chứng minh mọi hàm số thỏa mãn (2.31) đều có dạng $g(x) = \frac{1}{2}[h(\omega(x)) - h(x)]$ với $h(x)$ tùy ý. Ngược lại khi $g(x)$ thỏa mãn (2.31) thì $g(\omega(x)) = \frac{1}{2}[h(\omega(\omega(x))) - h(\omega(x))]$ $= \frac{1}{2}[h(x) - h(\omega(x))] = -g(x)$. Vậy hàm số cần tìm là

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}[h(\omega(x)) - h(x)]$$

Trong đó $h(x)$ là hàm tùy ý xác định $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2$.

Nhận xét 2.10. Xét các bài toán mà hàm $\omega(x)$ thỏa mãn điều kiện: Phương trình $\omega(x) = x$ vô nghiệm và $\omega(\omega(x)) = x$.

Bài toán 2.14. Cho hàm số $\omega(x) = \frac{-1}{x+1}$. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$(\omega(\omega(x))) + f(\omega(x)) + f(x) = 3, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq -1, x \neq 0 \quad (2.32)$$

Giải. Dễ thấy phương trình $\omega(x) = x$ không có nghiệm thực và ta có các đẳng thức sau

$$\omega_2(x) = \omega(\omega(x)) = \frac{-1}{\frac{-1}{x+1} + 1} = -\frac{x+1}{x}; \omega_3(x) = \omega(\omega(\omega(x))) = -\frac{\frac{-1}{x+1} + 1}{\frac{-1}{x+1}} = x.$$

Từ (2.32) dễ thấy $f(x) \equiv 1$ là một nghiệm của bài toán. Đặt $f(x) = 1 + g(x)$ thay vào phương trình (2.32) ta được

$$g(\omega_2(x)) + g(\omega(x)) + g(x) = 0, \forall x \neq -1, x \neq 0. \quad (2.33)$$

Ta chứng minh mọi nghiệm của (2.33) đều có dạng

$$g(x) = \frac{1}{3}[2h(x) - h(\omega_2(x)) - h(\omega(x))] \quad (2.34)$$

với $h(x)$ tùy ý xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Thật vậy, khi $g(x)$ có dạng (2.34) thì $g(\omega_2(x)) + g(\omega(x)) + g(x) = \frac{1}{3}[2h(\omega_2(x)) - h(\omega(x)) - h(x)] + \frac{1}{3}[2h(\omega(x)) - h(x) - h(\omega_2(x))] + \frac{1}{3}[2h(x) - h(\omega_2(x)) - h(\omega(x))] = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Ngược lại, khi $g(x)$ thỏa mãn (2.33) thì ta chỉ việc chọn $h(x) = g(x)$ sẽ có ngay công thức biểu diễn (2.34).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $f(x) \equiv 1$, với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ hoặc

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3}[2h(x) - h(\omega_2(x)) - h(\omega(x))],$$

với $h(x)$ là hàm tùy ý xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

2.2 Phương trình hàm với vế phải là hàm số

Bài toán 2.15. Cho hàm số $\varphi(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Xác định tất cả các hàm số trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) - f(-x) = \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.35)$$

Giải. Với $\forall x \in \mathbb{R}$, từ giả thiết ta có $f(x) - f(-x) = \varphi(x)$ là hàm số lẻ.

- Nếu $\varphi(x)$ không phải là hàm số lẻ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\varphi(x)$ là hàm số lẻ thì ta có $\varphi(x) = \frac{1}{2}[\varphi(x) - \varphi(-x)]$. Từ giả thiết ta được

$$f(x) = f(-x) + \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2}\varphi(-x) \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2}\varphi(x) = f(-x) - \frac{1}{2}\varphi(-x).$$

Đặt $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}\varphi(x)$ thì $g(x)$ là hàm số chẵn theo bài toán 2.1 thì $g(x) = \frac{1}{2}[h(x) + h(-x)]$. Do đó $f(x) - \frac{1}{2}\varphi(x) = \frac{1}{2}[h(x) + h(-x)]$.

Vậy

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}[h(x) + h(-x)]$$

trong đó $g(x)$ là một hàm số bất kỳ.

Bài toán 2.16. Cho hàm số $\varphi(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Xác định tất cả các hàm số trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + f(-x) = \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.36)$$

Giải. Với $\forall x \in \mathbb{R}$, từ giả thiết ta có $f(x) + f(-x) = \varphi(x)$ là hàm số chẵn.

- Nếu $\varphi(x)$ không phải là hàm số chẵn thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\varphi(x)$ là hàm số chẵn thì ta có

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \varphi(-x)].$$

Từ giả thiết ta được

$$f(x) + f(-x) = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(-x)] \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2}\varphi(x) = -[f(-x) - \frac{1}{2}\varphi(-x)].$$

Đặt $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}\varphi(x)$ thì $g(x)$ là hàm số lẻ theo bài toán 2.3 thì $g(x) = \frac{1}{2}[h(x) - h(-x)]$. Do đó $f(x) - \frac{1}{2}\varphi(x) = \frac{1}{2}[h(x) - h(-x)]$.

Vậy

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}[h(x) - h(-x)]$$

trong đó $h(x)$ là một hàm số bất kỳ.

Nhận xét 2.11. Trong các bài toán 2.13 và 2.14 ta thay $\varphi(x)$ bởi những hàm số bất kỳ ta được một lớp các bài toán cụ thể các bài toán về hàm số chẵn, lẻ với cách giải tổng quát như trên.

Bài toán 2.17. Xác định tất cả các hàm số trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) = f(2-x) + x - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.37)$$

Giải. Với $\forall x \in \mathbb{R}$, từ giả thiết ta có

$$f(x+1) = f(-x+1) + x \Leftrightarrow f(x+1) - \frac{x}{2} = f(-x+1) + \frac{x}{2}.$$

Gọi $g(x) = f(x+1) - \frac{x}{2}$ thì $f(x) = g(x-1) + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ và $g(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$. Theo bài toán 2.1 thì $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}[h(x) + h(-x)]$. Suy ra

$$f(x) = \frac{1}{2}[h(x-1) + h(1-x)] + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

với $h(x)$ là hàm số bất kỳ.

Bài toán 2.18. Xác định tất cả các hàm số trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$2f(x) + f(1 - x) = x^2. \quad (2.38)$$

Nhận xét 2.12. Hai giá trị x và $1 - x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $x = \frac{1}{2}$

Giải. Thay x bởi $1 - x$ ta được $2f(1 - x) + 3f(x) = (1 - x)^2$. Kết hợp với giả thiết ta được hệ

$$\begin{cases} 2f(x) + f(1 - x) = x^2 \\ 2f(1 - x) + 3f(x) = (1 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4f(x) - 2f(1 - x) = -2x^2 \\ 2f(1 - x) + 3f(x) = (1 - x)^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 3f(x) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{3}.$$

Bài toán 2.19. Xác định tất cả các hàm số trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$2f(3 - x) + 3f(x - 1) = 2x - 1. \quad (2.39)$$

Nhận xét 2.13. Hai giá trị $3 - x$ và $x - 1$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $x = 1$

Giải. Thay x bởi $4 - x$ ta được $2f(x - 1) + 3f(3 - x) = 7 - 2x$. Kết hợp với giả thiết ta được hệ

$$\begin{cases} 2f(3 - x) + 3f(x - 1) = 2x - 1 \\ 2f(x - 1) + 3f(3 - x) = 7 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6f(3 - x) + 9f(x - 1) = 6x - 3 \\ 4f(x - 1) + 6f(3 - x) = 14 - 4x \end{cases}$$

$\Rightarrow 5f(x - 1) = 10x - 17 \Rightarrow 5f(x - 1) = 10(x - 1) - 7 \Leftrightarrow f(x - 1) = 2(x - 1) - \frac{7}{5}$,
 $\forall x \in \mathbb{R}$. Hay $f(t) = 2t - \frac{7}{5}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm $f(x) = 2x - \frac{7}{5}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy

$$f(x) = 2x - \frac{7}{5}.$$

Nhận xét 2.14. Bài toán trên là trường hợp hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn tại $x = 1$. Ta có thể mở rộng bài toán 2.11 thành bài toán tổng quát như sau.

Bài toán 2.20. Cho hàm số $\varphi(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Xác định tất cả các hàm số trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + f(a - x) = \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.40)$$

Bài toán 2.21. Cho các hàm số $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$ và $\omega(x) = \frac{2x - 5}{x - 2}$. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(\omega(x)) = f(x) + h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2. \quad (2.41)$$

Giải. Dễ thấy phương trình $\omega(x) = x$ không có nghiệm thực và $\omega(\omega(x)) = x$. Thay x bởi $\omega(x)$ vào phương trình (2.41) ta được

$$\omega(x) = -h(x). \quad (2.42)$$

Vậy điều kiện cần để (2.41) có nghiệm là điều kiện (2.42) được thỏa mãn. Giả sử điều kiện (2.42) được thỏa mãn. Khi đó $h(x) = \frac{1}{2}[h(x) - h(\omega(x))]$.

Ta chứng minh mọi hàm dạng

$$f(x) = \frac{1}{2}[g(\omega(x)) + g(x) - h(x)], \text{ với } g(x) \text{ tùy ý} \quad (2.43)$$

đều là nghiệm của phương trình (2.41). Thật vậy nếu $f(x)$ có dạng (2.43) thì

$$\begin{aligned} f(\omega(x)) &= \frac{1}{2}[g(x) + g(\omega(x)) - h(\omega(x))] = \frac{1}{2}[g(x) + g(\omega(x)) + h(x)] \\ &= \frac{1}{2}[g(x) + g(\omega(x)) - h(x) + 2h(x)] = f(x) + h(x). \end{aligned}$$

Ngược lại khi $f(x)$ thỏa mãn (2.41) thì chỉ cần chọn $g(x) = f(x)$, ta có ngay biểu diễn (2.43).

Chương 3

Phương trình hàm sinh bởi phép đổi hợp với hệ số biến thiên

3.1 Nghiệm riêng của phương trình hàm

Một trong những phương pháp giải phương trình hàm là xác định một nghiệm riêng của phương trình hàm đó. Từ các tính chất của nghiệm riêng ta suy ra nghiệm tổng quát của phương trình hàm cũng có những tính chất đó. Từ đó giúp ta có được hướng giải cho phương trình hàm đã cho. Thông thường ta tìm nghiệm riêng trong lớp các hàm số sơ cấp. Để xác định được một nghiệm riêng của một phương trình hàm nào đó ta thường căn cứ vào đặc trưng của các hàm số sơ cấp. Sau đây là một số đặc trưng của một số hàm số sơ cấp.

1. **Hàm số hằng** : $f(x) = f(y), \forall x, y \in D_f$, trong đó D_f là tập xác định của hàm số $f(x)$.
2. **Hàm bậc nhất** : $f(x) = ax + b, (a \neq 0, b \neq 0)$ có tính chất $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)], \forall x, y \in \mathbb{R}$.
3. **Hàm tuyến tính** : $f(x) = ax, (a \neq 0)$ có tính chất $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.
4. **Hàm mũ** : $f(x) = a^x, (a > 0, a \neq 1)$ có tính chất $f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.
5. **Hàm logarit** : $f(x) = \log_a x, (a > 0, a \neq 1, x > 0)$ có tính chất $f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y > 0$.

3.2 Nghiệm của phương trình thuần nhất

Việc giải những phương trình hàm tuyến tính và phân tuyến tính với hệ số biến thiên là một vấn đề rất phức tạp. Do đó ta chỉ khảo sát những dạng phương trình hàm tuyến tính và phân tuyến tính có dạng đặc biệt mà cách giải chúng được chuyển về phương trình hàm tuyến tính và phân tuyến tính với hệ số hằng. Sau đây ta xét một số ví dụ cụ thể.

Bài toán 3.1. Xác định tất cả các hàm số trên $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ thỏa mãn

$$(2x + 1)f(x) - (2x - 1)f(-x) = 0. \quad (3.1)$$

Giải. Đặt $g(x) = (2x + 1)f(x) \Rightarrow g(-x) = (-2x + 1)f(-x)$ ta thu được phương trình

$$g(x) + g(-x) = 0 \Leftrightarrow g(-x) = -g(x) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}[g(x) - g(-x)].$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} (2x + 1)f(x) &= \frac{1}{2}[(2x + 1)f(x) - (-2x + 1)f(-x)] \\ \Leftrightarrow f(x) &= \frac{1}{2}\left[f(x) - \frac{1 - 2x}{1 + 2x}f(-x)\right]. \end{aligned}$$

Ta chứng minh mọi hàm $f(x)$ có dạng $f(x) = \frac{1}{2}\left[h(x) - \frac{1 - 2x}{1 + 2x}h(-x)\right]$ đều thỏa mãn phương trình (3.1). Thật vậy, thay vào phương trình (3.1) ta được

$$\begin{aligned} (2x + 1) \cdot \frac{1}{2}\left[h(x) + \frac{2x - 1}{2x + 1}h(-x)\right] - \frac{2x - 1}{2}\left[h(-x) - \frac{2x + 1}{1 - 2x}h(x)\right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2x + 1}{2}h(x) + \frac{2x - 1}{2}h(-x) - \frac{2x - 1}{2}h(-x) + \frac{2x + 1}{2}h(x) &= 0 \Leftrightarrow 0 = 0. \end{aligned}$$

Đẳng thức luôn đúng.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[h(x) - \frac{1 - 2x}{1 + 2x}h(-x)\right]$$

trong đó $h(x)$ là một hàm số tùy ý.

Bài toán 3.2. Xác định tất cả các hàm số trên $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ thỏa mãn

$$(3x - 1)f(x) + (3x + 1)f(-x) = 0. \quad (3.2)$$

Giải. Đặt $g(x) = (3x - 1)f(x) \Rightarrow g(-x) = -(3x + 1)f(-x)$ ta thu được phương trình

$$g(-x) = -g(x) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}[g(x) + g(-x)].$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned}(3x - 1)f(x) &= \frac{1}{2}[(3x - 1)f(x) + (-3x - 1)f(-x)] \\ \Leftrightarrow f(x) &= \frac{1}{2}\left[f(x) - \frac{3x + 1}{3x - 1}f(-x)\right].\end{aligned}$$

Ta chứng minh mọi hàm $f(x)$ có dạng $f(x) = \frac{1}{2}\left[h(x) - \frac{3x + 1}{3x - 1}h(-x)\right]$ đều thỏa mãn phương trình (3.2). Thật vậy, thay vào phương trình (3.2) ta được

$$(3x - 1) \cdot \frac{1}{2}\left[h(x) - \frac{3x + 1}{3x - 1}h(-x)\right] + (3x + 1) \cdot \frac{1}{2}\left[h(-x) - \frac{-3x + 1}{-3x - 1}h(x)\right] \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Dạng thức luôn đúng. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[h(x) - \frac{3x + 1}{3x - 1}h(-x)\right]$$

trong đó $h(x)$ là một hàm số tùy ý.

Bài toán 3.3. Xác định tất cả các hàm số trên $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ thỏa mãn

$$(2x + 1)f(x) + (2x - 3)f(1 - x) = 0 \quad (3.3)$$

Giải. Đặt $g(x) = (2x + 1)f(x) \Rightarrow g(1 - x) = (3 - 2x)f(1 - x)$ ta thu được phương trình

$$g(x) = g(1 - x) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}[g(x) + g(1 - x)].$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned}(2x + 1)f(x) &= \frac{1}{2}[(2x + 1)f(x) + (3 - 2x)f(1 - x)] \\ \Leftrightarrow f(x) &= \frac{1}{2}\left[f(x) - \frac{3 - 2x}{2x + 1}f(1 - x)\right].\end{aligned}$$

Ta chứng minh mọi hàm $f(x)$ có dạng

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[h(x) - \frac{3 - 2x}{2x + 1}h(1 - x)\right]$$

đều thỏa mãn phương trình (3.2). Thật vậy, thay vào phương trình (3.2) ta thấy thỏa mãn. Trong trường hợp $x = -\frac{1}{2}$ thì ta có $-4f(-\frac{3}{2}) = 0$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[h(x) - \frac{3 - 2x}{2x + 1}h(1 - x)\right]$$

trong đó $h(x)$ là một hàm số tùy ý.

3.3 Nghiệm của phương trình không thuần nhất

Bài toán 3.4. Xác định tất cả các hàm số trên $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}\}$ thỏa mãn

$$2f(1-x) + 1 = xf(x) \quad (3.4)$$

Giải. Thay x bởi $1-x$ ta được $2f(x) + 1 = (1-x)f(1-x)$. Kết hợp với giả thiết ta

được hệ
$$\begin{cases} 2f(1-x) + 1 = xf(x) \\ 2f(x) + 1 = (1-x)f(1-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-x)f(1-x) + (1-x) = x(1-x)f(x) \\ 4f(x) + 2 = 2(1-x)f(1-x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow [4 - x(1-x)]f(x) = x - 3 \Rightarrow f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-4}, \forall x \neq \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Thử lại thấy hàm $f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-4}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-4}.$$

Bài toán 3.5. Xác định tất cả các hàm số trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$2f(x) + 3xf(-x) = 2 + 3x. \quad (3.5)$$

Giải. Thay x bởi $-x$ ta được $2f(-x) + 3f(x) = 2 - 3x$. Kết hợp với giả thiết ta được

hệ
$$\begin{cases} 2f(x) + 3xf(-x) = 2 + 3x \\ 2f(-x) + 3f(x) = 2 - 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) + 6xf(-x) = 4 + 6x \\ 6xf(-x) + 9x^2f(x) = 6x - 9x^2 \end{cases} \Rightarrow (4 + 9x^2)f(x) = 4 + 9x^2 \Rightarrow f(x) = 1,$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm $f(x) = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy

$$f(x) = 1$$

.

Nhận xét 3.1. Với cách giải như trên ta có thể giải bài toán tổng quát sau: Xác định tất cả các hàm số thỏa mãn

$$\varphi(x)f(x) + \psi(x)f(a-x) = \omega(x) \quad (3.6)$$

Bài toán 3.6. Xác định tất cả các hàm số trên $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-27 \pm \sqrt{1017}}{-18}\}$ thỏa mãn

$$2f(x+1) + 3xf(2-x) = 1 + 2x. \quad (3.7)$$

Giải. Thay x bởi $1-x$ ta được $2f(2-x) + 3xf(x+1) = 3-x$. Kết hợp với giả thiết ta được hệ $\begin{cases} 2f(x+1) + 3f(2-x) = 1+2x \\ 2f(2-x) + 3(1-x)f(x+1) = 3-x \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x+1) + 6xf(2-x) = 2+4x \\ 6xf(2-x) + 9x(1-x)f(x+1) = 3x(3-x) \end{cases}$
 $\Rightarrow (9x+9x^2-4)f(x+1) = 5x-3x^2-2 \Rightarrow f(x+1) = \frac{5x-3x^2-2}{9x+9x^2-4}$
 $\Rightarrow f(x+1) = \frac{3(x+1)^2+11(x+1)-10}{-9(x+1)^2+27(x+1)+8}$ hay $f(x) = \frac{-3x^2+11x-10}{-9x^2+27x+8}$,
 $\forall x \neq \frac{-27 \pm \sqrt{1017}}{-18}$. Thử lại thấy hàm $f(x) = \frac{-3x^2+11x-10}{-9x^2+27x+8}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy

$$f(x) = \frac{-3x^2+11x-10}{-9x^2+27x+8}$$

.

Nhận xét 3.2. Với ý tưởng như trên ta có thể giải bài toán tổng quát như sau:

$$\varphi(x)f(x-a) + \psi(x)f(b-x) = \omega(x). \quad (3.8)$$

Nhận xét 3.3. Trong một số trường hợp ta gặp hàm $\omega(x)$ thỏa mãn tính chất

$$\underbrace{\omega(\omega(\cdots(\omega(x))))}_n = x$$

thì để cách trình bày đỡ cồng kềnh ta thường xét dãy số $x_1 = x; x_{n+1} = \omega(x_n)$

Bài toán 3.7. Tìm các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1, \forall x \neq -1 \quad (3.9)$$

Giải. Với $\forall x \neq -1$, xét dãy $x_1 = x; x_{n+1} = \omega(x_n)$, trong đó $\omega(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Ta có $x_1 = x; x_2 = \frac{x-1}{x+1}; x_3 = -\frac{1}{x}; x_4 = \frac{x+1}{1-x}; x_5 = x$. Suy ra dãy $\{x_n\}$ tuần hoàn với chu kỳ 4. Thay x lần lượt bởi x_1, x_2, x_3, x_4 vào phương trình (3.9) ta được

$$\begin{cases} x_1 f(x_1) + 2f(x_2) = 1 \\ x_2 f(x_2) + 2f(x_3) = 1 \\ x_3 f(x_3) + 2f(x_4) = 1 \\ x_4 f(x_4) + 2f(x_1) = 1 \end{cases}$$

Giải hệ trên với ẩn $f(x_1)$ ta được

$$f(x_1) = \frac{4x_1^2 - x_1 + 1}{5x_1(x_1 - 1)}, x \neq -1, 0, 1$$

Cho $x = 0$ từ (3.9) suy ra $2f(-1) = 1 \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{2}$.

Cho $x = 1$ từ (3.9) ta được $f(1) + 2f(0) = 1$. Suy ra

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - x + 1}{5x(x - 1)} & \text{nếu } x \neq 0, 1, -1 \\ \frac{1}{2} & \text{nếu } x = -1 \\ a & \text{nếu } x = 0 \\ 1 - 2a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$$

($a = f(0)$). Thử lại ta thấy hàm số vừa tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét 3.4. Trong một số trường hợp ta gặp phương trình hàm dạng

$$a(x)f(h(x)) + b(x)f(g(x)) = c(x)$$

Trong đó $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $h(x)$, $g(x)$ là những hàm số đã biết ta đặt $t = h(x)$ ($t = g(x)$) nếu phương trình này cho biểu thức nghiệm đơn giản chẳng hạn $x = d(t)$ (hoặc kĩ thuật biến đổi nào đó) ta cố gắng đưa phương trình trên về dạng quen thuộc

$$a_1(t)f(t) + b_1(t)g_1(t) = c_1(t)$$

Bằng cách xét dãy như trên trong đó $g_1(t)$ đóng vai trò là $g(x)$, nếu dãy nhận được tuần hoàn, áp dụng phương pháp trình bày ở trên ta sẽ tìm được hàm $f(x)$.

Chương 4

Một số áp dụng

Mỗi dãy số u_n với số hạng tổng quát $u_n = f(n)$ tương ứng với một hàm số $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Do đó bài toán xác định số hạng tổng quát của dãy số về bản chất chính là bài toán phương trình hàm trên tập số tự nhiên. Sau đây ta xét một số áp dụng cụ thể của phương trình hàm trong các bài toán về dãy số.

4.1 Xác định dãy cấp số đặc biệt

Định nghĩa 4.1. Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là một dãy số tuần hoàn (cộng tính) nếu tồn tại số nguyên dương l sao cho $u_{n+l} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Số nguyên dương l nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện trên được gọi là chu kỳ cơ sở của dãy.

Nhận xét 4.1. Dãy số tuần hoàn chu kỳ 1 khi và chỉ khi dãy đó là một dãy hằng.

Định nghĩa 4.2. Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là một dãy số tuần hoàn nhân tính nếu tồn tại số nguyên dương s sao cho $u_{sn} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Số nguyên dương s nhỏ nhất được gọi là chu kỳ cơ sở của dãy.

Bài toán 4.1. Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ tuần hoàn (cộng tính) chu kỳ 2 khi và chỉ khi dãy có dạng

$$u_n = \frac{1}{2}[\alpha + \beta + (\alpha - \beta)^n], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Giải. Giả sử $u_0 = \beta, u_1 = \alpha$ và $u_{n+2} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó ta thấy ngay (bằng quy nạp toán học) dãy $\{u_n\}$ có dạng (4.1). Ngược lại mọi dãy số có dạng (4.1) đều là dãy số tuần hoàn chu kỳ 2.

Bài toán 4.2. Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ tuần hoàn nhân tính chu kì 2 khi và chỉ khi dãy có dạng

$$u_n = \begin{cases} C & \text{với } C \text{ là hằng số bất kì.} \\ u_{2k+1} & \text{với } n = 2^m(2k+1), m \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Giải. Chứng minh được suy trực tiếp từ hệ thức truy hồi.

Định nghĩa 4.3. Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là một dãy số phản tuần hoàn (cộng tính) nếu tồn tại số nguyên dương l sao cho $u_{n+l} = -u_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Số nguyên dương l nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện trên được gọi là chu kì cơ sở của dãy.

Định nghĩa 4.4. Dãy số $\{u_n\}$ được gọi là một dãy số phản tuần hoàn nhân tính nếu tồn tại số nguyên dương s sao cho $u_{sn} = -u_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Số nguyên dương s nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện trên được gọi là chu kì cơ sở của dãy.

4.1.1 Cấp số cộng

Bài toán 4.3. Xác định số hạng tổng quát của một cấp số cộng

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + d \\ x_1 = a \end{cases}$$

Nhận xét 4.2. Đây là một bài toán cơ bản trong chương trình phổ thông. Nếu nhìn theo hướng phương trình hàm thì bài toán trở thành bài toán sau: Xác định hàm số trên $\mathbb{N}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(n+1) = f(n) + d \\ f(1) = a \end{cases}$$

Giải. Đặt $f(n) = d.n + g(n)$ ta được $d(n+1) + g(n+1) = d.n + g(n) + d \Leftrightarrow g(n+1) = g(n)$. Suy ra $g(n)$ là một hàm số tuần hoàn trên $\mathbb{N}$. Do đó $g(n)$ là hàm hằng. Kết hợp với giả thiết ta được $g(n) = a$. Vậy số hạng tổng quát của cấp số cộng đã cho là

$$x_{n+1} = a + n.d.$$

Nhận xét 4.3. Ta có thể tổng quát bài toán trong ví dụ trên thành bài toán sau: Xác định số hạng tổng quát của tất cả các cấp số cộng có công sai d . Thực chất vấn đề chính là xác định tất cả các hàm số trên $\mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình

$$f(n+1) = f(n) + d$$

4.1.2 Cấp số nhân

Bài toán 4.4. Xác định số hạng tổng quát của một cấp số nhân

$$\begin{cases} x_{n+1} = q \cdot x_n \\ x_1 = a \end{cases}$$

Nhận xét 4.4. Đây là một bài toán cơ bản trong chương trình phổ thông. Nếu nhìn theo hướng phương trình hàm thì bài toán trở thành bài toán sau:

Xác định hàm số trên $\mathbb{N}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f(n+1) = qf(n) \\ f(1) = a \end{cases}$$

Giải. Đặt $f(n) = q^n \cdot g(n)$ ta được $q^{n+1}g(n+1) = q \cdot q^n \cdot g(n) \Leftrightarrow g(n+1) = g(n)$. Suy ra $g(n)$ là một hàm số tuần hoàn trên $\mathbb{N}$. Do đó $g(n)$ là hàm hằng. Kết hợp với giả thiết ta được $g(n) = a$. Vậy số hạng tổng quát của cấp số nhân đã cho là

$$x_{n+1} = a \cdot q^n.$$

4.1.3 Cấp số tổng quát

Nhận xét 4.5. Xét bài toán phương trình hàm: Xác định các hàm số thỏa mãn $f(\alpha x + \beta) = af(x) + b$. Đây là bài toán phương trình hàm đã được giải quyết trong tất cả các trường hợp của các số α, β, a, b . Dựa trên ý tưởng giải phương trình hàm này cho ta một phương pháp xác định số hạng tổng quát của một dãy số tuyến tính bất kì. Sau đây ta sẽ minh họa điều này qua một số ví dụ cụ thể.

Bài toán 4.5. Xác định dãy số x_n thỏa mãn: $x_{n+1} = 2x_n + 1$.

Nhận xét 4.6. Nhìn theo hướng phương trình hàm thì đây là bài toán xác định hàm số trên $\mathbb{N}$ thỏa mãn $f(n+1) = 2f(n) + 1$. Do đó ta có lời giải như sau

Giải. Đặt $x_n = -1 + y_n$ ta được $y_{n+1} = 2 \cdot y_n$. Tiếp tục đặt $y_n = 2^n \cdot z_n$ thì $z_{n+1} = z_n$. Suy ra z_n là một dãy tuần hoàn trên $\mathbb{N}$. Do đó z_n là dãy hằng tức là $z_n = C$. Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là

$$x_{n+1} = -1 + C \cdot 2^n.$$

Bài toán 4.6. Xác định dãy số x_n thỏa mãn: $x_{2n} = 3x_n - 2$.

Nhận xét 4.7. Nếu vận dụng các kiến thức về sai phân để giải phương trình này thì rất khó khăn bởi vì đây chính là phương trình sai phân cấp n . Nhưng nếu ta nhìn bài toán theo hướng phương trình hàm thì bài toán hoàn toàn có thể giải được một cách thuận lợi. Thật vậy đây chính là bài toán xác định hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{N}$ thỏa mãn $f(2n) = 3f(n) - 2$. Theo hướng giải quyết này ta có lời giải bài toán này như sau:

Giải. Đặt $x_n = 1 + y_n$ ta được $y_{n+1} = 3.y_n$. Tiếp tục đặt $y_n = n^{\log_2 3} v_n$ thì $v_{2n} = v_n$. Vậy dãy số cần tìm có dạng $x_0 = 1 ; x_n = 1 + n^{\log_2 3} v_n$. Trong đó v_n là dãy số thỏa mãn $v_{2n} = v_n$. Tiếp theo ta đi xác định dãy v_n . Đặt $n = 2^m$ với $m \in \mathbb{N}$ ta được $v_{m+1} = v_m$ suy ra dãy v_m là dãy số tuần hoàn chu kì 1 suy ra dãy v_m là dãy hằng. Vậy dãy số cần tìm là

$$x_0 = 1 ; x_n = 1 + n^{\log_2 3} C$$

trong đó C là hằng số bất kì.

Bài toán 4.7. Xác định dãy số x_n thỏa mãn:

$$x_{2n+1} = -3x_n + 4. \quad (4.3)$$

Nhận xét 4.8. với ý tưởng tương tự bài toán trên ta có lời giải bài toán như sau

Giải. Đặt $n + 1 = m, m = 1, 2, \dots$. Khi đó có thể viết (4.3) dưới dạng

$$x_{2m-1} = -3x_{m-1} + 4, \forall m \in \mathbb{N}^* \quad (4.4)$$

hay

$$u_{2m} = -3u_m + 4, \forall m \in \mathbb{N}^* \quad (4.5)$$

với $u_m = x_{m-1}$. Đặt $v_m = 1 + u_m$. Khi đó (4.5) có dạng

$$v_{2m} = -3v_m, \forall m \in \mathbb{N}^* \quad (4.6)$$

Đặt $v_m = m^{\log_2 3} y_m$ thì (4.6) có dạng $y_{2m} = -y_m, \forall m \in \mathbb{N}^*$. Suy ra dãy $\{y_m\}$ là một dãy phản tuần hoàn nhân tính chu kì 2. Khi đó, ta có

$$y_n = \begin{cases} C & \text{với } C \text{ là hằng số tùy ý.} \\ -y_{2k+1} & \text{với } n \text{ có dạng } 2^{2m+1}(2k+1), m, k \in \mathbb{N}. \\ y_{2k+1} & \text{với } n \text{ có dạng } 2^{2m}(2k+1), m \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $x_m = u_{m+1} = 1 + (m+1)^{\log_2 3} y_{m+1}$ với

$$y_n = \begin{cases} C & \text{với } C \text{ là hằng số tùy ý.} \\ -y_{2k+1} & \text{với } n \text{ có dạng } 2^{2m+1}(2k+1), m, k \in \mathbb{N}. \\ y_{2k+1} & \text{với } n \text{ có dạng } 2^{2m}(2k+1), m \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nhận xét 4.9. Với tư tưởng trên ta có thể xác định được tất cả các dãy số dạng

$$x_{\alpha n + \beta} = \gamma x_n + \delta$$

4.2 Xác định một số dãy số phân tuyến tính

Bài toán 4.8. Xác định dãy số x_n thỏa mãn:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n + 2}; x_1 = a > 0.$$

Giải. Ta thấy $x_n > 0$ với $\forall n \in \mathbb{N}$. Đặt $\frac{1}{x_n} = y_n$ ta được $y_{n+1} = 2y_n + 1$. Đặt $y_n = -1 + u_n$ ta được $-1 + u_{n+1} = 2(-1 + u_n) + 1 \Leftrightarrow u_{n+1} = 2u_n$. Tiếp tục đặt $u_n = 2^n \cdot w_n$ thì phương trình trên trở thành $w_{n+1} = w_n$ suy ra dãy w_n là dãy số tuần hoàn chu kỳ 1 do đó dãy w_n là dãy số hằng. Kết hợp với điều kiện ban đầu $x_1 = a$ nên ta được $w_n = \frac{a+1}{2a}$. Suy ra $u_n = \frac{2^{n+1}(a+1)}{a} \Rightarrow y_n = -1 + \frac{2^{n+1}(a+1)}{a} \Rightarrow x_n = \frac{a}{(a+1)2^{n+1} - a}$. Vậy dãy số cần tìm là

$$x_n = \frac{a}{(a+1)2^{n+1} - a}.$$

Bài toán 4.9. Xác định số hạng tổng quát của dãy số x_n thỏa mãn:

$$x_1 = 1; x_n = \frac{2x_{n-1}}{3x_{n-1} + 4}, \forall n \geq 2.$$

Giải. Ta có $\frac{1}{x_n} = \frac{3x_{n-1} + 4}{2x_{n-1}} = \frac{3}{2} + 2\frac{1}{x_{n-1}}$. Đặt $y_n = \frac{1}{x_n}$, ta có $\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_n = 2x_{n-1} + \frac{3}{2} \end{cases}$
 $\Rightarrow y_n = \frac{5 \cdot 2^{n-1} - 3}{2} \Rightarrow x_n = \frac{2}{5 \cdot 2^{n-1} - 3}$.

Vậy dãy số cần tìm là

$$x_n = \frac{2}{5 \cdot 2^{n-1} - 3}.$$

Bài toán 4.10. Xác định số hạng tổng quát của dãy số x_n thỏa mãn:

$$x_0 = 2; x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 2}; \forall n \geq 1.$$

Giải. Ta có $x_{n+1} - 1 = \frac{x_n - 1}{x_n + 2} \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1} - 1} = 1 + \frac{3}{x_n - 1}$. Đặt $y_n = \frac{1}{x_n - 1} \Rightarrow y_0 = 1$ và $y_{n+1} = 3y_n + 1 \Rightarrow y_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2} \Rightarrow x_n = 1 + \frac{2}{3^{n+1} - 1}$.

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là

$$x_n = 1 + \frac{2}{3^{n+1} - 1}.$$

Bài toán 4.11. Xác định số hạng tổng quát của dãy số x_n thỏa mãn:

$$x_1 = 2 ; x_{n+1} = \frac{-9x_{n-1} - 24}{5x_{n-1} + 13}, \forall n \geq 2.$$

Nhận xét 4.10. Bài toán này không còn đơn giản như bài toán trong ví dụ 4.9 và 4.10 vì ở trên tử số còn hệ số tự do, do đó ta tìm cách đưa ví dụ này về dạng giống như bài toán trong ví dụ 4.8. Muốn vậy ta sử dụng một phép tịnh tiến phù hợp.

Giải. Đặt $x_n = y_n + t$. Thay vào hệ thức truy hồi ta được $y_n + t = \frac{-9x_{n-1} - 9t - 24}{5x_{n-1} + 5t + 13} \Leftrightarrow y_n = \frac{(-9 - 5t)x_{n-1} - 5t^2 - 22t - 24}{5x_{n-1} + 5t + 13}$. Ta chọn t thỏa mãn: $5t^2 + 22t + 24 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow y_1 = 4 \Rightarrow y_n = \frac{y_{n-1}}{5y_{n-1} + 3} \Rightarrow \frac{1}{y_n} = 5 + \frac{3}{y_{n-1}} \Rightarrow \frac{1}{y_n} = \frac{11 \cdot 3^{n-1} - 10}{4} \Rightarrow y_n = \frac{4}{11 \cdot 3^{n-1} - 10} \Rightarrow x_n = y_n - 2 = \frac{-22 \cdot 3^{n-1} + 24}{11 \cdot 3^{n-1} - 10}$. Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là

$$x_n = \frac{-22 \cdot 3^{n-1} + 24}{11 \cdot 3^{n-1} - 10}.$$

Nhận xét 4.11. Với ý tưởng như trên ta có thể giải được bài toán tổng quát như sau:

Cho dãy x_n thỏa mãn: $x_1 = \alpha$ và $x_{n+1} = \frac{px_{n-1} + q}{rx_{n-1} + s}, \forall n \geq 2$.

Giải. Đặt $x_n = y_n + t$. Thay vào hệ thức truy hồi của dãy ta được $x_{n+1} = \frac{px_{n-1} + pt + q}{rx_{n-1} + rt + s} \Leftrightarrow y_n = \frac{(p - rt)x_{n-1} - rt^2 + (p - s)t + q}{rx_{n-1} + rt + s}$. Ta chọn t thỏa mãn: $rt^2 + (s - p)t + q = 0$.

Khi đó ta chuyển về dạng $\frac{1}{y_n} = a \frac{1}{x_{n-1}}$. Từ đây ta tìm được $\frac{1}{y_n}$, suy ra x_n .

4.3 Phương trình hàm trên tập số tự nhiên

Thông thường để xác định số hạng tổng quát của một dãy số ta thường sử dụng các kiến thức về sai phân. Tuy nhiên trong một số trường hợp nếu vận dụng sai phân

để giải bài toán xác định số hạng tổng quát của dãy số thì bài toán trở nên rất cồng kềnh và khó giải. Khi đó ta có thể sử dụng các kiến thức về phương trình hàm để giải bài toán vì mỗi hàm số $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ được tương ứng với một dãy số $\{x_n\}$ với số hạng tổng quát $x_n = f(n)$ nên nhiều bài toán xác định số hạng tổng quát của dãy số được đưa về giải bài toán về phương trình hàm trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}$

Bài toán 4.12. Xác định số hạng tổng quát của dãy số x_n thỏa mãn:

$$x_{\alpha n + \beta} = ax_n + b. \quad (4.7)$$

Với $\forall \alpha, \beta, n \in \mathbb{N}, a \neq 1, a, b \neq 0$ và $\frac{\beta}{1-\alpha}$.

Nhận xét 4.12. Bản chất của bài toán là tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(\alpha n + \beta) = af(n) + b, \forall \alpha, \beta, n \in \mathbb{N}, a \neq 1, a, b \neq 0 \text{ và } \frac{\beta}{1-\alpha} \in \mathbb{Z}.$$

Do đó sử dụng các kỹ thuật giải phương trình hàm ta có lời giải cho bài toán này như sau

Giải. Đặt $x_n = y_n + \frac{b}{1-a}$. Khi đó (4.7) có dạng $y_{\alpha n + \beta} = ay_n$. Đặt $y_{\frac{\beta}{1-\alpha} + m} = z_m$ ta được

$$z_{\alpha m} = az_m. \quad (4.8)$$

Đặt $z_m = m^{\log_{\alpha} a} \cdot v_m$ thì (4.8) có dạng $v_{m\alpha} = v_m$. Vì $\forall m \in \mathbb{N}$ ta có thể viết $m = \alpha^s \cdot k$ với $(k, s) = 1, s \in \mathbb{N}$ nên $v_{m\alpha} = v_m \Leftrightarrow v_{\alpha^{s+1}k} = v_{\alpha^s k}$. Đặt $t_s = v_{\alpha^s k}$ ta được $t_{s+1} = t_s$. Suy ra dãy t_s là dãy số hằng. Vậy khi $m + \frac{\beta}{1-\alpha} = \alpha^s \cdot k$, với $(k, s) = 1$ thì

$$x_n = \frac{b}{1-a} + \left(n - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{\log_{\alpha} a} \cdot t_s$$

trong đó $t_s \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Bài toán 4.13. Xác định số hạng tổng quát của dãy số x_n thỏa mãn:

$$x_{\frac{m+n}{2}} = \frac{x_m + x_n}{2}, \quad \forall m, n, \frac{m+n}{2} \in \mathbb{N}^*. \quad (4.9)$$

,

Giải. Đặt $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ ta có $x_2 = x_{\frac{3+1}{2}} = \frac{x_3 + x_1}{2}$. Suy ra $x_3 = 2x_2 - x_1 = 2\beta - \alpha$. Tiếp tục quá trình như vậy, ta được $x_3 = x_{\frac{4+2}{2}} = \frac{x_4 + x_2}{2}$. Suy ra $x_4 = 2x_3 - x_2 = 2(2\beta - \alpha) - \beta = 3\beta - 2\alpha$. Bằng phương pháp quy nạp, ta thu được $x_n = (n-1)\beta - (n-2)\alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy

$$\begin{cases} x_n = (\beta - \alpha)n + 2\alpha - \beta \\ x_1 = \alpha, x_2 = \beta \end{cases}$$

Đặt $\beta - \alpha = a$, $2\alpha - \beta = b$ thì số hạng tổng quát của dãy số đã cho là

$$x_n = an + b.$$

Với a, b tùy ý.

Bài toán 4.14. Xác định số hạng tổng quát của dãy số x_n thỏa mãn:

$$x_{\frac{m+n}{2}} = \frac{2x_m x_n}{x_m + x_n}, \quad \forall m, n, \frac{m+n}{2} \in \mathbb{N}^* \quad (4.10)$$

Giải. Ta có $x_{\frac{m+n}{2}} = \frac{2x_m x_n}{x_m + x_n} \Leftrightarrow x_{\frac{m+n}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{x_m} + \frac{1}{x_n}}$. Đặt $\frac{1}{x_n} = y_n$, thì phương trình đã cho tương đương với $y_{\frac{m+n}{2}} = \frac{y_m + y_n}{2}$. Theo bài toán 4.13 thì $y_n = an + b$ với $a, b \geq 0$, $a + b > 0$. Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là

$$x_n = \frac{1}{an + b}.$$

Trong đó $a, b \geq 0, a + b > 0$.

Bài toán 4.15. Xác định số hạng tổng quát của dãy số x_n thỏa mãn:

$$x_{\frac{m+n}{2}} = \sqrt{x_m x_n}, \quad \forall m, n, \frac{m+n}{2} \in \mathbb{N}^*. \quad (4.11)$$

Giải. Ta có $x_n = x_{\frac{n+n}{2}} = \sqrt{x_n x_n} = \sqrt{[x_n]^2} \geq 0$. Đặt $x_1 = \alpha, x_2 = \beta, (\alpha > 0, \beta > 0)$.

a, Nếu $\alpha = 0$, thì $x_n = x_{\frac{1+2n-1}{2}} = \sqrt{x_1 x_{2n-1}} = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy $x_n \equiv 0$ là nghiệm duy nhất của (4.11)

b, Nếu $\alpha > 0$ và $\beta = 0$ thì $x_n = x_{\frac{2+2n-2}{2}} = \sqrt{x_2 x_{2n-2}} = 0, \forall n \geq 2$. Suy ra

$$x_n = \begin{cases} \alpha & \text{nếu } n = 1 \\ 0 & \text{nếu } n \geq 2 \end{cases}$$

là dãy số cần tìm.

c, Nếu $\alpha > 0$ và $\beta > 0$. Giả sử tồn tại $n_0 \geq 3$ sao cho $x_{n_0} = 0$. Thế thì $x_{n_0-1} = x_{\frac{n_0+n_0-2}{2}} = \sqrt{x_{n_0}x_{n_0-2}} = 0$. Chọn $n_0 = 3$ thì $x_{n_0-1} = x_2 = 0$, hay $\beta = 0$, mâu thuẫn. Do đó có thể giả thiết rằng $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có $x_2 = x_{\frac{3+1}{2}} = \sqrt{x_3x_1} \Rightarrow x_3 = \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{\beta^2}{\alpha}$. Mặt khác $x_3 = x_{\frac{4+2}{2}} = \sqrt{x_4x_2}$. Suy ra $x_4 = \frac{x_3^2}{x_2} = \frac{\beta^3}{\alpha^2}$. Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được rằng

$$x_n = \frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-2}}, \forall n \geq 3.$$

Ta có

$$\frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-2}} = \left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha^n}\right)$$

Đặt $\frac{\alpha^2}{\beta} = a, \frac{\beta}{\alpha} = b$ thì $x_n = a.b^n$ với $a > 0, b > 0$. Vậy dãy số cần tìm là

$$x_n = \begin{cases} \alpha & \text{nếu } n = 1 \\ 0 & \text{nếu } n \geq 2 \end{cases}, (\alpha \geq 0).$$

Hoặc $x_n = a.b^n$ với $a > 0, b > 0$.

Bài toán 4.16. Xác định số hạng tổng quát của dãy số x_n thỏa mãn:

$$x_{\frac{m+n}{2}} = \sqrt{\frac{x_m^2 + x_n^2}{2}}, \quad \forall m, n, \frac{m+n}{2} \in \mathbb{N}^* \quad (4.12)$$

,

Giải. Ta có $x_{\frac{m+n}{2}} = x_{\frac{n+n}{2}} = \sqrt{\frac{x_n^2 + x_n^2}{2}} = \sqrt{x_n^2} = |x_n| \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $x_1 = \alpha \geq 0$, $x_2 = \beta \geq 0$. Ta có $x_2 = x_{\frac{3+1}{2}} = \sqrt{\frac{x_3^2 + x_1^2}{2}}$. Suy ra

$$x_3^2 = 2x_2^2 - x_1^2 = 2\beta^2 - \alpha^2$$

nên $x_3 = \sqrt{2\beta^2 - \alpha^2}$, ($\alpha \leq \beta\sqrt{2}$). Tương tự $x_3 = x_{\frac{4+2}{2}} = \sqrt{\frac{x_4^2 + x_2^2}{2}}$. Suy ra $x_4^2 = 2x_3^2 - x_2^2 = 2(2\beta^2 - \alpha^2) - \beta^2 = 3\beta^2 - 2\alpha^2$. Do đó $x_4 = \sqrt{3\beta^2 - 2\alpha^2}$, ($\alpha \leq \beta\sqrt{\frac{3}{2}}$). Bằng quy nạp toán học ta chứng minh được hệ thức

$$x_n = \sqrt{(n-1)\beta^2 - (n-2)\alpha^2} = \sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)n + 2\alpha^2 - \beta^2}, \forall n \geq 3.$$

Đặt $\beta^2 - \alpha^2 = a, 2\alpha^2 - \beta^2 = b$ thì ta được $x_n = \sqrt{an + b}, a \geq 0, a + b \geq 0$. Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là

$$x_n = \sqrt{an + b}, a \geq 0, a + b \geq 0.$$

Bài toán 4.17. Xác định số hạng tổng quát của dãy số x_n thỏa mãn:

$$x_{m+n} + x_{n-m} = x_{3n} \quad (4.13)$$

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ và $n \geq m$.

Giải.

+ Với $m = 0$ ta có $2x_n = 3x_{3n}$

+ Với $m = n = 0$ ta được $2x_0 = x_0 \Rightarrow x_0 = 0$.

+ Với $m = n$ ta được $x_{2n} = x_{3n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (a)

Từ (a) suy ra $x_{4m} = x_{6m} = x_{2.3m} = x_{3.2m} = x_{9m}, \forall m \in \mathbb{N}^*$. Mặt khác thay $n = 3m$ vào (4.11) ta được $x_{4m} + x_{2m} = x_{9m} \Rightarrow x_{2m} = 0, \forall m \in \mathbb{N}^*$. Cuối cùng với $\forall m \in \mathbb{N}^*$ ta có $x_m = \frac{1}{2}x_{3m} = \frac{1}{2}x_{2m} = 0$. Dễ thấy $x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 4.18. Xác định số hạng tổng quát của dãy số x_n thỏa mãn:

$$x_1 = 1, x_{m+n} + x_{m-n} = \frac{1}{2}[x_{2n} + x_{2m}], \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n. \quad (4.14)$$

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ và $n \geq m$.

Giải. Cho $m = n = 0$ ta được $x_0 = 0$. Cho $m = 1, n = 0$ thì $x_1 + x_1 = \frac{1}{2}[x_2 + x_0]$. Suy ra $x_2 = 4 = 2^2$. Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n = n^2$. Thật vậy, do $x_k + x_k = \frac{1}{2}[x_{2k} + x_0]$ nên ta có ngay $x_{2k} = 4k^2$. Tương tự, do $x_{k+1} + x_{k-1} = \frac{1}{2}[x_{2k} + x_2]$ nên ta có $x_{k+1} = \frac{1}{2}.x_{2k} + 2 - x_{k-1} = (k+1)^2$. Vậy số hạng tổng quát của dãy số cần tìm là

$$x_n = n^2.$$

Kết luận

Từ những vấn đề đã trình bày có thể rút ra một số kết luận như sau:

Phương trình hàm là một trong những chủ đề toán học khó trong chương trình Toán trung học phổ thông, đồng thời các dạng toán về phương trình hàm cũng rất đa dạng. Tuy nhiên trong khuôn khổ của luận văn này chỉ nghiên cứu về một mảng nhỏ trong các dạng toán về phương trình hàm. Luận văn đã hệ thống được một số dạng toán về phương trình hàm liên quan đến các phép biến đổi tuyến tính và phân tuyến tính có tính chất đối hợp. Qua luận văn cũng cho thấy được mối quan hệ giữa phương trình hàm với các phép biến hình trong mặt phẳng thực và mặt phẳng phức đặc biệt là phép quay.

Luận văn còn làm rõ mối quan hệ giữa phương trình hàm và dãy số từ đó cho ta thêm một phương pháp để giải quyết khá hiệu quả các bài toán xác định cấp số và một số dãy số đặc biệt.

Những kết quả thu được từ luận văn giúp cho ta có được một cách hệ thống các phương pháp giải bài toán phương trình hàm sinh bởi phép quay, đồng thời đưa ra một số phương pháp để thiết lập các bài toán phương trình hàm xuất phát từ những trường hợp cụ thể.

Hy vọng luận văn có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho giáo viên trong các trường trung học phổ thông trong việc giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Mậu, 1997, *Phương trình hàm*, NXB Giáo Dục
- [2] Nguyễn Văn Mậu, 2006, *Các bài toán nội suy và áp dụng*. NXB Giáo Dục.
- [3] Nguyễn Văn Mậu, 2003, *Một số bài toán chọn lọc về dãy số* NXB Giáo Dục.
- [4] Nguyễn Văn Mậu, 2009, *Một số chuyên đề giải tích bồi dưỡng học sinh giỏi trung học phổ thông* NXB Giáo Dục.
- [5] Nguyễn Văn Mậu, 2006, *Lý thuyết toán tử và phương trình tích phân kỳ dị* NXB Đại học quốc gia Hà Nội.
- [6] Nguyễn Trọng Tuấn, 2004, *Bài toán hàm số qua các kì thi Olympic* NXB Giáo Dục.
- [7] Nguyễn Sinh Nguyên, 2006, *Chuyên đề bồi dưỡng phương trình hàm* NXB Đà Nẵng.
- [8] Nguyễn Văn Mậu, 2009, *Các chuyên đề toán và ứng dụng* Kỷ yếu hội nghị khoa học Hà Nội - Bắc Giang.
- [9] Nguyễn Phú Hy-Nguyễn Quốc Bảo, 1996, *ứng dụng số phức để giải toán sơ cấp*.NXB Giáo dục.
- [10] Nguyễn Văn Mậu, 2009, *Chuyên đề chọn lọc số phức và áp dụng* NXB Giáo dục.
- [11] Trương Văn Thương, 2007, *Hàm số biến số phức* NXB Giáo dục.
- [12] Christopher G. small, *Funtional Equations and How to slove them* .

Xác nhận của người hướng dẫn khoa học

Luận văn: "Phương trình hàm sinh bởi phép quay và một số áp dụng" của học viên Nguyễn Văn Tuấn đã được chỉnh sửa theo góp ý của hội đồng chấm luận văn thạc sỹ họp ngày 06 tháng 11 năm 2010 tại Đại học khoa học - Đại học Thái Nguyên.

Người hướng dẫn khoa học

GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu.