

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ DANH TUYÊN

TAM THỨC BẬC (α, β)
VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2010

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ DANH TUYỀN

TAM THỨC BẬC (α, β) VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

Người hướng dẫn khoa học:
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2010

Mục lục

Mở đầu	1
1 Tam thức bậc (α, β)	3
1.1 Tam thức bậc hai	3
1.1.1 Các tính chất cơ bản	3
1.1.2 Phương pháp xét dấu tam thức bậc hai	6
1.2 Tam thức bậc (α, β)	10
1.2.1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản	10
1.2.2 Một số ví dụ về tam thức bậc (α, β) thường gặp	13
1.2.3 Điều kiện để tam thức bậc (α, β) dương trên $(0, +\infty)$	14
2 Các bài toán liên quan đến tam thức bậc (α, β)	17
2.1 Mối liên hệ giữa tam thức bậc hai, bậc $(\alpha, 1)$ và các bất đẳng thức Bernoulli, bất đẳng thức AM - GM	17
2.2 Tam thức bậc (α, β) và phân thức chính quy	23
2.3 Một số dạng tam thức bậc (α, β) có tính đơn điệu liên tiếp bậc $(1, 2)$.	26
3 Một số áp dụng	31
3.1 Bài toán cực trị và bất đẳng thức	31
3.2 Khảo sát phương trình và bất phương trình	38
3.2.1 Tam thức bậc $(3, 1)$	38
3.2.2 Khảo sát phương trình bậc ba	40
Kết luận	55
Tài liệu tham khảo	56

Mở đầu

Tam thức bậc hai là chuyên đề cơ bản nhất đóng vai trò nòng cốt trong các kiến thức toán bậc trung học phổ thông. Hầu hết các bài toán và ví dụ được khảo sát trong chương trình đại số về phương trình, bất phương trình, hệ phương trình, bất đẳng thức và các bài toán cực trị,... và trong chương trình giải tích các lớp cuối bậc phổ thông như khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị,... đều có gắn với các hàm số bậc nhất và bậc hai.

Tuy nhiên, cũng có rất nhiều dạng toán liên quan đến các biểu thức vô tỷ (ứng với lũy thừa không nguyên) thì ta ngoài các dạng toán quy được về dạng bậc hai ta cần các kỹ thuật khác nữa. Chẳng hạn, bất đẳng thức Bernoulli

$$x^\alpha \geq \alpha x + 1 - \alpha, \quad \alpha > 1, \quad x > 0$$

khi $\alpha \neq 2$ có nguồn gốc xuất xứ từ tam thức bậc hai

$$x^2 \geq 2x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

(ứng với $\alpha = 2$) nhưng không thể khảo sát bằng phương pháp tam thức bậc hai được nhất là khi α là một số vô tỷ.

Các bài toán cực trị, bất đẳng thức, phương trình, bất phương trình,... không quy được về dạng bậc hai thường là nội dung của các đề thi học sinh giỏi các cấp và các đề thi olympic toán khu vực và quốc tế.

Nội dung chính của luận văn này là nhằm thực hiện nhiệm vụ do thầy hướng dẫn đặt ra là khảo sát các tam thức bậc (α, β) dạng

$$f_{(\alpha, \beta)}(x) = ax^\alpha + bx^\beta + c, \quad \alpha > \beta > 0, \quad x > 0,$$

trình bày các tính chất cơ bản, xét các dạng toán liên quan và các ứng dụng của chúng.

Luận văn gồm phần mở đầu, ba chương, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày các kiến thức cơ bản về tam thức bậc hai và phương pháp tam thức bậc hai, định nghĩa, các tính chất và ví dụ về tam thức bậc (α, β) dạng

$$f_{(\alpha, \beta)}(x) = ax^\alpha + bx^\beta + c, \quad \alpha > \beta > 0, \quad x > 0.$$

Tiếp theo, khảo sát điều kiện để tam thức bậc hai luôn luôn dương trên $\mathbb{R}$.

Chương 2 khảo sát các bài toán liên quan đến tam thức bậc (α, β) như bất đẳng thức Bernoulli, bất đẳng thức AM-GM, phân thức chính quy và các dạng đơn điệu liên tiếp bậc $(1, 2)$ để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức.

Chương 3 xét các ví dụ áp dụng trong phương trình, bất phương trình, bất đẳng thức và các bài toán cực trị.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn trực tiếp của GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự hướng dẫn nhiệt tình, nghiêm khắc và những lời động viên của Thầy trong suốt quá trình học tập và thực hiện Luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn TS. Nguyễn Thị Thu Thủy về sự nhiệt tình giúp đỡ và những góp ý quý báu trong thời gian tác giả hoàn thành luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn quý Thầy Cô trong ban giám hiệu, Phòng đào tạo Đại học và sau Đại học, Khoa Toán - Tin, Trung tâm Học Liệu Trường Đại học Khoa Học, Đại học Thái Nguyên, cùng quý Thầy Cô tham gia giảng dạy khoá học đã tạo mọi điều kiện, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu để tác giả có thể hoàn thành khoá học và Luận văn.

Trong khuôn khổ của một Luận văn, tác giả không thể khai thác hết các vấn đề về ứng dụng của tam thức bậc (α, β) . Mặc dù đã cố gắng rất nhiều nhưng kết quả đạt được trong Luận văn còn rất khiêm tốn và không tránh khỏi những sai sót. Vì vậy tác giả mong nhận được nhiều ý kiến, góp ý quý báu của quý Thầy Cô, các anh chị và các đồng nghiệp để Luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, 18 tháng 09 năm 2010.

Người thực hiện

Trần Thị Danh Tuyên

Chương 1

Tam thức bậc (α, β)

Nội dung của chương này nhằm hệ thống một số tính chất cơ bản của tam thức bậc hai. Tiếp theo tác giả giới thiệu tam thức bậc (α, β) nhằm phục vụ cho việc khảo sát các bài toán liên quan đến tam thức bậc (α, β) được xét trong chương 2.

1.1 Tam thức bậc hai

Tam thức bậc hai là một trong các chuyên đề trọng tâm của chương trình đại số ở phổ thông. Phần lớn các phương trình, bất phương trình được xét trong chương trình toán bậc phổ thông đều được đưa về dạng phương trình, bất phương trình bậc hai. Tam thức bậc hai cũng là một mô hình quan trọng nhằm giới thiệu cho học sinh những kiến thức toán học cơ bản về tính liên tục, đồng biến, nghịch biến, lồi, lõm và ... của hàm số. Những kiến thức về tam thức bậc hai là những kiến thức mà mỗi học sinh phổ thông đều phải nắm vững vì chúng được sử dụng trong các kì thi tốt nghiệp THPT, tuyển sinh Đại học cũng như các kì thi học sinh giỏi quốc gia và Olympic quốc tế (xem [1], [2], [5]-[7]).

1.1.1 Các tính chất cơ bản

Trong phần này sẽ hệ thống một số tính chất cơ bản của tam thức bậc hai để sử dụng và so sánh với các tính chất của tam thức bậc (α, β) được xét sau này.

Biểu thức

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ với } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, \quad (1.1)$$

được gọi là tam thức bậc hai (của biến số x).

Hàm số tương ứng $f(x) = ax^2 + bx + c$ được gọi là hàm số bậc hai và phương trình

$$f(x) := ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.2)$$

được gọi là phương trình bậc hai.

Các bất phương trình dạng $f(x) > 0$ (tương ứng $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$) được gọi chung là các bất phương trình bậc hai.

Biến đổi tam thức bậc hai về dạng

$$f(x) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

trong đó $\Delta := b^2 - 4ac$ được gọi là biệt thức của $f(x)$.

Nếu $b = 2b_1$ thì

$$f(x) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b_1}{a}x + \frac{b_1^2}{a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b_1^2}{a^2}\right) = a\left[\left(x + \frac{b_1}{a}\right)^2 - \frac{\Delta'}{a^2}\right],$$

trong đó $\Delta' := b_1^2 - ac$ được gọi là biệt thức thu gọn của $f(x)$.

Định lí 1.1 (Phân tích tam thức bậc hai thành nhân tử).

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$. Khi đó:

- i) Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ không phân tích được thành tích các nhân tử bậc nhất.
- ii) Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.
- iii) Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ với $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Đặc biệt, điều kiện cần và đủ để $f(x)$ là biểu thức chính phương (là bình phương đúng của một nhị thức) là đồng thời xảy ra $a > 0$, $\Delta = 0$. Khi đó

$$f(x) = \left[\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right]^2.$$

Định lí 1.2 (Về nghiệm của phương trình bậc hai).

- i) Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình bậc hai (1.2) vô nghiệm.
- ii) Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình bậc hai (1.2) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{2a}$.
- iii) Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình bậc hai (1.2) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2|a|}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2|a|}, \quad x_1 < x_2.$$

Chú ý 1.1. Trong trường hợp tổng quát, tức là a tùy ý thì $f(x) = ax^2 + bx + c$ được gọi là hàm đa thức bậc không quá 2. Phương trình $f(x) := ax^2 + bx + c = 0$ khi đó được gọi là phương trình đại số bậc không quá 2. Khi $a = 0$, $b \neq 0$ ta thu được đa thức bậc nhất quen thuộc.

Định lí 1.3 (Định lí thuận về dấu của tam thức bậc hai).

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Khi đó:

- i) Nếu $\Delta < 0$ thì $af(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- ii) Nếu $\Delta = 0$ thì $af(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = -\frac{b}{2a}$.
- iii) Nếu $\Delta \geq 0$ thì
 - $af(x) > 0$ với mọi x thoả mãn điều kiện $x < x_1$ hoặc $x_2 < x$.
 - $af(x) < 0$ với mọi x thoả mãn điều kiện $x_1 < x < x_2$.
 - $f(x) = 0$ tại $x = x_1$ hoặc $x = x_2$.

Định lí 1.4 (Định lí đảo).

Điều kiện cần và đủ để phương trình bậc hai $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (tức là $\Delta \geq 0$) là tồn tại số α sao cho $af(\alpha) < 0$. Khi đó $x_1 < \alpha < x_2$.

Hệ quả 1.1. Điều kiện cần và đủ để phương trình bậc hai $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , một nghiệm nằm trong (α, β) , một nghiệm nằm ngoài đoạn $[\alpha, \beta]$ (với $\alpha < \beta$) là $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

Định lí 1.5.

- (i) Khi $a > 0$ thì tam thức bậc hai $f(x)$ đồng biến trong $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ và nghịch biến trong $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$.
- (ii) Khi $a < 0$ thì tam thức bậc hai $f(x)$ đồng biến trong $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ và nghịch biến trong $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Từ đẳng thức $af(x) = \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4}$, ta có thể thiết lập được hệ thức cho tam thức bậc hai $f\left(-\frac{b}{2a} + x\right) = f\left(-\frac{b}{2a} - x\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Như vậy đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng.

Dựa vào tính chất của hàm số bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$), xét trên (α, β) , ($\alpha < \beta$ và $f(\alpha) \neq 0$, $f(\beta) \neq 0$) ta có kết quả sau:

Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 < x_2$. Khi đó

Tính chất 1.1. Phương trình $f(x) = 0$ có một và chỉ một nghiệm $x_1 \in (\alpha, \beta)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) < 0 \end{cases}$

Tính chất 1.2. Phương trình $f(x) = 0$ có một và chỉ một nghiệm $x_2 \in (\alpha, \beta)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) > 0 \end{cases}$

Tính chất 1.3. Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm trong khoảng (α, β) khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < -\frac{b}{2a} < \beta \end{cases}$

Những tính chất này giúp ta giải các bài toán “giải và biện luận phương trình” tương ứng một cách dễ dàng.

1.1.2 Phương pháp xét dấu tam thức bậc hai

Tùy theo giá trị của biến số x mà tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) có giá trị âm, dương hay bằng 0. Tuy nhiên ta chỉ xét điều kiện để tam thức bậc hai luôn dương (tức là $f(x) > 0$) trên một miền D (cụ thể xét $D = (\alpha, \beta)$). Các bài toán khác được rút ra theo cách tương tự.

Ta có bài toán sau:

Bài toán 1.1. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) và miền $D = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. Tìm điều kiện để $f(x) > 0$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$.

Giải. Ta có $f(x) > 0$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$ khi và chỉ khi một trong các trường hợp sau xảy ra:

- Trường hợp 1: Khi $\Delta < 0$ thì suy ra $a > 0$, tức là $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- Trường hợp 2: Khi $\Delta = 0$ thì suy ra $a > 0$ và $-\frac{b}{2a} \notin (\alpha, \beta)$, tức là

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 0 \\ -\frac{b}{2a} \notin (\alpha, \beta) \end{cases}$$

- Trường hợp 3: Xét $\Delta > 0$. Ta có 3 trường hợp cần khảo sát :

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \\ af(\beta) \geq 0 \\ \beta < -\frac{b}{2a} \end{cases} ; \begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \\ af(\alpha) \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} < \alpha \end{cases} ; \begin{cases} \Delta > 0 \\ a < 0 \\ x_1 \leq \alpha < \beta \leq x_2 \end{cases}$$

Với cách làm tương tự như bài toán trên, ta có thể dễ dàng giải một số bài toán sau đây.

Bài toán 1.2. Tìm điều kiện của tham số để tam thức bậc hai không đổi dấu trên một miền đã cho.

Ví dụ 1.1. Xác định m để $f(x) = x^2 - (m+2)x + m^2 + 1 > 0, \forall x > 0$.

Bài toán 1.3. Chứng minh phương trình và hệ phương trình vô nghiệm hoặc luôn có nghiệm trong một khoảng.

Ví dụ 1.2. Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = y \\ ay^2 + by + c = z \\ az^2 + bz + c = x \end{cases}$$

trong đó $a \neq 0, (b-1)^2 - 4ac < 0$.

Chứng minh rằng hệ phương trình trên vô nghiệm.

Giải. Không mất tính tổng quát giả sử $a > 0$, ($a < 0$ được xét một cách tương tự).

Giả sử hệ có nghiệm (x_0, y_0, z_0) . Khi đó, cộng các phương trình của hệ vế theo vế ta nhận được:

$$f(x_0) + f(y_0) + f(z_0) = 0,$$

trong đó $f(t) = at^2 + (b-1)t + c$.

Ta có

$$\Delta = (b-1)^2 - 4ac < 0.$$

Do đó $f(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, (do $a > 0$), nên ta thu được điều vô lý.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 1.3. Chứng minh rằng phương trình $m^2(x^2 - 9) - x(x - 5) = 0$, luôn có nghiệm trong $[-3, 5]$ với mọi m .

Giải. Trường hợp $m = \pm 1$ cho ta phương trình bậc nhất có nghiệm duy nhất $x = -\frac{9}{5} \in [-3, 5]$ là hiển nhiên.

Xét $m \neq \pm 1$, khi đó ta thu được phương trình với vế phải là tam thức bậc hai $f(x)$.

Ta chứng minh rằng $f(5)f(-3) \leq 0, \forall m$.

Thật vậy, ta có

$$f(5) = 16m^2, \quad f(-3) = -24,$$

nên suy ra

$$f(5)f(-3) \leq 0, \quad \forall m.$$

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm trong $[-3, 5]$ với mọi m .

Ví dụ 1.4. Cho $1 \leq a < b < c \leq 2$ và

$$f(x) = x^2 - \frac{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)}{a+b+c}x + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a+b+c}abc.$$

Chứng minh rằng, phương trình $f(x) = 0$ luôn có hai nghiệm trong khoảng $(1, 4)$.

Giải. Ta có nhận xét sau: $1 < ab < ac < bc < 4$ và

$$f(ab) = \frac{abc}{a+b+c}(c-a)(c-b) > 0,$$

$$f(ac) = -\frac{abc}{a+b+c}(b-a)(c-b) < 0,$$

$$f(bc) = \frac{abc}{a+b+c}(b-a)(c-a) > 0.$$

Theo định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai, phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt nằm trong khoảng (ab, bc) .

Vậy phương trình $f(x) = 0$ luôn có hai nghiệm trong khoảng $(1, 4)$.

Bài toán 1.4. Tìm điều kiện của tham số để phương trình hoặc hệ phương trình dạng bậc hai có nghiệm trong một khoảng.

Ví dụ 1.5. Tìm p để phương trình sau có nghiệm

$$\frac{4x^2}{1+2x^2+x^4} + \frac{2px}{1+x^2} + 1 - p^2 = 0.$$

Chỉ dẫn cách giải. Đặt ẩn phụ $\frac{2x}{1+x^2} = t$ và chú ý rằng điều kiện của ẩn phụ thỏa mãn điều kiện $|t| \leq 1$.

Ví dụ 1.6. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{8}\right)$

$$\frac{1 + \sin 2x}{1 + \cos 2x} + \frac{1 - \sin 2x}{1 - \cos 2x} \leq m.$$

Giải. Điều kiện $\cos 2x \neq \pm 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Biến đổi bất phương trình đã cho, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2 - \sin 4x}{\sin^2 2x} \leq m &\Leftrightarrow 2 - \sin 4x \leq m \sin^2 2x \\ &\Leftrightarrow m \sin^2 2x + \sin 4x \geq 2(\sin^2 2x + \cos^2 2x). \end{aligned}$$

Do $\sin^2 2x > 0$ (vì $k \neq \frac{k\pi}{2}$), nên có thể chia cả hai vế cho $\sin^2 2x$.

Khi đó bất phương trình tương đương với

$$m + 2 \cot 2x \geq 2(1 + \cot^2 2x). \quad (1.3)$$

Đặt $\cot 2x = t$, bất phương trình (1.3) trở thành

$$2t^2 - 2t + 2 - m \leq 0. \quad (1.4)$$

Như vậy, yêu cầu của bài toán tương đương với việc tìm m để (1.4) có nghiệm $t \in (1, +\infty)$.

Ta có $\Delta' = 2m - 3$.

- Nếu $\Delta' < 0$, tức $m < \frac{3}{2}$ thì vế trái của (1.4) luôn dương, nên (1.4) vô nghiệm.
- Nếu $\Delta' = 0$, tức $m = \frac{3}{2}$ thì bất phương trình (1.4) có nghiệm

$$t = \frac{1}{2} \notin (1, +\infty), \text{ (loại).}$$

- Nếu $\Delta' > 0$, tức $m > \frac{3}{2}$ thì bất phương trình (1.4) có nghiệm

$$\frac{1 - \sqrt{2m - 3}}{2} \leq t \leq \frac{1 + \sqrt{2m - 3}}{2}.$$

Bất phương trình (1.4) có nghiệm $t \in (1, +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\frac{1 + \sqrt{2m - 3}}{2} > 1 \Leftrightarrow m > 2.$$

Vậy để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{8}\right)$ thì $m > 2$.

1.2 Tam thức bậc (α, β)

1.2.1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản

Định nghĩa 1.1 (xem [2],[6]). *Biểu thức*

$$f_{(\alpha,\beta)}(x) := ax^\alpha + bx^\beta + c, \quad 0 \neq a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \alpha > \beta > 0, \quad x \geq 0 \quad (1.5)$$

được gọi là tam thức bậc (α, β) .

Nhận xét rằng, khi $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$ thì tam thức bậc (α, β) tương ứng được xét cả đối với số âm như đối với tam thức bậc hai thông thường.

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra nhiều tính chất của tam thức bậc (α, β) như tính đồng biến, nghịch biến, lồi, lõm và các bất đẳng thức liên quan đến nó có nhiều điểm chung đối với tam thức bậc hai quen biết.

Bằng cách đặt ẩn phụ $x^\beta = t$, ta có thể chuyển tam thức bậc (α, β) về dạng tam thức bậc $(\gamma, 1)$

$$g_{(\gamma,1)}(t) := at^\gamma + bt + c, \quad (1.6)$$

trong đó $\gamma = \frac{\alpha}{\beta} > 1$ và (1.6) đóng vai trò như tam thức bậc hai với số 2 được thay bởi số γ ($\gamma > 1$).

Tiếp theo, ta khảo sát tính đồng biến, nghịch biến và tính lồi, lõm của tam thức bậc (α, β) .

Để xác định, ta khảo sát trường hợp ứng với $a > 0$ (trường hợp khi $a < 0$ được xét tương tự).

Giả sử

$$f(x) = ax^\alpha + bx^\beta + c, \quad \alpha > \beta > 0, \quad x \geq 0.$$

Ta có

$$f'(x) = \alpha ax^{\alpha-1} + \beta bx^{\beta-1}.$$

Khi đó, nếu $b \geq 0$ thì $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, tức $f(x)$ luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R}^+$.

Nếu $b < 0$ thì $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 = \left(-\frac{b\beta}{a\alpha}\right)^{1/(\alpha-\beta)}$.

Vậy nên, trong khoảng $(0, x_0)$ thì $f'(x) < 0$ và trong khoảng $(x_0, +\infty)$ thì $f'(x) > 0$.

Ta tổng kết các kết quả khảo sát ở phần trên dưới dạng tính chất sau.

Tính chất 1.4. Khi $a > 0, b \geq 0$ thì tam thức bậc (α, β) dạng

$$f_{(\alpha, \beta)}(x) := ax^\alpha + bx^\beta + c$$

luôn luôn đồng biến trên $(0, +\infty)$.

Tính chất 1.5. Khi $a > 0, b < 0$ thì tam thức bậc (α, β) dạng

$$f_{(\alpha, \beta)}(x) := ax^\alpha + bx^\beta + c$$

nghịch biến trong $(0, x_0)$ và đồng biến trong $(x_0, +\infty)$, trong đó $x_0 = \left(-\frac{b\beta}{a\alpha}\right)^{1/(\alpha-\beta)}$.

Hệ quả 1.2. Khi $a > 0$ thì

$$\min_{x \geq 0} \{f_{(\alpha, \beta)}(x)\} = \begin{cases} c, & \text{nếu } b \geq 0 \\ f\left(-\frac{b\beta}{a\alpha}\right)^{1/(\alpha-\beta)}, & \text{nếu } b < 0. \end{cases}$$

Tiếp theo, ta xét tính lồi, lõm của tam thức bậc (α, β) . Về sau, trong các phần tiếp theo, ta sẽ chỉ ra mối liên hệ sâu sắc giữa tính lồi, lõm của tam thức bậc (α, β) với các bất đẳng thức cổ điển quen biết như bất đẳng thức Bernoulli, Karamata, Jensen, ...

Xét tam thức bậc (α, β) dạng

$$f_{(\alpha, \beta)}(x) := ax^\alpha + bx^\beta + c, \quad \alpha > \beta > 0.$$

Khi đó

$$f'(x) = \alpha ax^{\alpha-1} + \beta bx^{\beta-1},$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)ax^{\alpha-2} + \beta(\beta-1)bx^{\beta-2}.$$

Ta có một số nhận xét sau đây trong các trường hợp đặc biệt của α và β .

Tính chất 1.6. Nếu $\beta = 1$ thì $\alpha > 1$ và $af''(x) = \alpha(\alpha-1)a^2x^{\alpha-2} > 0$ trong $(0, +\infty)$, tức là $f(x)$ luôn luôn lồi trong $(0, +\infty)$ ứng với $a > 0$ và luôn luôn lõm trong $(0, +\infty)$ ứng với $a < 0$.

Tính chất 1.7. Nếu $\alpha = 1$ thì $\beta < 1$ và $bf''(x) = \beta(\beta-1)b^2x^{\beta-2} < 0$ trong $(0, +\infty)$, tức là $f(x)$ luôn luôn lồi trong $(0, +\infty)$ ứng với $b < 0$ và luôn luôn lõm trong $(0, +\infty)$ ứng với $b > 0$.

Giả sử $0 < \alpha, \beta \neq 1$, khi đó

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \alpha(\alpha - 1)ax^{\alpha-2} + \beta(\beta - 1)bx^{\beta-2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^{\alpha-\beta} = -\frac{b}{a} \frac{\beta(\beta - 1)}{\alpha(\alpha - 1)}. \end{aligned}$$

Nhận xét rằng, nếu $-\frac{b}{a} \cdot \frac{\beta(\beta - 1)}{\alpha(\alpha - 1)} < 0$ thì $f''(x)$ không có nghiệm. Vậy nên, ta có

Tính chất 1.8.

- i) Nếu $a(\alpha - 1) > 0$ và $-\frac{b}{a} \cdot \frac{\beta(\beta - 1)}{\alpha(\alpha - 1)} < 0$ thì $f(x)$ là hàm lồi trên $\mathbb{R}^+$.
- ii) Nếu $a(\alpha - 1) < 0$ và $-\frac{b}{a} \cdot \frac{\beta(\beta - 1)}{\alpha(\alpha - 1)} < 0$ thì $f(x)$ là hàm lõm trên $\mathbb{R}^+$.

Bây giờ, ta xét tiếp trường hợp $-\frac{b}{a} \cdot \frac{\beta(\beta - 1)}{\alpha(\alpha - 1)} > 0$. Khi đó

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \left(-\frac{b}{a} \frac{\beta(\beta - 1)}{\alpha(\alpha - 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}.$$

Khi đó, nếu $a(\alpha - 1) > 0$ thì $f''(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua x_0 . Nếu $a(\alpha - 1) < 0$ thì $f''(x)$ đổi dấu từ dương sang âm qua x_0 .

Vậy nên ta có thể phát biểu kết quả trên dưới dạng tính chất sau.

Tính chất 1.9.

- i) Nếu $a(\alpha - 1) > 0$ và $-\frac{b}{a} \cdot \frac{\beta(\beta - 1)}{\alpha(\alpha - 1)} > 0$ thì $f(x)$ là hàm lõm trong khoảng $(0, x_0)$ và lồi trong khoảng $(x_0, +\infty)$.
- ii) Nếu $a(\alpha - 1) < 0$ và $-\frac{b}{a} \cdot \frac{\beta(\beta - 1)}{\alpha(\alpha - 1)} > 0$ thì $f(x)$ là hàm lồi trong khoảng $(0, x_0)$ và lõm trong khoảng $(x_0, +\infty)$.

Định lí 1.6 (T.Popoviciu (xem [3])). Với mọi hàm lồi trên $I(p, q)$ và với mọi $x, y, z \in I(p, q)$, ta đều có bất đẳng thức

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2f\left(\frac{y+z}{2}\right) + 2f\left(\frac{z+x}{2}\right). \quad (1.7)$$

Nhận xét rằng định lí trên là một mở rộng thực sự của các kết quả quen biết (bất đẳng thức Jensen) về hàm lồi. Thật vậy, theo bất đẳng thức Jensen, thì

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right).$$

và

$$3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right).$$

Do vậy, định lí T.Popoviciu cho ta thực hiện phép cộng trái chiều.

Chứng minh. Ta coi $x \geq y \geq z$. Khi đó xảy ra một trong hai khả năng

$$x \geq \frac{x+y+z}{3} \geq y \geq z$$

hoặc

$$x \geq y \geq \frac{x+y+z}{3} \geq z.$$

khi đó ta chỉ cần xét trường hợp $x \geq y \geq \frac{x+y+z}{3} \geq z$ là đủ.

Khi đó dễ dàng kiểm tra

$$x \geq y \geq \frac{x+y+z}{3} \geq \frac{x+y+z}{3} \geq \frac{x+y+z}{3} \geq z, \quad (1.8)$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \frac{x+y}{2} \geq \frac{x+y}{2} \geq \frac{x+y}{2} \geq \frac{x+y}{2} \geq \frac{x+y}{2}. \quad (1.9)$$

và

$$x+y+z+3\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = 2\left(\frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2}\right).$$

Ta thu được dãy (1.8) gần đều hơn (1.9). Theo định lí Karamata, ta được điều phải chứng minh.

Hệ quả 1.3. Khi $a(\alpha-1) > 0$ và $-\frac{b}{a} \cdot \frac{\beta(\beta-1)}{\alpha(\alpha-1)} < 0$ thì tam thức bậc (α, β) dạng $f_{(\alpha, \beta)}(x)$ tương ứng thỏa mãn điều kiện định lý T.Popoviciu và ta có bất đẳng thức tương tự như (1.7) đối với $f_{(\alpha, \beta)}(x)$.

1.2.2 Một số ví dụ về tam thức bậc (α, β) thường gặp

Ví dụ 1.7. Ví dụ điển hình nhất của dạng tam thức bậc (α, β) thường được quy về bậc hai là dạng tam thức bậc $(4, 2)$. Đó chính là đa thức trùng phương

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c.$$

Bằng phép đặt ẩn phụ $x^2 = t$, ta thu được tam thức bậc hai $g(t) := at^2 + bt + c$ xét trên tập các số không âm.

Ví dụ 1.8. Các đa thức bậc ba

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

khuyết lũy thừa bậc 2 ($b = 0$) hoặc khuyết lũy thừa bậc 1 ($c = 0$) cho ta các dạng tam thức bậc (3, 1) và (3, 2) tương ứng.

Để ý rằng, bằng các phép biến đổi hình học đơn giản như phép tịnh tiến ($x = t + \lambda$), đồng dạng ($x = \lambda t$), nghịch đảo ($x = \frac{1}{t}$), ta dễ dàng chuyển các phương trình bậc 3 tổng quát về các dạng tam thức bậc (3, 1) và (3, 2) tương ứng.

Ví dụ 1.9. Hàm số $G(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$ với $\alpha > 1$ chính là một dạng cụ thể của tam thức bậc ($\alpha, 1$) có tính chất rất quan trọng

$$G(x) \geq 0, \quad \forall x > 0. \quad (1.10)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Để ý rằng (1.10) chính là bất đẳng thức Bernoulli quen biết trong chương trình toán bậc phổ thông.

Ví dụ 1.10. Đối với cặp số dương a, b và cặp số thực μ, ν sao cho $a\mu + b\nu = 0$, ta thu được một dạng cụ thể của phân thức chính quy

$$Q(x) = ax^\mu + bx^\nu + c, \quad x > 0, \quad (1.11)$$

có tính chất $Q(x) \geq Q(1), \quad \forall x > 0$.

Để ý rằng (1.11) chính là một dạng cụ thể của tam thức bậc (μ, ν) tổng quát.

1.2.3 Điều kiện để tam thức bậc (α, β) dương trên $(0, +\infty)$

Cho tam thức bậc (α, β) tùy ý

$$f_{(\alpha, \beta)}(x) = ax^\alpha + bx^\beta + c, \quad x > 0, \quad \alpha > \beta > 0.$$

Ta có

$$f'_{(\alpha, \beta)}(x) = \alpha ax^{\alpha-1} + \beta bx^{\beta-1}, \quad x > 0.$$

Khi đó $f'_{(\alpha, \beta)}(x) = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi $x = x_0$, với

$$x_0 = \left(-\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}.$$

Xét trường hợp $a > 0$, khi đó

(i) Nếu $b \geq 0$ thì $f'_{(\alpha,\beta)}(x) \geq 0$. Khi đó $f_{(\alpha,\beta)}(x)$ là hàm đồng biến.

(ii) Nếu $b = 0$ thì $f'_{(\alpha,\beta)}(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$.

Lập bảng

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	c		$+\infty$

Vậy $f_{(\alpha,\beta)}(x) \geq f_{(\alpha,\beta)}(x_0), \forall x \in [0, +\infty)$.

Khi $a < 0$ thì ta có kết quả ngược lại

$$f_{(\alpha,\beta)}(x) \leq f_{(\alpha,\beta)}(x_0), \forall x \in [0, +\infty).$$

Tương tự như trường hợp tam thức bậc hai, ta kí hiệu:

$$\Delta_{(\alpha,\beta)} = -af(x_0) = (-ba)\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(-\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{b}{a}\right)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} - ca.$$

Hệ quả 1.4. Phương trình $f_{(\alpha,\beta)}(x) = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta_{(\alpha,\beta)} \geq 0$.

i) Nếu $\Delta_{(\alpha,\beta)} = 0$ thì phương trình có một nghiệm trong $[0, +\infty)$.

ii) Nếu $\Delta_{(\alpha,\beta)} > 0$ thì phương trình có hai nghiệm trong $[0, +\infty)$.

Hệ quả 1.5. Nếu tồn tại $x_1 \in (0, +\infty)$ sao cho $af_{(\alpha,\beta)}(x_1) < 0$ thì tam thức $f_{(\alpha,\beta)}(x)$ có nghiệm trong $(0, +\infty)$.

Hệ quả 1.6. (Bất đẳng thức Bernoulli)

i) Với mọi $\alpha \geq 1$

$$x^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha x, \forall x \in (0, +\infty).$$

ii) Với $0 < \alpha < 1$

$$x^\alpha + \alpha - 1 \leq \alpha x, \forall x \in (0, +\infty).$$

Ví dụ 1.11. Giải phương trình

$$4^{|x|} + 2^{|x|} = 4x + 2.$$

Giải. Theo bất đẳng thức Bernoulli, ta có:

$$\begin{cases} t^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha t, \forall t > 1, \alpha \geq 1 \\ t^\alpha + \alpha - 1 \leq \alpha t, \forall t > 1, 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Suy ra

$$2^x \geq x + 1, \quad 4^x \geq 3x + 1 \quad \text{khi } x \geq 1,$$

và

$$2^x \leq x + 1, \quad 4^x \leq 3x + 1 \quad \text{khi } x \in [0, 1).$$

Khi $x < 0$ thì vế trái nhỏ hơn vế phải.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ và $x = 1$, từ đó suy ra phương trình có nghiệm $x = 0, x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0, x = 1$.

Chương 2

Các bài toán liên quan đến tam thức bậc (α, β)

Trong chương này sẽ mô tả các bất đẳng thức Bernoulli, bất đẳng thức AM - GM và một số dạng mở rộng của chúng đối với bộ số có tổng không đổi,... như là các ứng dụng trực tiếp từ các tính chất của tam thức bậc (α, β) .

2.1 Mối liên hệ giữa tam thức bậc hai, bậc $(\alpha, 1)$ và các bất đẳng thức Bernoulli, bất đẳng thức AM - GM

Ta có nhận xét rằng bất đẳng thức Cauchy dưới dạng sơ đẳng

$$x^2 + 1 \geq 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Ta nhận thấy (2.1) có thể xem như bất đẳng thức “tam thức bậc $(2, 1)$ ” (ứng với lũy thừa 2 và lũy thừa 1 của x) trong trường hợp dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Khi đó, ta dễ dàng mở rộng dạng bất đẳng thức cho tam thức bậc $(\alpha, 1)$; $(\alpha > 1)$, để thu được bất đẳng thức có dạng tương tự như (2.1) bằng cách thay số 2 bởi α .

Thật vậy, ta cần thiết lập bất đẳng thức dạng

$$x^\alpha + (?) \geq \alpha x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (2.2)$$

sao cho dấu đẳng thức vẫn xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Thay $x = 1$ vào (2.2) ta nhận được $(?) = \alpha - 1$, tức là (2.2) có dạng

$$x^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (2.3)$$

Đây chính là bất đẳng thức Bernoulli quen biết.

Sử dụng đạo hàm, ta dễ dàng chứng minh (2.3).

Thật vậy, xét hàm số

$$f(x) = x^\alpha + \alpha - 1 - \alpha x, x > 0.$$

Ta có $f(1) = 0$ và $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$.

Suy ra $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 1$ và $x = 1$ là cực tiểu duy nhất của $f(x)$ trên $\mathbb{R}^+$, nên $f(x) \geq f(1) = 0$.

Bất đẳng thức (2.3) có thể xem như bất đẳng thức tam thức bậc $(\alpha, 1)$.

Nhận xét 2.1. Trong áp dụng, đặc biệt trong các dạng toán xác định giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất, bất đẳng thức Bernoulli dạng (2.3) chỉ được sử dụng trong các trường hợp đảm bảo chắc chắn rằng dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Trong những trường hợp, nếu dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0 > 0$ cho trước, ta cần thay (2.3) bởi bất đẳng thức sau đây.

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha \frac{x}{x_0}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (2.4)$$

Tiếp theo, ta lại có nhận xét rằng bất đẳng thức Cauchy dưới dạng sơ đẳng

$$x^2 + 1 \geq 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

có thể xem như bất đẳng thức tam thức bậc $(2, 1)$ (ứng với lũy thừa 2 và lũy thừa 1 của x), trong trường hợp dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Khi đó, ta dễ dàng mở rộng một cách tự nhiên cho tam thức bậc (α, β) ($\alpha > \beta > 0$) để có bất đẳng thức tương tự như dạng (2.5) bằng cách thay lũy thừa 2 bởi α và lũy thừa 1 bởi β .

Thật vậy, ta cần thiết lập bất đẳng thức dạng

$$x^\alpha + (?) \geq (??)x^\beta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (2.6)$$

sao cho dấu đẳng thức vẫn xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Sử dụng phép đổi biến $x^\beta = t$ và $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma$, ta có thể đưa (2.6) về dạng

$$t^\gamma + (?) \geq (??)t, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (2.7)$$

So sánh với (2.3), ta thấy ngay cần chọn $(?) = \gamma - 1$ và $(??) = \gamma$. Vậy nên

$$t^\gamma + \gamma - 1 \geq \gamma t, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

hay

$$x^\alpha + \frac{\alpha}{\beta} - 1 \geq \frac{\alpha}{\beta} x^\beta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+; \alpha > \beta > 0 \quad (2.8)$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Ta nhận được bất đẳng thức Bernoulli đối với tam thức bậc (α, β) ứng với trường hợp dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Để sử dụng bất đẳng thức Bernoulli cho trường hợp đảm bảo chắc chắn rằng dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0 > 0$ cho trước, ta chỉ cần thay bởi bất đẳng thức sau đây.

Định lý 2.1. *Giả sử cho trước $x_0 > 0$ và cặp số (α, β) thỏa mãn điều kiện $\alpha > \beta > 0$.*

Khi đó

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha + \frac{\alpha}{\beta} - 1 \geq \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{x_0}\right)^\beta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0$.

Sau đây ta sẽ xét một số ứng dụng của các bất đẳng thức vừa nêu trên.

Ví dụ 2.1. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng

$$a^{3\sqrt{2}} + b^{3\sqrt{2}} \geq 2^{1-\sqrt{2}} [ab(a+b)]^{\sqrt{2}}.$$

Giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{a^{3\sqrt{2}}}{[ab(a+b)]^{\sqrt{2}}} + \frac{b^{3\sqrt{2}}}{[ab(a+b)]^{\sqrt{2}}} \geq 2^{1-\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow & \left[\frac{a}{\sqrt{b(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} + \left[\frac{b}{\sqrt{a(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} \geq 2^{1-\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli dạng (2.8), ta có

$$\begin{aligned} & \left[\sqrt{2} \frac{a}{\sqrt{b(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} \left[\sqrt{2} \frac{a}{\sqrt{b(a+b)}} \right]^2, \\ & \left[\sqrt{2} \frac{b}{\sqrt{a(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{2} \left[\sqrt{2} \frac{b}{\sqrt{a(a+b)}} \right]^2. \end{aligned}$$

Cộng hai bất đẳng thức trên về theo về, ta được

$$\begin{aligned}
& \left[\sqrt{2} \frac{a}{\sqrt{b(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} + \left[\sqrt{2} \frac{b}{\sqrt{a(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} - 2 \\
& \geq \sqrt{2} \left(\left[\sqrt{2} \frac{a}{\sqrt{b(a+b)}} \right]^2 + \left[\sqrt{2} \frac{b}{\sqrt{a(a+b)}} \right]^2 \right) \\
& \Leftrightarrow \left[\sqrt{2} \frac{a}{\sqrt{b(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} + \left[\sqrt{2} \frac{b}{\sqrt{a(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} - 2 \\
& \geq 2\sqrt{2} \left[\frac{a^2}{b(a+b)} + \frac{b^2}{a(a+b)} \right] \\
& \Leftrightarrow \left[\sqrt{2} \frac{a}{\sqrt{b(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} + \left[\sqrt{2} \frac{b}{\sqrt{a(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} - 2 \geq 2\sqrt{2} \frac{a^2 - ab + b^2}{ab} \\
& \Leftrightarrow \left[\sqrt{2} \frac{a}{\sqrt{b(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} + \left[\sqrt{2} \frac{b}{\sqrt{a(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} - 2 \geq 2\sqrt{2} \\
& \Leftrightarrow \left[\sqrt{2} \frac{a}{\sqrt{b(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} + \left[\sqrt{2} \frac{b}{\sqrt{a(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} \geq 2 \\
& \Leftrightarrow \left[\frac{a}{\sqrt{b(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} + \left[\frac{b}{\sqrt{a(a+b)}} \right]^{2\sqrt{2}} \geq 2^{1-\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 2.2. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{h_a} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_b} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_c} \right)^{\sqrt{2}} \geq 3 \left(\frac{1}{3r} \right)^{\sqrt{2}}$$

trong đó r là bán kính đường tròn nội tiếp, h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC .

Giải. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli dạng (2.8), ta có

$$\begin{aligned}
\left(3r \frac{1}{h_a} \right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 & \geq \sqrt{2} \left(3r \frac{1}{h_a} \right), \\
\left(3r \frac{1}{h_b} \right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 & \geq \sqrt{2} \left(3r \frac{1}{h_b} \right), \\
\left(3r \frac{1}{h_c} \right)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 & \geq \sqrt{2} \left(3r \frac{1}{h_c} \right).
\end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên về theo về, ta được

$$(3r)^{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{h_a} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_b} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_c} \right)^{\sqrt{2}} \right] + 3\sqrt{2} - 3 \geq 3r\sqrt{2} \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right).$$

Ta lai có

$$r\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = \frac{S}{p}\left(\frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S}\right) = \frac{a+b+c}{2p} = 1.$$

Do đó

$$(3r)^{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{h_a} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_b} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_c} \right)^{\sqrt{2}} \right] + 3\sqrt{2} - 3 \geq 3\sqrt{2}.$$

hay

$$\left(\frac{1}{h_a}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_b}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_c}\right)^{\sqrt{2}} \geq 3\left(\frac{1}{3r}\right)^{\sqrt{2}}.$$

Đồng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Ví dụ 2.3. Cho $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$(2 + \sin x)^{2+\tan x} > (3 + \tan x)^{1+\sin x}.$$

Giải. Đặt $a = 1 + \sin x$, $b = 2 + \tan x$.

Do $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $0 < a < b$. Bất đẳng thức trở thành

$$(1+a)^b > (1+b)^a.$$

Theo bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$(1+a)^{\frac{b}{a}} > 1+b \Leftrightarrow (1+a)^b > (1+b)^a.$$

Ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.4. Cho $0 < x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1$. Chứng minh rằng

$$(1+x_1)^{\frac{1}{x_2}}(1+x_2)^{\frac{1}{x_3}}\cdots(1+x_n)^{\frac{1}{x_1}}\geq 2^n.$$

Giải. Theo giả thuyết, ta có $\frac{1}{x_i} \geq 1$ với $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli dạng (2.8), ta có

$$\begin{aligned} (1+x_1)^{\frac{1}{x_2}} &\geq 1 + \frac{x_1}{x_2}, \\ (1+x_2)^{\frac{1}{x_3}} &\geq 1 + \frac{x_2}{x_3}, \\ &\dots\dots\dots \\ (1+x_n)^{\frac{1}{x_1}} &\geq 1 + \frac{x_n}{x_1}. \end{aligned}$$

Nhân các bất đẳng thức trên theo từng vế, ta được

$$(1+x_1)^{\frac{1}{x_2}}(1+x_2)^{\frac{1}{x_3}}\cdots(1+x_n)^{\frac{1}{x_1}}\geq\left(1+\frac{x_1}{x_2}\right)\cdots\left(1+\frac{x_n}{x_1}\right)\geq 2^n.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Tiếp theo, ta nêu ví dụ áp dụng tam thức bậc $(n, 1)$ để chứng minh bất đẳng thức AM - GM.

Ví dụ 2.5. (Xem [2]). Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ là các số không âm.

Đặt

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Chứng minh rằng

$$A_n - G_n \geq \frac{n-1}{n}(A_{n-1} - G_{n-1}), \quad n > 1.$$

Giải. Ta có đồng nhất thức (Jacobsthal) sau

$$A_n = \frac{G_{n-1}}{n} \left[(n-1) \frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} + \left(\frac{G_n}{G_{n-1}} \right)^n \right]. \quad (2.9)$$

Theo bất đẳng thức

$$t^n + n - 1 \geq nt, \quad \forall t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

thì

$$\left(\frac{G_n}{G_{n-1}} \right)^n \geq n \frac{G_n}{G_{n-1}} + 1 - n. \quad (2.10)$$

Từ (2.9) và (2.10), ta thu được

$$A_n \geq \frac{G_{n-1}}{n} \left[(n-1) \frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} - (n-1) + n \frac{G_n}{G_{n-1}} \right],$$

hay

$$A_n - G_n \geq \frac{n-1}{n}(A_{n-1} - G_{n-1}), \quad n > 1.$$

Ta được điều phải chứng minh.

Hệ quả 2.1. Từ $A_n - G_n \geq \frac{n-1}{n}(A_{n-1} - G_{n-1})$, $n > 1$ ta thu được bất đẳng thức AM - GM quen biết.

Thật vậy, ta có

$$A_n - G_n \geq \frac{n-1}{n}(A_{n-1} - G_{n-1}) \geq \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1}(A_{n-2} - G_{n-2})$$

$$\geq \dots \geq \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \dots \frac{1}{2} (A_1 - G_1) = 0, (\text{do } A_1 - G_1 = 0).$$

Tiếp theo, ta xét dạng tam thức bậc $(\alpha, \beta) : f(x) = ax^\alpha + bx^\beta + c$ với điều kiện $\alpha > 0, \beta > 0$ và $a\alpha + b\beta = k > 0$.

Trường hợp riêng, khi $k = 0$, ta thu được dạng phân thức chính quy và sẽ được xét chi tiết ở mục tiếp theo.

Định lí 2.2. *Tam thức bậc (α, β) dạng*

$$f(x) = ax^\alpha + bx^\beta + c,$$

trong đó $a, b > 0, \alpha > 0 > \beta$ và $a\alpha + b\beta = k > 0$ có tính chất sau

$$f(x) \geq f(1), \forall x \geq 1.$$

Chứng minh. Để ý rằng

$$f'(x) = \alpha ax^{\alpha-1} + \beta bx^{\beta-1}$$

và trong khoảng $(0, +\infty)$, ta có $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi

$$x = x_0, \text{ trong đó } x_0 = \sqrt{1 - \frac{k}{a\alpha}} \leq 1.$$

Do vậy, $f(x)$ đồng biến trong $[1, +\infty)$, nên

$$f(x) \geq f(1), \forall x \geq 1.$$

2.2 Tam thức bậc (α, β) và phân thức chính quy

Khi các hệ số dương ta có thể xét sự mở rộng của tam thức bậc (α, β) thành phân thức chính quy với lũy thừa tùy ý.

Tam thức bậc (α, β) ta có thể mở rộng cho biểu thức dạng

$$f(x) = ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma, \quad x > 0.$$

Ta xét trường hợp đặc biệt khi $a, b, c > 0$ và $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ thì $f(x)$ được gọi là phân thức chính quy biến x .

Tương tự, ta có thể định nghĩa các phân thức chính quy 2 biến và nhiều biến.

Xét hàm số dạng

$$h(x, y) = ax^{\alpha_1}y^{\alpha_2} + bx^{\beta_1}y^{\beta_2} + cx^{\gamma_1}y^{\gamma_2}, \quad x > 0, y > 0$$

thỏa mãn điều kiện $a, b, c > 0$ và

$$\begin{cases} a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 = 0 \\ a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

thì $h(x, y)$ được gọi là phân thức chính quy hai biến x, y .

Định lí 2.3. *Phân thức chính quy dạng:*

$$f(x) = ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma,$$

trong đó $a, b, c > 0$ và $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ có tính chất:

$$\min_{x>0} f(x) = f(1).$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{a+b+c} &= \frac{a}{a+b+c}x^\alpha + \frac{b}{a+b+c}x^\beta + \frac{c}{a+b+c}x^\gamma \\ &\geq (x^\alpha)^{\frac{a}{a+b+c}} (x^\beta)^{\frac{b}{a+b+c}} (x^\gamma)^{\frac{c}{a+b+c}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Biến đổi vế phải của (2.11), ta được

$$(x^\alpha)^{\frac{a}{a+b+c}} (x^\beta)^{\frac{b}{a+b+c}} (x^\gamma)^{\frac{c}{a+b+c}} = x^{\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}} = x^0 = 1,$$

do $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

Suy ra

$$f(x) \geq a + b + c = f(1).$$

Vậy

$$\min_{x>0} f(x) = f(1).$$

Định lí 2.4. *Phân thức chính quy dạng*

$$h(x, y) = ax^{\alpha_1}y^{\alpha_2} + bx^{\beta_1}y^{\beta_2} + cx^{\gamma_1}y^{\gamma_2}, \quad x > 0, y > 0$$

trong đó $a, b, c > 0$ và

$$\begin{cases} a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 = 0 \\ a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

có tính chất sau

$$\min_{x>0, y>0} h(x, y) = h(1, 1).$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{h(x, y)}{a+b+c} &= \frac{a}{a+b+c} x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} + \frac{b}{a+b+c} x^{\beta_1} y^{\beta_2} + \frac{c}{a+b+c} x^{\gamma_1} y^{\gamma_2} \\ &\geq (x^{\alpha_1} y^{\alpha_2})^{\frac{a}{a+b+c}} (x^{\beta_1} y^{\beta_2})^{\frac{b}{a+b+c}} (x^{\gamma_1} y^{\gamma_2})^{\frac{c}{a+b+c}}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Biến đổi vế phải của (2.12), ta được

$$\begin{aligned}&\left[(x^{\alpha_1})^{\frac{a}{a+b+c}} (x^{\beta_1})^{\frac{b}{a+b+c}} (x^{\gamma_1})^{\frac{c}{a+b+c}} \right] \left[(x^{\alpha_2})^{\frac{a}{a+b+c}} (x^{\beta_2})^{\frac{b}{a+b+c}} (x^{\gamma_2})^{\frac{c}{a+b+c}} \right] \\ &= x^{\frac{a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1}{a+b+c}} y^{\frac{a\alpha_2+b\beta_2+c\gamma_2}{a+b+c}} = x^0 y^0 = 1,\end{aligned}$$

do $a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 = 0$ và $a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 = 0$.

Suy ra

$$h(x, y) \geq a + b + c = h(1, 1).$$

Vậy

$$\min_{x>0, y>0} h(x, y) = h(1, 1).$$

Ví dụ 2.6. Chọn bộ số 1, 2, 3 và chọn α, β, γ không nguyên để

$$1\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0.$$

Giải. Ta có $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = -2$.

Khi đó

$$f(t) = t^{-2} + 2t^{\frac{1}{2}} + 3t^{\frac{1}{3}} = \frac{2t^{\frac{5}{2}} + 3t^{\frac{7}{3}} + 1}{t^2}.$$

Vậy ta được tam thức bậc $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{3}\right)$ và ta có bất đẳng thức

$$f(t) \geq f(1), \forall t > 0 \Leftrightarrow f(t) \geq 6$$

$$\Leftrightarrow 2t^{\frac{5}{2}} + 3t^{\frac{7}{3}} + 1 \geq 6t^2.$$

Tổng quát: Giả sử $a, b, c > 0, \alpha > \beta > 0$ thì $f(t) = at^\alpha + bt^\beta + c$.

Xét

$$\frac{f(t)}{t^\lambda} = at^{\alpha-\lambda} + bt^{\beta-\lambda} + ct^{-\lambda}.$$

Chọn λ sao cho:

$$a(\alpha - \lambda) + b(\beta - \lambda) - c\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow a\alpha + b\beta = (a + b + c)\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{a\alpha + b\beta}{a + b + c}.$$

Nên ta có

$$\frac{f(t)}{t^{\frac{a\alpha+b\beta}{a+b+c}}} = a \cdot t^{\frac{b(\alpha-\beta)}{a+b+c}} + b \cdot t^{\frac{a(\beta-\alpha)}{a+b+c}} - ct \geq a + b + c, \forall t > 0.$$

Vậy

$$f(t) \geq (a + b + c)t^\lambda, \text{ với } \lambda = \frac{a\alpha + b\beta}{a + b + c}.$$

2.3 Một số dạng tam thức bậc (α, β) có tính đơn điệu liên tiếp bậc $(1, 2)$

Tiếp theo, ta xét lớp hàm đơn điệu liên tiếp bậc $(1, 2)$ và một số tính chất cơ bản của chúng. Đó là lớp hàm đồng thời có đạo hàm bậc nhất và bậc hai không đổi dấu trên $I(p, q)$ (xem [5]).

Ta coi hàm lồi là đơn điệu tăng (thực sự) bậc hai khi và chỉ khi $\varphi''(x) > 0$. Hàm đồng biến là đơn điệu tăng (thực sự) bậc một khi và chỉ khi $\varphi'(x) > 0$.

Nếu hàm $\varphi(x)$ trên (p, q) có tính chất $\begin{cases} \varphi'(x) > 0 \\ \varphi''(x) > 0 \end{cases}$ được gọi là hàm đơn điệu tăng liên tiếp bậc $(1, 2)$ trên khoảng (p, q) . Vì $\varphi'(x) > 0$ được coi là hàm đơn điệu tăng bậc một và $\varphi''(x) > 0$ (hàm lồi) coi là hàm đơn điệu tăng bậc hai.

Tương tự, $\begin{cases} \varphi'(x) < 0 \\ \varphi''(x) < 0 \end{cases}$ được gọi là hàm đơn điệu giảm liên tiếp bậc $(1, 2)$ trên khoảng (p, q) . Vì $\varphi'(x) < 0$ được coi là hàm đơn điệu giảm bậc một và $\varphi''(x) < 0$ (hàm lõm) coi là hàm đơn điệu giảm bậc hai.

$$\begin{cases} \varphi'(x) < 0 \\ \varphi''(x) > 0 \end{cases} \text{ được gọi là hàm đơn điệu giảm - tăng liên tiếp bậc } (1, 2) \text{ trên } (p, q). \\ \begin{cases} \varphi'(x) > 0 \\ \varphi''(x) < 0 \end{cases} \text{ được gọi là hàm đơn điệu tăng - giảm liên tiếp bậc } (1, 2) \text{ trên } (p, q).$$

Định nghĩa 2.1. Hàm số $\varphi(x)$ có một trong bốn tính chất trên được gọi là hàm đơn điệu liên tiếp bậc $(1, 2)$.

Định lý 2.5 (xem [5]). Giả sử $\varphi'(x) > 0, \varphi''(x) > 0$ trên $[p, q]$ và $x, y, z, x_1, y_1, z_1 \in [p, q]$, trong đó $x + y + z = x_1 + y_1 + z_1$. Khi đó

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y_1)} + \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z_1)} \geq \frac{\varphi(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\varphi(y_1)}{\varphi'(y_1)} + \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}.$$

Chứng minh. Khai triển Taylor tới cấp hai, ta có

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) + \frac{\varphi'(x_1)}{1!}(x - x_1) + \frac{\varphi''(x_1)}{2!}(x - x_1)^2. \quad (2.13)$$

Vì $\varphi''(x_1) \geq 0$ trên $[p, q]$, nên $\frac{\varphi''(x_1)}{2!}(x - x_1)^2 \geq 0$.

Từ (2.13) suy ra

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_1) + \varphi'(x_1)(x - x_1).$$

Sử dụng tính lồi của hàm số $\varphi(x)$ trên $[p, q]$, ta có

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_1)} \geq \frac{\varphi(x_1)}{\varphi'(x_1)} + (x - x_1),$$

$$\frac{\varphi(y)}{\varphi'(y_1)} \geq \frac{\varphi(y_1)}{\varphi'(y_1)} + (y - y_1),$$

$$\frac{\varphi(z)}{\varphi'(z_1)} \geq \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)} + (z - z_1).$$

Cộng ba bất đẳng thức trên về theo về, ta được

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y_1)} + \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z_1)} \geq \frac{\varphi(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\varphi(y_1)}{\varphi'(y_1)} + \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)} + x + y + z - (x_1 + y_1 + z_1).$$

Do $x + y + z = x_1 + y_1 + z_1$, nên

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y_1)} + \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z_1)} + x + y + z - (x_1 + y_1 + z_1) = \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y_1)} + \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z_1)}.$$

Vậy

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y_1)} + \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z_1)} \geq \frac{\varphi(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\varphi(y_1)}{\varphi'(y_1)} + \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}.$$

Định lí 2.6 (xem [5]). *Giả sử $\varphi'(x) < 0$, $\varphi''(x) > 0$ trên $[p, q]$ và $x, y, z, x_1, y_1, z_1 \in [p, q]$, trong đó $x + y + z = x_1 + y_1 + z_1$. Khi đó*

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y_1)} + \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z_1)} \leq \frac{\varphi(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\varphi(y_1)}{\varphi'(y_1)} + \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}.$$

Chứng minh. Sử dụng tính lồi của hàm số $\varphi(x)$ trên $[p, q]$, ta có

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_1)} \leq \frac{\varphi(x_1)}{\varphi'(x_1)} + (x - x_1),$$

$$\frac{\varphi(y)}{\varphi'(y_1)} \leq \frac{\varphi(y_1)}{\varphi'(y_1)} + (y - y_1),$$

$$\frac{\varphi(z)}{\varphi'(z_1)} \leq \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)} + (z - z_1).$$

Cộng ba bất đẳng thức trên về theo về, ta được

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y_1)} + \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z_1)} \leq \frac{\varphi(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\varphi(y_1)}{\varphi'(y_1)} + \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)} + x + y + z - (x_1 + y_1 + z_1).$$

Do $x + y + z = x_1 + y_1 + z_1$, nên

$$\frac{\varphi(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\varphi(y_1)}{\varphi'(y_1)} + \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)} + x + y + z - (x_1 + y_1 + z_1) = \frac{\varphi(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\varphi(y_1)}{\varphi'(y_1)} + \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}.$$

Vậy

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y_1)} + \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z_1)} \leq \frac{\varphi(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\varphi(y_1)}{\varphi'(y_1)} + \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}.$$

Nhận xét 2.2. Bằng phương pháp đã trình bày ở trên đối với $\varphi''(x) < 0$ ta cũng nhận được những kết quả tương tự.

Tiếp theo, ta xét một số trường hợp đặc biệt của tam thức bậc (α, β) có tính chất đơn điệu liên tiếp bậc $(1, 2)$ trên $\mathbb{R}^+$.

Bài toán 2.1. Cho $a > 0, b > 0, \alpha > \beta > 1$. Chứng minh rằng, tam thức bậc (α, β) dạng

$$f_{(\alpha, \beta)}(x) = ax^\alpha + bx^\beta + c$$

là đồng biến bậc một và đồng biến bậc hai trên $\mathbb{R}^+$.

Thật vậy, ta phải chứng minh $f_{(\alpha, \beta)}(x) = ax^\alpha + bx^\beta + c$ có

$$f'(x) > 0, f''(x) > 0, \quad \forall x > 0.$$

Ta có

$$f'(x) = \alpha ax^{\alpha-1} + \beta bx^{\beta-1} > 0 \quad \text{vì } \alpha > \beta > 1.$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)ax^{\alpha-2} + \beta(\beta-1)bx^{\beta-2} > 0 \quad \text{vì } \alpha > \beta > 1.$$

Vậy $f'(x) > 0, f''(x) > 0, \quad \forall x > 0$.

Theo định lí 2.5 ta có thể phát biểu định lí đối với tam thức bậc (α, β) trong trường hợp $a > 0, b > 0, \alpha > \beta > 1$.

Định lí 2.7. Giả sử $a > 0, b > 0, \alpha > \beta > 1, x, y, z, x_1, y_1, z_1 > 0$ có $x + y + z = x_1 + y_1 + z_1$. Khi đó, với mọi hàm $f_{(\alpha, \beta)}(x)$ đơn điệu tăng liên tiếp bậc $(1, 2)$ ta có

$$\frac{f(x)}{f'(x_1)} + \frac{f(y)}{f'(y_1)} + \frac{f(z)}{f'(z_1)} \geq \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} + \frac{f(y_1)}{f'(y_1)} + \frac{f(z_1)}{f'(z_1)}. \quad (2.14)$$

Chứng minh. Từ tính chất 1.6 và tính chất 1.8 thì $f_{(\alpha,\beta)}(x)$ đồng biến và lồi trong $\mathbb{R}^+$.

Suy ra (2.14) là trường hợp riêng của định lí 2.5.

Hệ quả 2.2. Giả sử $a > 0, b > 0, \alpha > \beta > 1, x_1, y_1, z_1 > 0$ cho trước. Khi đó, với mọi bộ số $x, y, z > 0$ sao cho $x + y + z = x_1 + y_1 + z_1$ thì

$$\min \left\{ \frac{f(x)}{f'(x_1)} + \frac{f(y)}{f'(y_1)} + \frac{f(z)}{f'(z_1)} \right\} \geq \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} + \frac{f(y_1)}{f'(y_1)} + \frac{f(z_1)}{f'(z_1)}.$$

Bài toán 2.2. Cho $a > 0, b > 0, 1 > \alpha > \beta > 0$. Chứng minh rằng, tam thức bậc (α, β) dạng

$$f_{(\alpha,\beta)}(x) = ax^\alpha + bx^\beta + c$$

là đồng biến bậc một và nghịch biến bậc hai trên $\mathbb{R}^+$.

Thật vậy, ta phải chứng minh $f_{(\alpha,\beta)}(x) = ax^\alpha + bx^\beta + c$ có

$$f'(x) > 0, f''(x) < 0, \quad \forall x > 0.$$

Ta có

$$f'(x) = \alpha ax^{\alpha-1} + \beta bx^{\beta-1} > 0 \quad \text{vì } 1 > \alpha > \beta > 0.$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)ax^{\alpha-2} + \beta(\beta-1)bx^{\beta-2} < 0 \quad \text{vì } 1 > \alpha > \beta > 0.$$

Vậy $f'(x) > 0, f''(x) < 0, \quad \forall x > 0$.

Định lí 2.8. Giả sử $a > 0, b > 0, 1 > \alpha > \beta > 0, x, y, z, x_1, y_1, z_1 > 0$ có $x + y + z = x_1 + y_1 + z_1$. Khi đó

$$\frac{f(x)}{f'(x_1)} + \frac{f(y)}{f'(y_1)} + \frac{f(z)}{f'(z_1)} \leq \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} + \frac{f(y_1)}{f'(y_1)} + \frac{f(z_1)}{f'(z_1)}. \quad (2.15)$$

Chứng minh. Từ tính chất 1.4 và tính chất 1.7 thì $f_{(\alpha,\beta)}(x)$ đồng biến và lồi trong $\mathbb{R}^+$.

Suy ra (2.15) là trường hợp riêng của định lí 2.6.

Nhận xét 2.3. Trong trường hợp tổng quát ta có thể lựa chọn khoảng (p, q) để tam thức bậc (α, β) có tính chất đơn điệu trên khoảng đó.

Bài toán 2.3. Cho $a > 0, b < 0, \alpha > 1 > \beta > 0$. Chứng minh rằng, tam thức bậc (α, β) dạng $f_{(\alpha, \beta)}(x) = ax^\alpha + bx^\beta + c$ là nghịch biến bậc một và đồng biến bậc hai trong khoảng $(0, x_0)$, với $x_0 = \left(-\frac{b\beta}{a\alpha}\right)^{1/(\alpha-\beta)}$.

Thật vậy, ta phải chứng minh $f_{(\alpha, \beta)}(x) = ax^\alpha + bx^\beta + c$ trong khoảng $(0, x_0)$ có $f'(x) < 0, f''(x) > 0$.

Ta có

$$f'(x) = \alpha ax^{\alpha-1} + \beta bx^{\beta-1} < 0 \text{ vì } \alpha > 1 > \beta > 0.$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)ax^{\alpha-2} + \beta(\beta-1)bx^{\beta-2} > 0 \text{ vì } \alpha > 1 > \beta > 0.$$

Vậy $f'(x) < 0, f''(x) > 0, \forall x \in (0, x_0)$.

Bài toán 2.4. Cho $a > 0, b < 0, \alpha > 1 > \beta > 0$. Chứng minh rằng, tam thức bậc (α, β) dạng $f_{(\alpha, \beta)}(x) = ax^\alpha + bx^\beta + c$ là đồng biến bậc một và đồng biến bậc hai trong khoảng $(x_0, +\infty)$, với $x_0 = \left(-\frac{b\beta}{a\alpha}\right)^{1/(\alpha-\beta)}$.

Thật vậy, ta phải chứng minh $f_{(\alpha, \beta)}(x) = ax^\alpha + bx^\beta + c$ trong khoảng $(x_0, +\infty)$ có $f'(x) > 0, f''(x) > 0$.

Ta có

$$f'(x) = \alpha ax^{\alpha-1} + \beta bx^{\beta-1} > 0 \text{ vì } \alpha > 1 > \beta > 0.$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)ax^{\alpha-2} + \beta(\beta-1)bx^{\beta-2} > 0 \text{ vì } \alpha > 1 > \beta > 0.$$

Vậy $f'(x) > 0, f''(x) > 0, \forall x \in (x_0, +\infty)$.

Chương 3

Một số áp dụng

3.1 Bài toán cực trị và bất đẳng thức

Ví dụ 3.1. Cho $\alpha \geq 1$. Xét a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \left(\frac{c}{a+b-c}\right)^\alpha + \left(\frac{a}{b+c-a}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{c+a-b}\right)^\alpha.$$

Giải. Ta phải chứng minh, $M \geq 3$ với mọi tam giác ABC . Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{a+b-c}\right)^\alpha + \alpha - 1 &\geq \alpha \left(\frac{c}{a+b-c}\right), \\ \left(\frac{a}{b+c-a}\right)^\alpha + \alpha - 1 &\geq \alpha \left(\frac{a}{b+c-a}\right), \\ \left(\frac{b}{c+a-b}\right)^\alpha + \alpha - 1 &\geq \alpha \left(\frac{b}{c+a-b}\right). \end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên vế theo vế, ta được

$$M + 3(\alpha - 1) \geq \alpha \left(\frac{c}{a+b-c} + \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} \right).$$

Tiếp theo, ta phải chứng minh

$$P = \frac{c}{a+b-c} + \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} \geq 3.$$

Đặt

$$\begin{cases} a+b-c=z \\ b+c-a=x \\ c+a-b=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{x+y}{2} \\ b = \frac{z+x}{2} \\ a = \frac{y+z}{2} \end{cases}$$

Nên ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{\frac{x+y}{2}}{z} + \frac{\frac{y+z}{2}}{x} + \frac{\frac{z+x}{2}}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) \geq 3. \end{aligned}$$

Vì

$$\frac{1}{2} \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) \geq 1, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \geq 1, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) \geq 1.$$

Suy ra

$$M + 3(\alpha - 1) \geq 3\alpha \Leftrightarrow M \geq 3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $\min M = 3$.

Ví dụ 3.2. Cho $\alpha \geq 1$. Xét a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \left(\frac{3a}{2b+2c-a} \right)^\alpha + \left(\frac{3b}{2c+2a-b} \right)^\alpha + \left(\frac{3c}{2a+2b-c} \right)^\alpha.$$

Giải. Ta phải chứng minh, $M \geq 3$ với mọi tam giác ABC . Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{3a}{2b+2c-a} \right)^\alpha + \alpha - 1 &\geq \alpha \left(\frac{3a}{2b+2c-a} \right), \\ \left(\frac{3b}{2c+2a-b} \right)^\alpha + \alpha - 1 &\geq \alpha \left(\frac{3b}{2c+2a-b} \right), \\ \left(\frac{3c}{2a+2b-c} \right)^\alpha + \alpha - 1 &\geq \alpha \left(\frac{3c}{2a+2b-c} \right). \end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên về theo về, ta được

$$M + 3(\alpha - 1) \geq \alpha \left(\frac{3a}{2b+2c-a} + \frac{3b}{2c+2a-b} + \frac{3c}{2a+2b-c} \right).$$

Tiếp theo, ta chứng minh

$$P = \frac{3a}{2b+2c-a} + \frac{3b}{2c+2a-b} + \frac{3c}{2a+2b-c} \geq 3.$$

Đặt

$$\begin{cases} 2b+2c-a=x \\ 2c+2a-b=y \\ 2a+2b-c=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{2y+2z-x}{9} \\ b=\frac{2x+\frac{9}{2}z-y}{9} \\ c=\frac{2x+\frac{9}{2}y-z}{9} \end{cases}$$

Nên ta có

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\frac{2y+2z-x}{3}}{x} + \frac{\frac{2x+2z-y}{3}}{y} + \frac{\frac{2x+2y-z}{3}}{z} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{2y+2z-x}{x} + \frac{2x+2z-y}{y} + \frac{2x+2y-z}{z} \right) \\
 &= \frac{2}{3} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \right) - 1 \\
 &\geq \frac{2}{3} \times 2 + \frac{2}{3} \times 2 + \frac{2}{3} \times 2 - 1 = 3.
 \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $\min M = 3$.

Ví dụ 3.3. Cho $\alpha > 2$ và xét tam giác ABC có chu vi bằng 3.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^\alpha + 2\left(\frac{b+c}{2}\right)^\alpha + 2\left(\frac{c+a}{2}\right)^\alpha - a^\alpha - b^\alpha - c^\alpha.$$

Giải. Giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó luôn luôn có $a \geq \frac{a+b+c}{3} \geq c$.

Khi đó xảy ra một trong hai trường hợp

$$\frac{a+b+c}{3} \geq b \text{ hoặc } \frac{a+b+c}{3} \leq b.$$

Ta chỉ cần chứng minh $a \geq b \geq \frac{a+b+c}{3} \geq c$.

Thật vậy, ta có

$$a \geq b \geq \frac{a+b+c}{3} \geq \frac{a+b+c}{3} \geq \frac{a+b+c}{3} \geq c,$$

và

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{a+b}{2} \geq \frac{a+c}{2} \geq \frac{a+c}{2} \geq \frac{b+c}{2} \geq \frac{b+c}{2}.$$

Nhật xét rằng, $a+b+c+3\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 2\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{a+c}{2}\right)$.

Áp dụng định lí T.Popoviciu, ta được

$$a^\alpha + b^\alpha + 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^\alpha + c^\alpha \geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^\alpha + 2\left(\frac{a+c}{2}\right)^\alpha + 2\left(\frac{b+c}{2}\right)^\alpha.$$

Theo giả thiết $a+b+c=3$, nên suy ra

$$2\left(\frac{a+b}{2}\right)^\alpha + 2\left(\frac{a+c}{2}\right)^\alpha + 2\left(\frac{b+c}{2}\right)^\alpha - a^\alpha - b^\alpha - c^\alpha \leq 3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $\max M = 3$.

Ví dụ 3.4. (xem [2]). Cho $a, b, c, p > 0$ và $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$a^{n+p} + b^{n+p} + c^{n+p} \geq 3^{1-n-p}(a+b+c)^{n+p}.$$

Giải. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\begin{aligned} \left(3 \frac{a}{a+b+c}\right)^{n+p} + \frac{n+p}{n} - 1 &\geq \frac{n+p}{n} \left(3 \frac{a}{a+b+c}\right)^n, \\ \left(3 \frac{b}{a+b+c}\right)^{n+p} + \frac{n+p}{n} - 1 &\geq \frac{n+p}{n} \left(3 \frac{b}{a+b+c}\right)^n, \\ \left(3 \frac{c}{a+b+c}\right)^{n+p} + \frac{n+p}{n} - 1 &\geq \frac{n+p}{n} \left(3 \frac{c}{a+b+c}\right)^n. \end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên về theo về, ta được

$$\begin{aligned} &3^{n+p} \left[\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^{n+p} + \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^{n+p} + \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^{n+p} \right] + \frac{3p}{n} \\ &\geq \frac{n+p}{n} \cdot 3^n \left[\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^n + \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^n + \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^n \right] \\ &\geq \frac{n+p}{n} \cdot 3^n \cdot 3 \left(\frac{\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c}}{3} \right)^n \\ &\geq \frac{n+p}{n} \cdot 3^n \cdot \frac{1}{3^{n-1}} = 3 + \frac{3p}{n}. \end{aligned}$$

Vậy

$$3^{n+p} \left[\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^{n+p} + \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^{n+p} + \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^{n+p} \right] \geq 3.$$

hay

$$a^{n+p} + b^{n+p} + c^{n+p} \geq 3^{1-n-p}(a+b+c)^{n+p}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.5. (xem [2]). Cho bộ các số dương a, b, c, α, β với $\alpha > \beta$. Chứng minh

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{c}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{a}\right)^\alpha \geq \left(\frac{a}{b}\right)^\beta + \left(\frac{b}{c}\right)^\beta + \left(\frac{c}{a}\right)^\beta.$$

Giải. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha + \frac{\alpha}{\beta} - 1 \geq \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{a}{b}\right)^\beta,$$

$$\left(\frac{b}{c}\right)^\alpha + \frac{\alpha}{\beta} - 1 \geq \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{b}{c}\right)^\beta,$$

$$\left(\frac{c}{a}\right)^\alpha + \frac{\alpha}{\beta} - 1 \geq \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{c}{a}\right)^\beta.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên về theo về, ta được

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{c}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{a}\right)^\alpha + 3\frac{\alpha}{\beta} - 3 \geq \frac{\alpha}{\beta} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^\beta + \left(\frac{b}{c}\right)^\beta + \left(\frac{c}{a}\right)^\beta\right]. \quad (3.1)$$

Mặt khác

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \left[\left(\frac{a}{b}\right)^\beta + \left(\frac{b}{c}\right)^\beta + \left(\frac{c}{a}\right)^\beta\right] \geq 3\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right). \quad (3.2)$$

Cộng (3.1) và (3.2) ta được

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{c}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{a}\right)^\alpha \geq \left(\frac{a}{b}\right)^\beta + \left(\frac{b}{c}\right)^\beta + \left(\frac{c}{a}\right)^\beta.$$

Ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 3.6. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 6$.

Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{12} + \frac{z^4}{108} \geq \frac{23}{12}.$$

Giải. Xét hàm số $f(x) = x^2$, $g(y) = y^3$, $h(z) = z^4$. Khi đó

$$f'(x) = 2x > 0, \text{ và } f''(x) = 2 > 0, \quad \forall x > 0,$$

$$f'(y) = 3y^2 > 0, \text{ và } f''(y) = 6y > 0, \quad \forall y > 0,$$

$$f'(z) = 4z^3 > 0, \text{ và } f''(z) = 12z^2 > 0, \quad \forall z > 0.$$

Vậy nên, ta thu được các bất đẳng thức đối với tam thức bậc (α, β) cụ thể

$$x^2 \geq 1 + 2(x - 1) \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \geq \frac{1}{2} + x - 1,$$

$$y^3 \geq 8 + 12(y - 2) \Leftrightarrow \frac{y^3}{12} \geq \frac{2}{3} + y - 2,$$

$$z^4 \geq 81 + 108(z - 3) \Leftrightarrow \frac{z^4}{108} \geq \frac{81}{108} + z - 3.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên về theo về, ta được

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{12} + \frac{z^4}{108} \geq \frac{23}{12} + x + y + z - 6,$$

hay

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{12} + \frac{z^4}{108} \geq \frac{23}{12}.$$

do

$$x + y + z - 6 = 0.$$

Ví dụ 3.7. Cho $y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 5$.

Chúng minh rằng

$$e^{x+1} + \frac{y^3}{48} + \frac{z^3}{12} \geq 3.$$

Giải. Xét hàm số $f(x) = e^x$ và $g(t) = t^3$. Khi đó

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x > 0, \quad f''(x) = e^x > 0, \quad \forall x, \\ g'(t) &= 3t^2 > 0, \quad g''(t) = 6t > 0, \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Vậy nên, theo bất đẳng thức Bernoulli và tam thức bậc (α, β) ta thu được các bất đẳng thức

$$\begin{aligned} e^x &\geq \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x+1) \Rightarrow e^{x+1} \geq 1 + x + 1, \\ y^3 &\geq 64 + 48(y-4) \Rightarrow \frac{y^3}{48} \geq \frac{4}{3} + y - 4, \\ z^3 &\geq 8 + 12(z-2) \Rightarrow \frac{z^3}{12} \geq \frac{2}{3} + z - 2. \end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên về theo về, ta được

$$e^{x+1} + \frac{y^3}{48} + \frac{z^3}{12} \geq 3 + x + y + z - 5,$$

hay

$$e^{x+1} + \frac{y^3}{48} + \frac{z^3}{12} \geq 3, \quad (\text{do } x + y + z - 5 = 0).$$

Ví dụ 3.8. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y = 5$.

Chúng minh rằng

$$\frac{x^{2010}}{2010 \cdot 2^{2009}} + \frac{y^{2008}}{2008 \cdot 3^{2007}} \geq \frac{50233}{2018040}.$$

Giải. Xét hàm số $f(x) = x^{2010}$ và $g(y) = y^{2008}$. Khi đó

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2010 x^{2009} > 0, \quad f''(x) = 4038090 x^{2008} > 0, \quad \forall x > 0, \\ g'(y) &= 2008 y^{2007} > 0, \quad g''(y) = 4030056 y^{2006} > 0, \quad \forall y > 0. \end{aligned}$$

Vậy nên, ta thu được các bất đẳng thức đối với tam thức bậc (α, β) cụ thể

$$\begin{aligned} x^{2010} &\geq 2^{2010} + 2010 \cdot 2^{2009}(x-2) \Rightarrow \frac{x^{2010}}{2010 \cdot 2^{2009}} \geq \frac{2}{2010} + x - 2, \\ y^{2008} &\geq 3^{2008} + 2008 \cdot 3^{2007}(y-3) \Rightarrow \frac{y^{2008}}{2008 \cdot 3^{2007}} \geq \frac{3}{2008} + y - 3. \end{aligned}$$

Cộng hai bất đẳng thức trên về theo vế, ta được

$$\frac{x^{2010}}{2010 \cdot 2^{2009}} + \frac{y^{2008}}{2008 \cdot 3^{2007}} \geq \frac{2}{2010} + \frac{3}{2008} + x + y - 5,$$

hay

$$\frac{x^{2010}}{2010 \cdot 2^{2009}} + \frac{y^{2008}}{2008 \cdot 3^{2007}} \geq \frac{50233}{2018040}, \quad (\text{do } x + y - 5 = 0).$$

Ví dụ 3.9. Chứng minh rằng

$$2x^6y^6 - 6x^2y^3 + 3y^2 \geq -1, \quad \forall x, y > 0. \quad (3.3)$$

Giải. Ta chuyển bài toán về dạng phân thức chính quy để áp dụng các tính chất của nó.

Chia cả hai vế của (3.3) cho x^2y^3 ta được

$$2x^4y^3 + 3x^{-2}y^{-1} + x^{-2}y^{-3} \geq 6.$$

Nhận xét rằng vế trái là phân thức chính quy hai biến vì

$$\begin{cases} 2 \times 4 + 3 \times (-2) + 1 \times (-2) = 0 \\ 2 \times 3 + 3 \times (-1) + 1 \times (-3) = 0 \end{cases}$$

Áp dụng định lí 2.4 cho phân thức chính quy

$$h(x, y) := 2x^4y^3 + 3x^{-2}y^{-1} + x^{-2}y^{-3}$$

ta thu được

$$h(x, y) \geq h(1, 1) = 6.$$

Từ đây suy ra

$$2x^6y^6 - 6x^2y^3 + 3y^2 \geq -1, \quad \forall x, y > 0.$$

Ví dụ 3.10. Chứng minh rằng

$$4x^{10}y^{-11} + 5x^9y^2 - 17x^5y^{-2} \geq -8, \quad \forall x, y > 0. \quad (3.4)$$

Giải. Ta chuyển bài toán về dạng phân thức chính quy để áp dụng các tính chất của nó.

Chia cả hai vế của (3.4) cho x^5y^{-2} ta được

$$4x^5y^{-9} + 5x^4y^4 + 8x^{-5}y^2 \geq 17, \quad \forall x, y > 0.$$

Nhận xét rằng vế trái là phân thức chính quy hai biến vì

$$\begin{cases} 4 \times 5 + 5 \times 4 + 8 \times (-5) = 0 \\ 4 \times (-9) + 5 \times 4 + 8 \times 2 = 0 \end{cases}$$

Áp dụng định lí 2.4 cho phân thức chính quy

$$h_1(x, y) := 4x^5y^{-9} + 5x^4y^4 + 8x^{-5}y^2$$

ta thu được

$$h_1(x, y) \geq h_1(1, 1) = 17.$$

Từ đây suy ra

$$4x^{10}y^{-11} + 5x^9y^2 - 17x^5y^{-2} \geq -8, \quad \forall x, y > 0.$$

3.2 Khảo sát phương trình và bất phương trình

Trong mục này ta xét mối quan hệ giữa tam thức bậc (α, β) với phương trình bậc ba và phân thức chính quy.

3.2.1 Tam thức bậc (3,1)

Nhận xét rằng mọi đa thức bậc ba khuyết bậc một hoặc bậc hai đều là trường hợp riêng của tam thức bậc (α, β) . Đặc biệt, đa thức bậc ba khuyết bậc hai đóng vai trò quan trọng trong khảo sát phương trình và bất phương trình bậc ba tổng quát. Khi đó, đa thức bậc ba chính là tam thức bậc (3,1) dạng

$$f_{(3,1)}(x) = ax^3 + bx + c, \quad a \neq 0. \quad (3.5)$$

Tiếp theo, ta khảo sát chi tiết các tính chất của tam thức bậc (3,1) dạng:

$$f_{(3,1)}(x) = ax^3 + bx + c, \quad a \neq 0$$

và xét các ứng dụng của chúng.

Ta chứng minh các kết quả sau đây.

Định lí 3.1. Mọi đa thức bậc 3 dạng

$$g(t) = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta, \quad \alpha \neq 0,$$

đều đưa được về tam thức bậc (3,1) dạng (3.5) bằng phép biến đổi tịnh tiến $t = x - \frac{\beta}{3\alpha}$.

Chứng minh. Thật vậy, đặt $t = x - \frac{\beta}{3\alpha}$. Khi đó ta có thể viết:

$$\begin{aligned} g\left(x - \frac{\beta}{3\alpha}\right) &= \alpha\left(x - \frac{\beta}{3\alpha}\right)^3 + \beta\left(x - \frac{\beta}{3\alpha}\right)^2 + \gamma\left(x - \frac{\beta}{3\alpha}\right) + \delta \\ &= \alpha x^3 + \left(\frac{\beta^2}{3\alpha} - \gamma\right)x + \frac{2\beta}{27\alpha^2} + \delta. \end{aligned}$$

Vậy ta thu được

$$f_{(3,1)}(x) := g\left(x - \frac{\beta}{3\alpha}\right) = ax^3 + bx + c,$$

trong đó $a = \alpha, b = \frac{\beta^2}{3\alpha} - \gamma, c = \frac{2\beta}{27\alpha^2} + \delta$.

Tiếp theo, ta chứng minh rằng mọi tam thức bậc $(3, 1)$ dạng (3.5) đều đưa được về tam thức bậc $(3, 1)$ có một trong các dạng sau

$$h_{(3,1)}(y) = 4y^3 - 3y + m,$$

$$h_{(3,1)}(y) = 4y^3 + 3y + m,$$

bằng phép biến đổi đồng dạng $x = \lambda y$, với cách chọn λ thích hợp.

Định lí 3.2. Mọi tam thức bậc $(3, 1)$ dạng (3.5) đều đưa được về tam thức bậc $(3, 1)$ dạng sau

$$h_{(3,1)}(y) = 4y^3 - 3y + m,$$

khi $ab < 0$ và

$$h_{(3,1)}(y) = 4y^3 + 3y + m,$$

khi $ab > 0$ bằng phép biến đổi lần lượt là $x = 2\sqrt{\frac{-b}{3a}} y$ và $x = 2\sqrt{\frac{b}{3a}} y$.

Chứng minh. Thật vậy, với $x = 2\sqrt{\frac{b}{3a}} y$ khi đó ta được

$$\begin{aligned} f\left(2\sqrt{\frac{b}{3a}} y\right) &= a\left(2\sqrt{\frac{b}{3a}} y\right)^3 + b\left(2\sqrt{\frac{b}{3a}} y\right) + c \\ &\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3a}}{2b\sqrt{b}} \cdot f\left(2\sqrt{\frac{b}{3a}} y\right) = 4y^3 + 3y + \frac{3c\sqrt{3a}}{2b\sqrt{b}}. \end{aligned}$$

Vậy ta thu được

$$h(y) := \frac{3\sqrt{3a}}{2b\sqrt{b}} \cdot f\left(2\sqrt{\frac{b}{3a}} y\right) = 4y^3 + 3y + m,$$

trong đó $m = \frac{3c\sqrt{3a}}{2b\sqrt{b}}$.

Tương tự, đối với $x = 2\sqrt{\frac{-b}{3a}} y$ khi đó ta được:

$$f\left(2\sqrt{\frac{-b}{3a}} y\right) = a\left(2\sqrt{\frac{-b}{3a}} y\right)^3 + b\left(2\sqrt{\frac{-b}{3a}} y\right) + c.$$

Vậy ta thu được

$$h(y) := \frac{3\sqrt{3a}}{2b\sqrt{-b}} \cdot f\left(2\sqrt{\frac{-b}{3a}} y\right) = 4y^3 - 3y + m,$$

trong đó $m = \frac{3c\sqrt{3a}}{2b\sqrt{-b}}$.

3.2.2 Khảo sát phương trình bậc ba

Trước hết ta xét phương trình bậc ba đầy đủ trong một số trường hợp đặc biệt (xem [6]).

Bài toán 3.1. Giải phương trình

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0 \quad (3.6)$$

khi biết một nghiệm $x = x_0$.

Giải. Theo giả thiết thì

$$ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} (3.6) &\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d \\ &\Leftrightarrow a(x^3 - x_0^3) + b(x^2 - x_0^2) + c(x - x_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)[ax^2 + (ax_0 + b)x + ax_0^2 + bx_0 + c] = 0. \end{aligned}$$

Xét phương trình

$$ax^2 + (ax_0 + b)x + ax_0^2 + bx_0 + c = 0.$$

Ta có

$$\Delta = (ax_0 + b)^2 - 4a(ax_0^2 + bx_0 + c).$$

i) Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình (3.6) có nghiệm duy nhất $x = x_0$.

ii) Nếu $\Delta \geq 0$ thì phương trình (3.6) có các nghiệm

$$\begin{cases} x = x_0 \\ x_{1,2} = \frac{-(ax_0 + b) \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Vậy phương trình (3.6) có ba nghiệm là x_0, x_1 và x_2 .

Hệ quả 3.1. 1) Nếu x_0 là nghiệm của (3.6) thì điều kiện cần và đủ để phương trình (3.6) có ba nghiệm phân biệt là

$$\begin{cases} ax^2 + (ax_0 + b)x + ax_0^2 + bx_0 + c \neq 0 \\ \Delta = (ax_0 + b)^2 - 4a(ax_0^2 + bx_0 + c) > 0 \end{cases}$$

2) Nếu x_0 là nghiệm của (3.6) thì có thể phân tích

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_0)f(x) \quad (3.7)$$

trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai xác định.

3) Nếu x_1, x_2, x_3 là nghiệm của (3.6) thì

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

và có công thức Vi-ét

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a}. \end{aligned}$$

Bài toán 3.2. Giải phương trình

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0, \quad (3.8)$$

với

$$ac^3 = db^3 \quad (a \neq 0, \quad d \neq 0). \quad (3.9)$$

(Khi đó phương trình (3.8) - (3.9) có tên gọi: Phương trình hồi quy bậc hai).

Giải. Từ (3.9) suy ra

$$1) \text{ Nếu } c = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ và } (3.8) \Leftrightarrow ax^3 + d = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}}.$$

2) Nếu $c \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$ và (3.8) $\frac{d}{a} = \left(\frac{c}{b}\right)^3$.

Đặt $\frac{c}{b} = -x_0$ thì $c = -bx_0$, $d = -ax_0^3$.

Thế vào (3.8), ta được

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 - bx_0x - ax_0^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow a(x^3 - x_0^3) + bx(x - x_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - x_0)[ax^2 + (ax_0 + b)x + ax_0^2] &= 0. \end{aligned}$$

Vậy $x = x_0 = -\frac{c}{b}$ là một nghiệm.

Nếu $\Delta = (ax_0 + b)^2 - 4a^2x_0^2 \geq 0$ thì phương trình còn có nghiệm

$$x = \frac{-(ax_0 + b) \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Bài toán 3.3. Tìm hệ thức liên hệ giữa các hệ số của phương trình

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

biết rằng phương trình này có ba nghiệm mà một nghiệm bằng tổng hai nghiệm còn lại.

Giải. Giả sử $x_1 + x_2 = x_3$.

Theo định lí Vi-ét đối với phương trình bậc ba, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b \\ x_1x_2x_3 = -c \end{cases}$$

Thay $x_1 + x_2 = x_3$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$x_1 + x_2 = x_3 = -\frac{a}{2}. \quad (3.10)$$

Kết hợp (3.10) với phương trình thứ hai của hệ ta có

$$x_1x_2 = b - \frac{a^2}{4}. \quad (3.11)$$

Từ (3.10), (3.11) và phương trình thứ ba của hệ ta suy ra hệ thức

$$a^3 - 4ab + 8c = 0. \quad (3.12)$$

Vấn đề ngược lại là nếu phương trình bậc ba $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có các hệ số thoả mãn hệ thức (3.12) và có ba nghiệm thì liệu ba nghiệm đó có thoả mãn $x_1 + x_2 = x_3 = -\frac{a}{2}$ không?

Bài toán 3.4. Nếu phương trình

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad (3.13)$$

có các hệ số thỏa mãn hệ thức

$$a^3 - 4ab + 8c = 0, \quad (3.14)$$

thì có ít nhất một nghiệm là $x = -\frac{a}{2}$.

Giải. Từ (3.14) ta có $c = \frac{a}{2}\left(b - \frac{a^2}{4}\right)$.

Biến đổi

$$x^3 + ax^2 + bx + c = x^2\left(x + \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2}x\left(x + \frac{a}{2}\right) + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)x + \frac{a}{2}\left(b - \frac{a^2}{4}\right).$$

Như vậy nếu phương trình (3.13) thỏa mãn (3.14) thì có một nghiệm là $x_1 = -\frac{a}{2}$ và

(i) Nếu $\Delta = 5a^2 - 16b < 0$ thì phương trình chỉ có một nghiệm thực $x = -\frac{a}{2}$.

(ii) Nếu $\Delta = 5a^2 - 16b > 0$ thì phương trình có thêm hai nghiệm nữa.

(iii) Nếu $\Delta = 5a^2 - 16b = 0$ thì phương trình có thêm một nghiệm kép.

Trong hai trường hợp (ii) và (iii) thì $x_1 + x_2 = x_3 = -\frac{a}{2}$.

Ví dụ 3.11. Giải phương trình

$$36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Giải. Chuyển phương trình về dạng

$$x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{36}x + \frac{1}{36} = 0.$$

Nhận xét thấy các hệ số của hệ phương trình thỏa mãn hệ thức $a^3 - 4ab + 8c = 0$, nên phương trình có ít nhất một nghiệm là

$$x_1 = -\frac{a}{2} = -\frac{1}{6}.$$

Biến đổi về trái của phương trình trên ta được

$$x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{36}x + \frac{1}{36} = \left(x - \frac{1}{6}\right)\left(x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}\right).$$

Giải phương trình $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$ ta tìm được hai nghiệm là

$$x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{3}.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt

$$x_1 = -\frac{1}{6}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{3}.$$

Ví dụ 3.12. Cho $a \neq 0$. Khai triển biểu thức

$$(1 + a\sqrt[6]{x})^6 + (1 - a\sqrt[6]{x})^6$$

ta được một đa thức bậc ba theo biến x , kí hiệu đa thức đó là $P(x)$.

Giải phương trình $P(x) = 0$.

Giải. Sử dụng công thức khai triển nhị thức và đặt $a^2x = t$ ta được đa thức bậc ba theo t .

$$Q(x) = t^3 + 15t^2 + 15t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t^2 + 14t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow = -1, t = -7 \pm \sqrt{48}.$$

Vậy

$$x_1 = -\frac{1}{a^2}, x_{2,3} = \frac{-7 \pm \sqrt{48}}{a^2}$$

là các nghiệm của phương trình $P(x) = 0$.

Sau đây là phương pháp giải phương trình bậc ba với hệ số thức tùy ý, không sử dụng số phức. Với phương pháp này có thể giải được mọi phương trình bậc ba.

Nhận xét 3.1. Phương trình bậc ba đầy đủ tổng quát ta đưa được về phương trình khuyết bậc hai tức là được tam thức bậc (3, 1).

Bài toán 3.5. (xem [6]). Giải phương trình

$$4x^3 - 3x = m \text{ với } |m| \leq 1.$$

Giải. Vì $|m| \leq 1$, Đặt $m = \cos \gamma = \cos(\gamma \pm 2\pi)$, với $\gamma \in [0, \pi]$.

Khi đó

$$\cos \gamma = \cos \left(3 \cdot \frac{\gamma}{3} \right) = 4 \cos^3 \frac{\gamma}{3} - 3 \cos \frac{\gamma}{3}.$$

Nên

$$4x^3 - 3x = 4 \cos^3 \frac{\gamma}{3} - 3 \cos \frac{\gamma}{3}.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm

$$x_1 = \cos \frac{\gamma}{3}; x_{2,3} = \cos \frac{\gamma \pm 2\pi}{3}.$$

Bài toán 3.6. (xem [6]). Giải phương trình

$$4x^3 - 3x = m \text{ với } |m| > 1.$$

Giải. Vì $|m| > 1$, Đặt $m = \frac{1}{2} \left(d^3 + \frac{1}{d^3} \right)$, với $d^3 = m \pm \sqrt{m^2 - 1}$.

Khi đó phương trình trở thành

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2} \left(d^3 + \frac{1}{d^3} \right).$$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm là

$$x = \frac{1}{2} \left(d + \frac{1}{d} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 - 1}} \right).$$

Ta chứng minh x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Thật vậy, vì x_0 là nghiệm của phương trình $4x^3 - 3x = m$, nên ta có

$$4x_0^3 - 3x_0 = m.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 4x^3 - 3x &= 4x_0^3 - 3x_0 \\ \Leftrightarrow 4(x^3 - x_0^3) - 3(x - x_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - x_0)(4x^2 + 4xx_0 + 4x_0^2 - 3) &= 0, \end{aligned}$$

Vì phương trình $4x^2 + 4x \cdot x_0 + 4x_0^2 - 3 = 0$ có

$$\Delta' = 4x_0^2 - 4(4x_0^2 - 3),$$

hay

$$\Delta' = 12 - 12x_0^2 = 12(1 - x_0^2) < 0, \text{ (do } |x_0| > 1).$$

Nên phương trình không có nghiệm.

Suy ra $x = x_0$ là nghiệm duy nhất.

Vậy phương trình $4x^3 - 3x = m$ chỉ có một nghiệm duy nhất là

$$x = \frac{1}{2} \left(d + \frac{1}{d} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 - 1}} \right).$$

Bài toán 3.7. (xem [6]). Giải phương trình

$$4x^3 + 3x = m.$$

Giải. Đặt $m = \frac{1}{2}\left(d^3 - \frac{1}{d^3}\right)$, với $d^3 = m \pm \sqrt{m^2 + 1}$.

Khi đó phương trình trở thành

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2}\left(d^3 - \frac{1}{d^3}\right).$$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm là

$$x = \frac{1}{2}\left(d - \frac{1}{d}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 + 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 + 1}}\right).$$

Ta chứng minh x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Thật vậy, xét hàm số $f(x) = 4x^3 + 3x$.

Ta có $f'(x) = 12x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vì vậy $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài toán 3.8. (xem [6]). Giải và biện luận phương trình

$$t^3 + at^2 + bt + c = 0.$$

Giải. Đặt $t = y - \frac{a}{3}$. Khi đó có thể viết phương trình đã cho dưới dạng

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 - py = q,$$

$$\text{với } p = \frac{a^3}{3} - b, q = -\frac{2a^3}{27} + \frac{ab}{3} - c.$$

1) Nếu $p = 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $y = \sqrt[3]{q}$.

2) Nếu $p > 0$. Đặt $y = 2\sqrt{\frac{p}{3}} x$.

Khi đó ta được phương trình

$$4x^3 - 3x = m \text{ với } m = \frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{p}}.$$

a) Nếu $|m| \leq 1$, Đặt $m = \cos \gamma = \cos(\gamma \pm 2\pi)$.

Khi đó

$$\cos \gamma = \cos\left(3 \cdot \frac{\gamma}{3}\right) = 4 \cos^3 \frac{\gamma}{3} - 3 \cos \frac{\gamma}{3}.$$

Do vậy phương trình có ba nghiệm

$$x_1 = \cos \frac{\gamma}{3}; \quad x_{2,3} = \cos \frac{\gamma \pm 2\pi}{3}.$$

b) Nếu $|m| > 1$, Đặt $m = \frac{1}{2}\left(d^3 + \frac{1}{d^3}\right)$, với $d^3 = m \pm \sqrt{m^2 - 1}$.

Khi đó phương trình có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{1}{2}\left(d + \frac{1}{d}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 - 1}}\right).$$

3) Nếu $p < 0$. Đặt $y = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} x$, ta sẽ được phương trình

$$4x^3 + 3x = m.$$

Đặt $m = \frac{1}{2}\left(d^3 + \frac{1}{d^3}\right)$, với $d^3 = m \pm \sqrt{m^2 + 1}$.

Khi đó phương trình có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{1}{2}\left(d - \frac{1}{d}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 + 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 + 1}}\right).$$

Từ nghiệm x ta tính được nghiệm y và từ đó suy ra nghiệm t là

$$t = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 + 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 + 1}}\right) - \frac{a}{3}.$$

Ví dụ 3.13. Giải phương trình

$$4(3 + 2\sqrt{2})^x = (\sqrt{2} - 1)^x + 3.$$

Giải. Nhận xét

$$(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1,$$

$$3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2.$$

Suy ra

$$(\sqrt{2} - 1)^x = (\sqrt{2} + 1)^{-x},$$

$$(3 + 2\sqrt{2})^x = [(\sqrt{2} + 1)^x]^2.$$

Đặt $(\sqrt{2} + 1)^x = 2t, t > 0$, ta được phương trình

$$4t^2 = \frac{1}{2t} + 3$$

$$\Leftrightarrow 4t^3 - 3t = \frac{1}{2}. \quad (3.15)$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{3} = \cos \frac{7\pi}{3}.$$

Suy ra (3.15) có 3 nghiệm

$$t_1 = \cos \frac{\pi}{9}; \quad t_2 = \cos \frac{5\pi}{9}; \quad t_3 = \cos \frac{7\pi}{9}.$$

Nghiệm t_2, t_3 không thỏa mãn điều kiện $t > 0$.

Vậy ta có

$$(\sqrt{2} + 1)^x = 2 \cos \frac{\pi}{9} \Leftrightarrow x = \log_{\sqrt{2}+1} \left(2 \cos \frac{\pi}{9} \right). \quad (3.16)$$

Kết luận: phương trình đã cho có nghiệm duy nhất được xác định theo (3.16).

Ví dụ 3.14. Phương trình $4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2}$ có bao nhiêu nghiệm?

Giải. Điều kiện $1 - x^2 \geq 0$ hay $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \cos t$ ($t \in [0, \pi]$), ta có $\sqrt{1-x^2} = \sin t$.

Phương trình đã cho trở thành

$$4 \cos^3 t - 3 \cos t = \sin t \Leftrightarrow \cos 3t = \sin t.$$

Do đó ta có

$$t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \text{ hoặc } t = -\frac{\pi}{4} + l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

+) Xét $t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, do $t \in [0, \pi]$ nên $t = \frac{\pi}{8}$ hoặc $t = \frac{5\pi}{8}$,

suy ra $x = \cos \frac{\pi}{8}$ hoặc $x = \cos \frac{5\pi}{8}$.

+) Xét $t = -\frac{\pi}{4} + l\pi$, do $t \in [0, \pi]$ nên $t = \frac{3\pi}{4}$, suy ra $x = \cos \frac{3\pi}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt

$$x = \cos \frac{\pi}{8}, \quad x = \cos \frac{5\pi}{8}, \quad x = \cos \frac{3\pi}{4}.$$

Ví dụ 3.15. Giải phương trình $y^3 + 3y = 24$.

Giải. Đặt $y = 2x$, ta được

$$4x^3 + 3x = 12.$$

Ta viết $12 = \frac{1}{2} \left(d^3 - \frac{1}{d^3} \right)$, với $d^3 = 12 \pm \sqrt{145}$, ta được

$$x = \frac{1}{2} \left(d - \frac{1}{d} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{12 + \sqrt{145}} + \sqrt[3]{12 - \sqrt{145}} \right).$$

$$\text{Vậy } y = 2x \text{ với } x = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{12 + \sqrt{145}} + \sqrt[3]{12 - \sqrt{145}} \right).$$

Ví dụ 3.16. Giải phương trình

$$8x^3 + 24x^2 - 6x - 10 - 3\sqrt{6} = 0. \quad (3.17)$$

Giải. Ta có

$$(3.17) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{10 + 3\sqrt{6}}{8} = 0.$$

Đặt $x = y - 1$. Khi đó ta được phương trình

$$y^3 - \frac{9}{4}y - \frac{3\sqrt{6}}{8} = 0. \quad (3.18)$$

Đặt $y = \sqrt{3} \, t$. Khi đó ta được phương trình

$$4t^3 - 3t = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3.19)$$

$$\text{Vì } \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = \cos \frac{9\pi}{4} = \cos \frac{7\pi}{4}.$$

Suy ra phương trình (3.19) có ba nghiệm là

$$t_1 = \cos \frac{\pi}{12}, \quad t_2 = \cos \frac{3\pi}{4}, \quad t_3 = \cos \frac{7\pi}{12}.$$

Suy ra phương trình (3.18) có ba nghiệm là

$$y_1 = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{12}, \quad y_2 = \sqrt{3} \cos \frac{3\pi}{4}, \quad y_3 = \sqrt{3} \cos \frac{7\pi}{12}.$$

Vậy phương trình (3.17) có ba nghiệm là

$$x_1 = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{12} - 1, \quad x_2 = \sqrt{3} \cos \frac{3\pi}{4} - 1, \quad x_3 = \sqrt{3} \cos \frac{7\pi}{12} - 1.$$

Ví dụ 3.17. Giải bất phương trình

$$16x^3 + 12x(x+1)^2 \geq 3(x+1)^3. \quad (3.20)$$

Giải. Nhận xét rằng $x = -1$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

1) Xét $x > -1$. Khi đó

$$(3.20) \Leftrightarrow 4\left(\frac{x}{x+1}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{x+1}\right) \geq \frac{3}{4}. \quad (3.21)$$

Đặt

$$\frac{x}{x+1} = t \Leftrightarrow x = \frac{t}{1-t}, t < 1. \quad (3.22)$$

Khi đó ta có bất phương trình

$$4t^3 + 3t \geq \frac{3}{4}. \quad (3.23)$$

Nhận xét rằng vế trái là hàm số đồng biến và

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 2\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right].$$

Suy ra

$$(3.23) \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

Kết hợp với (3.22) suy ra $x = \frac{t}{1-t}$, với $\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \leq t < 1$ là nghiệm.

2) Tương tự ta xét $x < -1$, ta được

$$(3.20) \Leftrightarrow 4\left(\frac{x}{x+1}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{x+1}\right) \leq \frac{3}{4}.$$

Đặt

$$\frac{x}{x+1} = t \Leftrightarrow x = \frac{t}{1-t}, t > 1. \quad (3.24)$$

Ta được

$$4t^3 + 3t \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow t \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

Kết hợp với (3.24) suy ra (3.20) không có nghiệm trong khoảng $(-\infty, -1)$.

Kết luận: Bất phương trình đã cho có nghiệm

$$x = \frac{t}{1-t}, \text{ với } \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \leq t < 1.$$

Ví dụ 3.18. Giải và biện luận phương trình

$$x^4 + (2a-1)x^2 + a^2 - 1 = 0.$$

Giải. Đặt $x^2 = t, t \geq 0$ ta được phương trình

$$f(t) := t^2 + (2a-1)t + a^2 - 1 = 0, t \geq 0. \quad (3.25)$$

1) Nếu $f(0) = a^2 - 1$ hay $a = \pm 1$.

a) Với $a = 1$ thì phương trình (3.25) có nghiệm $t = 0$ và $t = -1$ (loại).

Vậy $x = 0$.

b) Với $a = -1$ thì phương trình (3.25) có nghiệm $t = 0$ và $t = 3$.

Vậy $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$.

2) Nếu $a \neq \pm 1$.

a) Điều kiện để $f(t)$ có một nghiệm lớn hơn 0 là

$$1f(0) = a^2 - 1 < 0.$$

Từ đó ta được $-1 < a < 1$.

Khi đó

$$x^2 = \frac{1 - 2a + \sqrt{-4a + 5}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1 - 2a + \sqrt{-4a + 5}}{2}}.$$

b) Điều kiện để $f(t)$ có hai nghiệm lớn hơn 0 là

$$\begin{cases} 1f(0) = a^2 - 1 > 0 \\ \Delta = -4a + 5 > 0 \\ \frac{1 - 2a}{2} > 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $a < -1$. Khi đó

$$x = \pm \sqrt{\frac{1 - 2a \mp \sqrt{-4a + 5}}{2}}.$$

Kết luận:

i) Nếu $a < -1$ thì phương trình đã cho có bốn nghiệm

$$x = \pm \sqrt{\frac{1 - 2a \mp \sqrt{-4a + 5}}{2}}.$$

ii) Nếu $a = -1$ thì phương trình đã cho có ba nghiệm $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$.

iii) Nếu $-1 < a < 1$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x = \pm \sqrt{\frac{1 - 2a + \sqrt{-4a + 5}}{2}}.$$

iv) Nếu $a = 1$ thì phương trình đã cho có một nghiệm $x = 0$.

v) Nếu $a > 1$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 3.19. Cho bộ số $m, n, p \in \mathbb{R}$. Giải phương trình

$$\frac{x^3 + m^3}{(x + m)^3} + \frac{x^3 + n^3}{(x + n)^3} + \frac{x^3 + p^3}{(x + p)^3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x - m}{x + m} \cdot \frac{x - n}{x + n} \cdot \frac{x - p}{x + p} = 0. \quad (3.26)$$

Giải. Nhận xét rằng

$$\frac{x^3 + m^3}{(x + m)^3} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(x - m)^2}{(x + m)^2}.$$

Vì vậy phương trình (3.26) tương đương với phương trình

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(x - m)^2}{(x + m)^2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(x - n)^2}{(x + n)^2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(x - p)^2}{(x + p)^2} - \\ - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x - m}{x + m} \cdot \frac{x - n}{x + n} \cdot \frac{x - p}{x + p} = 0 \end{aligned}$$

Đặt

$$\frac{x - m}{x + m} = a; \quad \frac{x - n}{x + n} = b; \quad \frac{x - p}{x + p} = c.$$

Với chú ý rằng

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot a^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot b^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot c^2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot abc = 0.$$

Có thể biến đổi được về dạng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (ab + c)^2 = (1 - a^2)(1 - b^2). \quad (3.27)$$

Thay các giá trị a, b, c theo biến x, m, n, p ta được

$$(ab + c)^2 = \frac{4[x^3 + (mn - mp - np)x]^2}{(x + m)^2(x + n)^2(x + p)^2},$$

$$(1 - a^2) = \frac{4mx}{(x + m)^2},$$

$$(1 - b^2) = \frac{4nx}{(x + n)^2}.$$

Vậy (3.27) có dạng

$$x^2[x^2 + 2(x + p)\sqrt{mn} + mn - mp - np][x^2 - 2(x + p)\sqrt{mn} + mn - mp - np] = 0.$$

Giải ra ta được các nghiệm của phương trình là

$$x_1 = x_2 = 0,$$

$$x_{3,4} = \pm(\sqrt{mp} - \sqrt{np}) - \sqrt{mn},$$

$$x_{5,6} = \sqrt{mn} \pm (\sqrt{mp} + \sqrt{np}).$$

Ví dụ 3.20. Xác định tất cả các giá trị a và b sao cho

$$a \leq \sin^{10} x + 2 \cos^2 x \leq b, \forall x.$$

Giải. Đặt $\sin^2 x = t$ thì t nhận mọi giá trị trong đoạn $[0, 1]$. Xét tam thức

$$f(t) = t^5 - 2t + 2, 0 \leq t \leq 1.$$

Ta có

$$f'(t) = 5t^4 - 2$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[4]{\frac{2}{5}}$$

Lập bảng

t	0	$\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$	1
$f'(t)$		-	0
			+
$f(t)$	2		1

$$\text{Bài toán đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2 \\ f\left(\sqrt[4]{\frac{2}{5}}\right) \geq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2 \\ a \leq 2 - \frac{8}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

Ví dụ 3.21. Xác định các giá trị a để bất phương trình

$$x^2 + (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} \geq a.$$

có nghiệm.

Giải. Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $(1 - x^2)^{\frac{3}{2}} = t$ thì t nhận mọi giá trị trong đoạn $[0, 1]$.

Khi đó $x^2 = 1 - t^{\frac{2}{3}}$ và $x^2 + (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} = 1 - t^{\frac{2}{3}} + t$.

Vậy cần xác định các giá trị a để $f(t) = 1 - t^{\frac{2}{3}} + t \geq a$ có nghiệm trong đoạn $[0, 1]$.

$$\Leftrightarrow \max_{[0,1]} f(t) \geq a. \quad (3.28)$$

Ta có

$$f'(t) = 1 - \frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Lập bảng

t	0	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	1
$f'(t)$		− 0 +	
$f(t)$	1		1

Vậy $\max_{[0,1]} f(t) = 1$.

Suy ra (3.28) $\Leftrightarrow a \leq 1$.

Kết luận: Bất phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow a \leq 1$.

Kết luận

Luận văn *Tam thức bậc (α, β) và ứng dụng* đã giải quyết được những vấn đề sau:

1. Tổng quan các tính chất cơ bản và phương pháp tam thức bậc hai.
2. Hệ thống các tính chất cơ bản và phương pháp tam thức bậc (α, β) .
3. Trình bày các bài toán liên quan đến tam thức bậc (α, β) như bất đẳng thức Bernoulli, bất đẳng thức AM-GM, phân thức chính quy và các dạng bất đẳng thức đối với hàm số đơn điệu liên tiếp bậc $(1, 2)$ để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức.
4. Xét các ví dụ áp dụng trong phương trình, bất phương trình, bất đẳng thức và các bài toán cực trị.

Kết quả của Luận văn góp phần nâng cao chất lượng dạy và học Toán ở trường phổ thông trong giai đoạn hiện nay.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Văn Mậu, 2009, *Một số chuyên đề đại số bồi dưỡng học sinh giỏi*, NXB Giáo Dục.
2. Nguyễn Văn Mậu, 2006, *Bất đẳng thức, định lý và áp dụng*, NXB Giáo Dục.
3. Nguyễn Văn Mậu, 2007, *Các bài toán nội suy và áp dụng*, NXB Giáo Dục.
4. Nguyễn Văn Mậu, 2002, *Một số bài toán chọn lọc về dãy số*, NXB Giáo Dục.
5. Nguyễn Văn Mậu, 2007, *Chuyên đề chọn lọc lượng giác và áp dụng*, NXB Giáo Dục.
6. Nguyễn Văn Mậu, 1994, *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình*, NXB Giáo Dục.
7. *Các bài thi Olympic Toán trung học phổ thông Việt Nam (1990-2006)*, NXB Giáo Dục.