SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT, BẬC HAI ĐỂ CHỨNG MINH MỘT BẤT ĐẲNG THỨC .

Trần Đặng Mạnh Hoàng

Trong khuôn khổ đang học chương trình lớp 10 toán chuyên. Với sự động viên của thầy đang trực tiếp dạy toán trên lớp, tôi mạnh dạn viết chuyên đề này. Vì trình độ bắt đầu tập tễnh nghiên cứu nên chắc chắn có nhiều sự thiếu sót , sơ xuất xin các bạn đọc thông cảm.

I:PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ BẶC NHẤT

Từ tính đơn điệu của hàm số bật nhất $f(x) = ax + b$ ta rút ra tính chất sau:

Tính chất: *Nếu* $f(m) \geq 0$ *và* $f(n) \geq 0$ *thì* $f(x) \geq 0$ *với mọi* $x \in [m; n]$ *(*)*

Nếu $f(m) \leq 0$ *và* $f(n) \leq 0$ *thì* $f(x) \leq 0$ *với mọi* $x \in [m; n]$.*(**)*

PHƯƠNG PHÁP Từ một bài toán có nhiều biến, ta biến đổi đưa bài toán về hàm $f(x) = ax + b$ *của biến x thích hợp.*

+Xét $a = 0$ ta có $f(x) = b$. Khi đó ta sẽ chứng minh $b \geq 0$ hoặc $b \leq 0$

+Xét $a \neq 0$ ta có f(x) là hàm số bậc nhất, xác định khoảng giá trị của biến đó túc là $x \in [m; n]$.

Ví dụ 1:

Cho x,y,z là các số thuộc khoảng [0;2]

Chứng minh: $2(x + y + z) - (xy + yz + zx) \leq 4$(*)

Giải:

(*) $\Leftrightarrow (2 - y - z)x + 2y + 2z - yz - 4 \leq 0$

Coi vế trái bất đẳng thức trên là một hàm số bậc nhất với biến số x:

$$f(x) = (2 - y - z)x + 2y + 2z - yz - 4$$

Ta cần chứng minh $f(x) \leq 0$. Thật vậy:

Khi $2 - y - z = 0 \Leftrightarrow y + z = 2$ ta có $f(x) = 2(y + z) - yz - 4 = - yz \leq 0$ (1)

Khi $2 - y - z \neq 0$ thì f(x) là hàm số bậc nhất

Vì $x \in [0;2]$ nên ta sẽ chứng minh $f(0) \leq 0$ và $f(2) \leq 0$.

Thật vậy $f(0) = 2y + 2z - yz - 4 = (y - 2)(2 - z) \leq 0$ (vì $y,z \in [0;2]$) (2)

$f(2) = - yz \leq 0$ (3)

Vậy $f(x) \leq 0$

Bđt (*) đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đẳng thức xảy ra ở một trong 3 biến đổi (1); (2); (3)

Dấu bằng ở (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} yz = 0 \\ y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

Khi đó x tùy ý

Dấu bằng ở (2) ⇔ $x = 0, y = z = 2$

Dấu bằng ở (3) ⇔ $x = 2, y = z = 0$

Vậy đẳng thức xảy ra khi $(x;y;z) = (0;0;2); (2;2;0); (x\in R;2;0)$ và tất cả các hoán vị vòng quanh của 3 cặp số trên

Nhận xét: *Khi sử dụng phương pháp hàm số bậc nhất thì dấu bằng xảy ra ở f(m) và f(n) tức là khi x = m hoặc x = n . Ta sẽ dựa vào f(m) và f(n) để tìm ra giá trị của các biến khác. Và nếu trong bất đẳng thức vai trò của các biến là tương đương thì giá trị để đẳng thức xảy ra là các các cặp biến có giá trị vòng quanh.*

Ví dụ 2:Cho $x,y,z \geq 0$ và $x + y + z = 3$. Chứng minh $x^2 + y^2 + z^2 +xyz \geq 4$.(*)

Giải: (*) ⇔ $(y+z)^2 - 2yz + x^2 + xyz \geq 4$

⇔ $(3 - x)^2 - 2yz + x^2 + xyz \geq 4$

⇔ $yz(x - 2) +2x^2 - 6x + 5 \geq 0$

Đặt $t = yz$, ta coi vế trái bất đẳng thức trên là hàm số ẩn t:

$$f(t) = (x - 2)t + (2x^2 - 6x + 5)$$

Ta cần chứng minh $f(t) \geq 0$. Thật vậy:

Khi $x - 2 = 0$ ⇔ $x = 2$ ta có $f(t) = 2.2^2 - 6.2 + 5 = 1 > 0$

Khi $x - 2 \neq 0$ ⇔ $x \neq 2$ ta có f(t) là hàm số bậc nhất

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$t = yz \leq (\frac{y+z}{2})^2 = \frac{(3-x)^2}{4}$.

Suy ra $0 \leq t \leq \frac{(3-x)^2}{4}$

Mà ta có $f(0) = 2x^2 - 6x + 5 = 2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2} > 0$

$$f(\frac{(3-x)^2}{4}) = (x-2)\frac{(3-x)^2}{2} + 2x^2 - 6x + 5 = \frac{1}{4}(x-1)^2(x+2) \geq 0$$

Vậy theo tính chất của hàm bậc nhất ta có $f(t) \geq 0$

Ta có đpcm.

(Đẳng thức xảy ra ⇔ $x = y = z = 1$)

Nhận xét: *Đối với các bất đẳng thức trên, ta hoàn toàn có thể áp dụng các bất đẳng thức quen thuộc để chứng minh nhưng cách này rất dài dòng và rắc rối, đôi khi đưa bài toán vào bế tắc. Sử dụng phương pháp hàm số sẽ giúp bài toán được giải quyết nhanh gọn, vì giảm đáng kể số lượng các biến đổi, chỉ phải chứng minh các bất đảng thức rất đơn giản bằng cách sử dụng tính chất về dấu của của đa thức bậc một hay tam thức bậc hai quen thuộc.*

Ứng dụng:

Bài toán 1:

Cho $a,b,c \in (0;1)$. Chứng minh $abc + (1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq 1$ (*)

Giải:

Coi (*) là một hàm số bậc nhất với ẩn a:

$f(a) = abc + (1 - a)(1 - b)(1 - c) - 1$

Vì $a \in (0;1)$ mà ta có:

$f(0) = (1 - b)(1 - c) - 1 = bc - b - c = b(c - 1) - c \le 0$ (1)

$f(1) = bc - 1 \le 0$ (2)

Do đó $f(a) \le 0$

Ta có đpcm

Đẳng thức xảy ra ở (*) ⇔ đẳng thức xảy ra ở 1 trong 2 (1) hoặc (2)

(1) xảy ra đẳng thức ⇔ a = 0 và b(c – 1) – c = 0 ⇔ a = 0; b= 0; c= 1

(2) xảy ra đẳng thức ⇔ a = 1 và bc – 1 = 0 ⇔ a = 0 ; b = 1; c = 1

Đẳng thức xảy ra ⇔ trong 3 số a,b,c có 2 số bằng 0 số còn lại bằng 1, hoặc có hai số bằng 1 số còn lại bằng 0.

Bài toán 2:

Cho $x,y,z,t \in [0;1]$ Chứng minh $x(1 - y) + y(1 - z) + z(1 - t) + t(x - 1) < 2$ (*)

Giải:

$x(1 - y) + y(1 - z) + z(1 - t) + t(x - 1) - 2 \le 0$

Coi vế trái là một hàm số bậc nhất với ẩn số x

$f(x) = x(1 - y) + y(1 - z) + z(1 - t) + t(x - 1) - 2$

Vì $x \in [0;1]$ mà ta có

$f(0) = y(1 - z) + z(1 - t) - t - 2 < 0$ (vì $1 - z \le 0$ $1 - t \le 0$)

$f(1) = (1 - y) + y(1 - z) + z(1 - t) - 2 = - y + y(1 - z) + z(1 - t) - 1 < 0$

Do đó $f(x) < 0$

Ta có đpcm.

Nhận xét: *Trong 1 số trường hợp, ta không cần phải biến đổi vế trái về thành dạng ax + b mà có thể để nguyên và thay giá trị của biến vào , với điều kiện là ta chứng minh được đó là các hàm số bậc nhất chứ không phải là bậc khác.(như trong các bài toán 1,2)*

Ta nhận thấy điểm chung của các ví dụ trên là chứng minh các bất đẳng thức có x,y,z hoặc x^2, y^2, z^2 và xyz. Ta thấy nếu sử dụng bất đẳng thức Cô si thì có thể đưa ra các bất đẳng thức trái dấu và không thể tiếp tục việc chứng minh, việc sử dụng phương pháp đánh giá hàm một biến giúp việc chứng minh trở nên rất dễ dàng bởi vì thay vì phải chứng minh bằng các bất đẳng thức phụ ta chỉ phải giải quyết các bất đẳng thức đơn giản như f(m) ≥ 0 và f(n) ≥ 0.

Bài toán 3: (BMO 1979)

Cho $x,y,z \ge 0$ và $x + y + z = 1$.Chứng minh $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \ge \frac{1}{4}$

Giải: Ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \ge \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x) + 6xyz \ge \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3(x+y)(y+z)(z+x) + 6xyz \ge \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -2xyz + (1-x)(1-y)(1-z) \le \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -2xyz + 1 - x - y + xy - z + xz + yz - xyz \le \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x(-3yz - 1 + y + z) - y - z + yz - \frac{3}{4} \le 0$$

Đặt f(x) = $x(-3yz-1+y+z) - y - z + yz - \frac{3}{4}$,ta cần cm f(x) $\le$ 0 (*)

Nếu $-3yz - 1 + y + z = 0 \Leftrightarrow$ y+z = 1 và yz = 0 khi đó f(x) = $\frac{-7}{4} < 0$

Nếu $-3yz - 1 + y + z \ne 0$ ta có $-3yz - 1 + y + z < 0$(do y + z < 1 và yz < 0)

Khi đó ta có f(x) là hàm số bậc nhất nghịch biến

Mà x $\ge$0 nên f(x) $\le$ f(0) = $-y - z + yz - \frac{3}{4}$

Ta có: $yz \le (\frac{y+z}{2})^2 = \frac{(y+z)^2}{4} \le \frac{1}{4}$ nên yz $-\ \frac{3}{4} < 0$ mà –y–z $\le$0

Do đó f(x) $\le$ f(0) < 0

$\Rightarrow$(*) đúng

Ta có đpcm

Theo bài toán trên hàm số f(x) đat GTLN là f(0) tại x = 0 do đó dấu bằng xảy ra khi x = 0 . Khi đó y + z = 1 và $y^3 + z^3 = \frac{1}{4}$ giải ra ta được y = z = $\frac{1}{2}$

Như vậy,do tính tổng quát, ta có thể kết luận đẳng thức xảy ra khi 1 trong 3 số bằng 0, 2 số còn lại bằng nhau và bằng $\frac{1}{2}$.

Bài toán 4:

Cho x,y,z $\ge$ 0, x + y + z = 1. Chứng minh $4(x^3 + y^3 + z^3) + 15xyz \ge 1$(*)

Giải:

(*) $\Leftrightarrow$ $x^3 + y^3 + z^3 + \frac{15}{4}xyz \ge \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow (y+z)^3 - 3yz(y+z) + x^3 + \frac{15}{4}xyz \ge \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{27}{4}x-3\right)yz+(1-x)^3+x^3-\frac{1}{4}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{27}{4}x-3\right)yz+3x^2-3x+\frac{3}{4}\geq 0$$

Đặt t = yz coi vế trái bất đẳng thức trên là hàm số bậc nhất với biến số t:

f(t) = $\left(\frac{27}{4}x-3\right)t+3x^2-3x+\frac{3}{4}$, ta cần chứng minh f(t) $\geq$ 0

Nếu $\frac{27}{4}x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{9}$, khi đó, f(t) = $\frac{1}{108}\geq 0$

Nếu $\frac{27}{4}x-3\neq 0$ thì f(t) là hàm số bậc nhất

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có

t = $yz\leq\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=\frac{(1-x)^2}{4}$.

$\Rightarrow\ 0\leq t\leq\frac{(1-x)^2}{4}$

Mà f(0) = $3x^2-3x+\frac{3}{4}=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$

$$f\left(\frac{(1-x)^2}{4}\right)=\frac{(27x-12)(1-x)^2}{16}+3x^2-3x+\frac{3}{4}=\frac{3x(3x-1)^2}{16}\geq 0$$

Theo tính chất của hàm số bậc nhất suy ra f(t) $\geq$ 0

Do đó ta suy ra đpcm.

Bài toán 5: (IMO 1975)

Cho a,b,c $\geq$ 0. Chứng minh $2(a^3+b^3+c^3)+3abc\geq(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$ (*)

Giải:

Ta thấy bất đẳng trên là bất đẳng thức thuần nhất. Chính vì vậy để đơn giản ta sẽ sử dụng phương pháp thuần nhất

Giả sử a + b + c = 1

Ta có $a^3+b^3+c^3=a^3+(b+c)^3-3bc(b+c)$

$=a^3+(1-a)^3-3bc(1-a)$

$=1-3a+3a^2-3bc(1-a)$

Do đó VT = $-6bc(1-a)+6a^2-6a+2+3abc=bc(9a-6)+6a^2-6a+2$

VP = $a^2+b^2+c^2=a^2+(b+c)^2-2bc$

$$= a^2 + (1-a)^2 - 2bc = 2a^2 - 2a + 1 - 2bc$$

(*) ⇔ $bc(9a-6) + 6a^2 - 6a + 2 \geq 2a^2 - 2a + 1 - 2bc$

⇔ bc(9a – 4) +$4a^2 - 4a + 1 \geq 0$

Đặt t = bc và coi vế trái bất đẳng thức trên là hàm số bậc nhất của t

f(t) = (9a – 4)t + $4a^2 - 4a + 1$, ta cần chứng minh f(t) $\geq$ 0 (**)

Nếu 9a – 4 = 0 ⇔ thì f(t) = $4a^2 - 4a + 1 = (2a-1)^2 = \frac{1}{81} > 0$

Nếu 9a – 4 $\neq 0$ thì f(t) là hàm số bậc nhất

Ta có $t = bc \leq (\frac{b+c}{2})^2 = \frac{(1-a)^2}{4}$

$\Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{(1-a)^2}{4}$

Mà f(0) = $(2a-1)^2 \geq 0$ (1)

$$f(\frac{(1-a)^2}{4}) = \frac{(1-a)^2}{4}(9a-4) + (2a-1)^2 = a(3a-1)^2 \geq 0 \quad (2)$$

Do đó f(t) $\geq$ 0 $\Rightarrow$ (**) đúng

Ta có đpcm

Đẳng thức xảy ra ⇔ đẳng thức xảy ra ở 1 trong 2 biến đổi (1),(2)

Đẳng thức xảy ra ở (1) ⇔ a = $\frac{1}{2}$. Khi đó ⇔ $\begin{cases} bc = 0 \\ b + c = \frac{1}{2} \end{cases}$ ⇔ ⇔ $\begin{cases} b = 0 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$ v ⇔ $\begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}$

Đẳng thức xảy ra ở (2) ⇔ a = b = c = $\frac{1}{3}$

Do a,b,c có vai trò tương đương và do ta đã giả sử a + b + c = 1nên ta có thể kết luận đẳng thức xảy ra khi có 1 trong 2 điều kiện sau

i) có 2 số bằng nhau và số còn lại bằng 0
ii) 3 số bằng nhau

Nhận xét:*Trong một số trường hợp gặp bất đẳng thức rắc rối như bài toán 5 với bất đẳng thức thuần nhất, tức là nếu bất đẳng thức đúng với x,y,z,.. thì nó cũng đúng với tx,ty,tz,… với t* $\in R$ *,để đơn giản hóa bài toán ta có thể sử dụng phương pháp chuẩn hóa tức là giả sử x + y + z hay xyz bằng một số nào đó bất kì rồi đưa bài toán rắc rối về một bất đẳng thức đơn giản hơn.Giá trị của x + y + z hay xyz ta có thể chọn tùy ý để thuận lợi cho hướng đi của bài toán.*

Phương pháp trong các bài toán trên mặc dù xét tính đơn điệu của hàm số bậc nhất nhưng ta hoàn toàn có thể áp dụng với các bài toán có đa thức bậc 2 hoặc bậc 3, bằng cách đưa *bậc 2 hoặc bậc 3 về bậc nhất như các bài toán 3 và 4.Khi thực hiện như thế ta thường sử dụng các công thức biến đổi sau:*

Cho $x + y + z = a$

Đối với bậc 2: $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

$= a^2 - 2(xy + yz + zx)$ hoặc $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y)^2 + z^2 = (a - z)^2 + z^2$

Đối với bậc 3: $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x)$

$= a^3 - 3(a - z)(a - x)(a - y)$

lúc này ta đã đưa hàm bậc2 hoặc bậc 3 về hàm bậc nhất và tiếp tục sử dụng các tính chất trực quan về tính đơn điệu của hàm số để chứng minh tiếp.

Đối với hàm bậc 4 ta có thể đưa về hàm bậc 2 rồi tiếp tục đưa về hàm bậc nhất

Nhận xét:

Sử dụng tính chất hàm tăng liên tục, ta nhận xét rằng hàm số bậc nhất f(x) = ax + b đạt GTNN hoặc GTLN tại một trong 2 đầu mút của biến.

Nếu hàm số đồng biến trong khoảng [a;b] thì hàm số đạt min tại x = a và max tại x = b

Nếu hàm số nghịch biến trong khoảng [a;b] thì hàm số đạt min tại x = b và max tại x =a

Nếu không xác định được hàm số đồng biến hay nghịch biến thì ta so sánh f(a) và f(b) như sau;

+ Nếu f(a) ≤ f(b) thì min f(x) = f(a) và max f(x) = f(b).

+ Nếu f(a) ≥ f(b) thì min f(x) = f(b) và max f(x) = f(a).

Một nhận xét khá quan trọng khác là ta có min $\{(f(a);f(b)\} \le$ *f(x)* $\le$ *max*$\{f(a);f(b)\}$ *(*)*

Ta sẽ vận dụng nhận xét (*) vào những bài toán có dạng như dưới đây.

Bài toán 6: Cho x,y,z không âm và x + y + z = 1.

Chứng minh $4(xy + yz + zx) \le 9xyz + 1$

Giải:

Không giảm tính tổng quát giả sử $z \le y \le x$ Từ đó suy ra $\frac{1}{3} \le x \le 1$

Ta có $4(xy + yz + zx) \le 9xyz + 1$

$\Leftrightarrow (9yz - 4y - 4z)x + 1 - 4yz \ge 0$

Xét hàm số f(x) = $(9yz - 4y - 4z)x + 1 - 4yz$ trên đoạn $\left[\frac{1}{3};1\right]$

Khi x = 1 thì y = z = 0 (do x,y,z không âm và x + y + z = 1) do đó f(1) = 1

Khi x = $\frac{1}{3}$ thì y = z = $\frac{1}{3}$(do $z \le y \le x$ và x + y + z = 1) do đó f($\frac{1}{3}$) = 0

Ta có $f(x) \ge \min\left\{f(1);f(\frac{1}{3})\right\} = 0$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$

Nhận xét: Ta có thể tổng quát hóa bài toán trên đây như sau:

Bài toán 7: Cho x,y,z không âm và $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A theo m với $A = xy + yz + zx + mxyz$.

Giải:

Theo bài toán trên đây ta có

$$A = xy + yz + zx - \frac{9}{4}xyz + (m + \frac{9}{4})xyz \le \frac{1}{4} + (m + \frac{9}{4})xyz$$

Nếu $m < \frac{9}{4}$ thì ta có $A \le \frac{1}{4} + (m + \frac{9}{4})xyz \le \frac{1}{4}$

Vậy $\max A = \frac{1}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $(x;y;z) = (\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$ và các hoán vị vong quanh của nó

Nếu $m > \frac{9}{4}$ thì ta có

$$A \le \frac{1}{4} + (m + \frac{9}{4})xyz \le \frac{1}{4} + (m + \frac{9}{4})(\frac{x+y+z}{3})^3$$

$$= \frac{1}{4} + (m + \frac{9}{4})\frac{1}{27} = \frac{m+9}{27}$$

Vậy $\max A = \frac{m+9}{27}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Phương pháp sử dụng hàm số bậc nhất tuy rất có hiệu quả trong việc hỗ trợ các bài toán chứng minh bất đẳng thức nhưng cũng có một số hạn chế đó là chỉ có thể chứng minh bất đẳng thức chứ không thể tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất. Chính vì vậy muốn khắc phục hạn chế này ta sẽ sử dụng hàm số bậc hai thay vì bậc nhất. Mặt khác, trong các bài toán có x^2, y^2, z^2 nếu muốn sử dụng hàm bậc nhất thì phải biến đổi bậc hai về bậc nhất, việc này đôi khi rất phức tạp.

Trong trường hợp này phương pháp hàm bậc hai sẽ đạt hiệu quả hơn.

II:PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ BẬC HAI:

Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \ne 0)$ có:

Nếu a > 0 hàm số đạt cực tiểu tại x $= \frac{-b}{2a}$, khi đó giá trị cực tiểu là f($\frac{-b}{2a}$), hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ và đồng biến trên đoạn $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right]$

Nếu a < 0 hàm số đạt cực đại tại x $= \frac{-b}{2a}$,khi đó giá trị cực đại là f($\frac{-b}{2a}$), hàm số đồng biến trên đoạn $\left[-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ và nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right]$

Ứng dụng:

Bài toán 8:

Cho A,B,C là số đo 3 góc của tam giác. Chứng minh A = cosA + cosB + cosC $\le \frac{3}{2}$

Giải:

Ta có cosB + cosC = 2 $\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \le 2\cos\frac{B+C}{2}$ (vì $\cos\frac{B-C}{2} \le 1$)

$$= 2\cos(90^0 - \frac{A}{2}) = 2\sin\frac{A}{2} = 2\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

Do đó: A = cosA + cosB + cosC ≤cosA + $2\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

Đặt t = $2\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \Rightarrow \cos A = 1-2t^2$

$\Rightarrow$ A $\le -2t^2 + 2t + 1$

Đặt f(x) $= -2t^2 + 2t + 1$

Ta thấy f(x) là hàm số bậc hai có hệ số a = –2 nên hàm số đạt cực đại tại x = $\frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2}$

Do đó A $\le$ f($\frac{-1}{2}$) = $\frac{3}{2}$

Ta có đpcm

Đẳng thức xảy ra ⇔ A = B = C = 60^0

Bài toán 9: Cho x,y,z không âm và x + y + z = 1 Tìm GTNN của biểu thức

A = $x^2 + y^2 + z^2 + 4xyz$

Giải:

Vì x,y,z không âm và x + y + z = 1 nên ít nhất một trong ba số x,y,z thuộc đoạn $\left[0,\frac{1}{3}\right]$. Giả sử z $\in \left[0,\frac{1}{3}\right]$

Ta có x + y + z = 1 nên y = 1 – z – x thay vào A, ta có

A = $2(1-2z)x^2 - 2(2z^2-3z+1)x + 2z^2 - 2z + 1$

Đặt f(x) = $2(1-2z)x^2 - 2(2z^2-3z+1)x + 2z^2 - 2z + 1$

Ta có f(x) là hàm số bậc hai với hệ số a = 2(1– 2z) > 0 (vì z $\in \left[0,\frac{1}{3}\right]$)

nên hàm số f(x) đạt GTNN khi x = $\frac{-b}{2a} = \frac{1-z}{2} \Rightarrow y = \frac{1-z}{2}$, thay vào A ta có:

A $\geq f(\frac{1-z}{2}) = z^3 - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}$

Đặt g(z) $= z^3 - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}$

g(z) = $\frac{1}{2}(2z^3 - z^2 + 1) = \frac{1}{2}(2z^3 - z^2 - 1 + 2) = \frac{1}{2}(z-1)(2z^2+z+1)+1$

Vì z $\in \left[0,\frac{1}{3}\right]$ nên z – 1 < 0 (1)

Hàm số bậc hai $2z^2 + z + 1$ có hệ số a = 2 > 0 nên hàm số này đồng biến trên đoạn $\left[\frac{-b}{2a},+\infty\right]$ tức là $\left[\frac{-1}{4},+\infty\right]$. Do đó ở đây trong đoạn $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ hàm số $2z^2 + z + 1$ sẽ đồng biến (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ g(z) $= \frac{1}{2}(z-1)(2z^2+z+1)+1$ sẽ nghịch biến trên đoạn $\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

Do đó A$\geq$ g(z) $\geq$ g$(\frac{1}{3}) = \frac{13}{27}$

Ta được minA $= \frac{13}{27}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Nhận xét:

1) Nếu n số thực không âm có tổng bằng xthì ít nhất một trong n số đó thuộc đoạn $\left[0,\frac{x}{n}\right]$ *và một số thuộc đoạn* $\left[\frac{(n-1)x}{n},x\right]$*. Ta có thể áp dụng tính chất này để xét khoảng của biến.*

ta có thể chứng minh nhận xét trên đây như sau:

Giả sử có n số $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ *và* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = x$

Vậy thì $x = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ge a_1 + a_1 + \ldots + a_1 \ge na_1$

Do đó $a_1 \le \frac{x}{n}$ *tức là* a_1 *thuộc* $\left[0,\frac{x}{n}\right]$

Ta có đpcm đầu tiên

Hoàn toàn tương tự ta chưng minh được nhận xét còn lại

2) Khi tìm GTNN (hoặc GTLN) của biểu thức P = P(x,y,z) với x,y,z thỏa mãn điều kiện nào đó ta có thể làm như sau:

+ Tính y theo x, z dựa vào điều kiện của giả thiết.

+ Viết P = f(x), coi z là một tham số.

+ Tìm GTNN hoặc GTLN của f(x) ta được P = f(x) ≥ g(z) (hoặc f(x) ≤ g(z))

+ Tìm GTNN hoặc GTLN của g(z) từ đó suy ra GTNN hoặc GTLN của f(x) tức là GTNN hoặc GTLN của P.

Trong một số trường hợp khi phát sinh ra hàm số g(z) có thể là bậc ba ta có thể biến đổi đưa về tích của một hàm số bậc nhất và một hàm số bậc hai rồi xét tính đồng biến hay nghịch biến của hàm số bậc hai đó, nhưng trong một số trường hợp không thể làm như vậy thì ta phải chứng minh tính đơn điệu của hàm số g(z) bằng cách sủ dụng công thức đạo hàm.

Tính đơn điệu của hàm số giúp ta giải quyết rất nhiều những bài toán bất đẳng thức phức tạp.

Bài toán 10:Cho $x, y \in R$ thỏa mãn $y \le 0; x^2 + x = y + 12$. Tìm GTLN của biểu thức $P = xy + x + 2y + 17$

Giải:

Từ giả thiết ta có $y = x^2 + x - 12 \le 0$ hay $-4 \le x \le 3$.

Khi đó ta có P = $x^3 + 3x^2 - 9x - 7$. Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7; x \in [-4;3]$

Ta biến đổi f(x) về dạng f(x) = (x – 3)$(x^2 + 6x + 9)$+ 20

Ta có x – 3 ≤ 0 do $-4 \le x \le 3$

Xét hàm số $x^2 + 6x + 9$ trên đoạn [–4;3] là hàm số bậc hai

Ta có bảng biến thiên của hàm số $x^2 + 6x + 9$ sau đây

:

x	$-\infty$	-4	-3	3	$+\infty$
x^2+6x+9	$+\infty$	1	0	36	$+\infty$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số f(x) như sau:

x	$-\infty$	-4	-3	1	3	$+\infty$
f(x) = x^3+3x^2-9x-7	$-\infty$	1	20	-12	20	$-\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy
Max f(x) = 20 đạt được khi và chỉ khi x = –3 khi đó y = - 6
hoặc khi x = 3 và y = 0
Nhận xét: Nhiều khi khi xét tính đơn điệu của các hàm số phức tạp bậc cao ta cần phải lập các bảng biến thiên của các hàm số đó rồi dựa vào bảng biến thiên để tìm cực trị của biểu thức.

Bài toán 11: Cho $x^2+y^2=x+y$. Tìm GTNN,GTLN của biểu thức $P=x^3+y^3+x^2y+y^2x$

Giải:

Đặt $t=x+y$ từ giả thiết ta có $2xy=(x+y)^2-(x+y)=t^2-t$ hay $xy=\dfrac{t^2-t}{2}$.

Áp dụng BĐT $(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)=2(x+y)$ hay $t^2\le 2t$ suy ra $0\le t\le 2$. Khi đó biểu thức $P=(x+y)^3-2xy(x+y)=t^2$

Do đó Max P = 4 đạt dược khi $t=2$ hay $x+y=2$ và $xy=1$ suy ra $x=1;y=1$

Ta có min P=0 khi $t=0$ hay $x=0;y=0$.

Bài toán 12: Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh

Giải:

Đặt $t=x+y$ từ giả thiết ta có $z=1-t$ và $0<t<1$. Áp dụng BĐT $(x+y)^2\ge 4xy$ hay $xy\le\dfrac{t^2}{4}$

Khi đó $A=\dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{yz}=\dfrac{t}{xy(1-t)}\geq\dfrac{4}{-t^2+t}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{4}{-t^2+t}$

Ta có hàm số bậc hai $g(t) = -t^2+t$ có hệ số $a = -1<0$ nên hàm số này đạt giá trị lớn nhất tại $x = \dfrac{-b}{2a}=\dfrac{1}{2}$

Ta có bảng biến thiên sau đây

$$\begin{array}{c|ccccc}
t & -\infty & & \frac{1}{2} & & +\infty \\
\hline
 & +\infty & & & & +\infty \\
g(t)=-t^2+t & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & \frac{1}{4} & &
\end{array}$$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t)=\dfrac{4}{-t^2+t}$ như sau:

$$\begin{array}{c|ccccc}
t & -\infty & & \frac{1}{2} & & +\infty \\
\hline
 & & & 16 & & \\
f(t)=\dfrac{4}{-t^2+t} & & \nearrow & & \searrow & \\
 & +\infty & & & & +\infty
\end{array}$$

Nhìn vào bảng biến thiên ta có:

$f(t)=\dfrac{4}{-t^2+t}\geq 16$

Vậy minA = 16 đạt được khi $t = \dfrac{1}{2}$ tức là $x=\dfrac{1}{4};y=\dfrac{1}{4};z=\dfrac{1}{2}$

Nhận xét:

Ta cũng có thể biến đổi biểu thức trên đây bằng cách sau đây

$$A=\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}\geq\frac{4}{xz+yz}\geq\frac{4}{z(x+y)}\geq\frac{4}{z(1-z)}\geq\frac{4}{-z^2+z}$$

Rồi chứng minh tiếp như cách trên đây.

Nhận xét: Bài toán này khá đơn giản ta chỉ cần thế z theo x,y và đổi biến $t = x + y$ chúng ta đã chuyển được bài toán về một biến.

Điều đó làm bất đẳng thức trở nên dễ dàng hơn

Ta có thể chứng minh được hàm số f(x) = $\frac{a}{g(x)}\ (g(x) \neq 0)$

Nếu a > 0 và g(x) đồng biến thì f(x) nghịch biến

g(x) nghịch biến thì f(x) đồng biến

***Cm**: Nếu a > 0 và g(x) đồng biến*

Với $x_1 \geq x_2$ *thì* $g(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow \frac{a}{g(x_1)} \leq \frac{a}{g(x_2)} \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Tức là f(x) nghịch biến

Ngược lại ta cũng có thể chứng minh được

Nếu a <0 và g(x) đồng biến thì f(x) đồng biến

g(x) nghịch biến thì f(x) nghịch biến

Nhiều khi ta có thể chứng minh bất đẳng thức sau khi dự đoán. Ta có thể minh họa cách này qua bài toán sau đây:

Bài toán 13: Cho a,b,c là các số thực không âm,khác nhau từng đôi một thỏa mãn $ab + bc + ca = 4$.

Chứng minh rằng : $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \geq 1.$

Giải:

Không mất tính tổng quát giả sử $c = \min\{a,b,c\}$ khi đó ta có

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}$$

Khi đó ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (ab + bc + ca)\left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right) \geq 4$$

Mà lại có:

$$\Leftrightarrow (ab + bc + ca)\left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right) \geq ab\left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right)$$

Vì thế ta sẽ đi chứng minh:

$$ab\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}\right)\geq 4$$

Ta có:

$$ab\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}\right)=\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}.$$

Khảo sát hàm số $f(t)=\frac{1}{t-2}+t$ với t > 2 ta sẽ tìm được

$\min f(t)=f(3)=4$.

Vậy bài toán đã giải quyết xong.

Phương pháp sử dụng dấu của tam thức bậc hai:

Định lí: Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ với $a\neq 0$ và

$\Delta=b^2-4ac$

Nếu $\Delta<0$ thì f(x) cùng dấu với a với mọi x

Nếu $\Delta=0$ thì f(x) cùng dấu với a với mọi x trừ $x=\frac{-b}{2a}$

Nếu $\Delta>0$ thì f(x) có 2 nghiệm phân biêt x_1 và x_2 ta có:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		af(x)>0	0	af(x) < 0	0	af(x) >0	

Ứng dụng:

Bài toán 14: Cho a,b,c là 3 cạnh của tam giác.Chưng minh rằng

$$b^2x^2-(b^2+c^2-a^2)x+c^2>0$$

Giải:

Ta coi vế trái bất đẳng thức trên là một tam thức bậc hai

f(x) = $b^2x^2-(b^2+c^2-a^2)x+c^2$

Ta có

$$\Delta=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2$$

$$=\left[(b^2+c^2-2bc)-a^2\right]\left[(b^2+c^2+2bc)-a^2\right]$$

$$=(b-c+a)(b-c-a)(b+c+a)(b+c-a)<0$$

Do đó f(x) cùng dấu với b^2 với mọi x tức là f(x) > 0 với mọi x (đpcm)

Bài toán 15:Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=\frac{4x^2+3x+1}{4x^2-3x+1}$$

Giải:

Gọi a là giá trị nhỏ nhất của hàm số trên

Ta có $\frac{4x^2+3x+1}{4x^2-3x+1}-a \geq 0$ (1)

Vì $4x^2-3x+1>0\forall x$

Nên $(1)\Leftrightarrow 4x^2+3x+1\geq a(4x^2-3x+1)$

$\Leftrightarrow (4-4a)x^2+(3+3a)x+(1-a)\geq 0$ (2)

Đặt f(x) = $(4-4a)x^2+(3+3a)x+(1-a)$

Nếu a = 1 ta có f(x) = 6x không thỏa mãn điều (2)

Nếu a $\neq 1$ ta có f(x) là hàm số bậc hai. Để f(x) ≥ 0 với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-4a>0 \\ \Delta=(3+3a)^2-4(4-4a)(1-a)\leq 0 \end{cases}$$

Giải ra ta được $\frac{1}{7}\leq a\leq 1$ ta chọn a $=\frac{1}{7}$

Vậy min y $=\frac{1}{7}$ khi đó $x=\frac{-1}{2}$

Nhận xét: *Ngoài cách sử dụng tính đông biến nghich biến của hàm số bậc hai ta còn có thể sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai như 2 ví dụ trên. Ở bài toán 2 trên ngoài cách sử dụng dấu của tam thức bậc hai ta còn có thể sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trinh bậc hai. Đây được gọi là phương pháp miền giá trị hàm số*