TÌM TÒI GIẢI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC

Hà Công Nguyên, Phan Bảo Trung, Nguyễn Tấn Sơn, Lê Bảo Ngọc

MỤC LỤC

Chương I – KIẾN THỨC CƠ SỞ

Chương đầu tiên dành để trình bày toàn bộ lí thuyết và kiến thức cơ sở được nhóm tác giả sử dụng xuyên suốt chuyên đề. Những vấn đề về lí thuyết được trình bày, chứng minh chi tiết và có ví dụ minh họa để nắm vững lí thuyết, cách áp dụng hơn.

1.1. <u>Bất đẳng thức dạng trung bình căn</u>:

Ta có tính chất : "Tổng các trung bình căn lớn hơn hoặc bằng trung bình căn của tổng."

<u>Ví dụ 1</u>: **[4]**

Với $a_i, b_i (i=\overline{1,m})$ là các số thực dương bất kì, chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2} \ge \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2}$$

Giải:

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp.
Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với n = 2.

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}\ge\sqrt{\left(a_1+a_2\right)^2+\left(b_1+b_2\right)^2} \qquad (1)$$

Bình phương hai vế ta nhận được

(1) $\Rightarrow \sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}\ge a_1a_2+b_1b_2$

$$\Leftrightarrow (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\ge (a_1a_2+b_1b_2)^2$$

$$\Leftrightarrow (a_1b_2-a_2b_1)^2\ge 0$$

Giả sử bất đẳng thức đúng với n = k.

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+...+\sqrt{a_k^2+b_k^2}\ge\sqrt{(a_1+a_2+...+a_k)^2+(b_1+b_2+...+b_k)^2}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với n = k + 1.

Ta có $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{a_i^2+b_i^2}=\left(\sum_{i=1}^{k}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\right)+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2}$

Suy ra $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\ge\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{k}b_i\right)^2}+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2}$ (theo giả thiết quy nạp)

$$\ge\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{k+1}b_i\right)^2}$$ (áp dụng (1))(đpcm)

<u>Ví dụ 2</u>: [4]

Với $a_i,b_i,c_i\in R(i=\overline{1,n})$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2+c_i^2}\ge\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)^2}$$

Giải:

Chứng minh bất đẳng thức đúng với n = 2

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}\ge\sqrt{\left(a_1+a_2\right)^2+\left(b_1+b_2\right)^2+\left(c_1+c_2\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)\ge\left(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2+\left(b_1c_2-b_2c_1\right)^2+\left(c_1a_2-c_2a_1\right)^2\ge 0$$

(hiển nhiên đúng)

Giả sử bất đẳng thức đúng với n = k

$$\sum_{i=1}^{k}\sqrt{a_i^2+b_i^2+c_i^2}\ge\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{k}b_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{k}c_i\right)^2}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với n = k + 1.

Ta có

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{a_i^2+b_i^2+c_i^2}=\left(\sum_{i=1}^{k}\sqrt{a_i^2+b_i^2+c_i^2}\right)+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2+c_{k+1}^2}$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sqrt{a_i^2+b_i^2+c_i^2}\ge\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{k}b_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{k}c_i\right)^2}+\sqrt{a_{k+1}^2+b_{k+1}^2+c_{k+1}^2}$$

$$\ge\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{k+1}b_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{k+1}c_i\right)^2}\text{ (đpcm)}$$

Chúng ta xét một số trường hợp cụ thể sau:

<u>Ví dụ 3</u> : Với $a,b,c\in R$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2}\ge\sqrt{9+(a+b+c)^2}$$

<u>Giải:</u>

Ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{y^2+b^2}+\sqrt{z^2+c^2}\ge\sqrt{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}$$

Chọn x = y = z = 1, ta có điều cần chứng minh.

<u>Ví dụ 4</u>: Với $a,b,c\in R$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\sqrt{14}\ge\sqrt{(a+1)^2+(b+2)^2+(c+3)^2}$$

<u>Giải:</u>

Ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ge\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2+(c+z)^2}$$

Chọn x = 1, y = 2, z = 3, ta có điều phải chứng minh.

1.2. <u>Bất đẳng thức dạng lũy thừa:</u>

Chúng ta gọi bất đẳng thức $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^m\ge\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^m$ (với $m,n\in N^*,a_i>0,i=\overline{1,n}$) là bất đẳng thức dạng lũy thừa.

<u>Ví dụ 1</u>: [4]

Với a, b là những số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$a^{m+n}+b^{m+n}\ge\frac{1}{2}\left(a^m+b^m\right)\left(a^n+b^n\right)\qquad(m,n\in N^*)$$

<u>Giải:</u>

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$a^{m+n}+b^{m+n}\ge a^mb^n+a^nb^m$$

$$\Leftrightarrow(a^m-b^m)(a^n-b^n)\ge 0$$

(hiển nhiên đúng vì 2 thừa số cùng dương khi $a \ge b \ge 0$, cùng âm khi $b \ge a \ge 0$)

Ví dụ 2: [4]

Với a, b, c là những số thực không âm. Chứng minh rằng :

$$a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n} \ge \frac{1}{3}\left(a^m + b^m + c^m\right)\left(a^n + b^n + c^n\right) \quad (m, n \in N^*)$$

Giải:

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$2\left(a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n}\right) \ge a^m\left(b^n + c^n\right) + b^m\left(c^n + a^n\right) + c^m\left(a^n + b^n\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^m - b^m\right)\left(a^n - b^n\right) + \left(b^m - c^m\right)\left(b^n - c^n\right) + \left(c^m - a^m\right)\left(c^n - a^n\right) \ge 0$$

(hiển nhiên đúng vì các số hạng luôn dương)

Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản trên, ta dễ dàng giải được các bài toán sau

Ví dụ 3: Với a, b là những số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$a^{10} + b^{10} \ge \frac{1}{4}\left(a^6 + b^6\right)\left(a^2 + b^2\right)^2$$

Giải:

Áp dụng ví dụ 1, ta có

$$a^{10} + b^{10} \ge \frac{1}{2}\left(a^6 + b^6\right)\left(a^4 + b^4\right) \ge \frac{1}{4}\left(a^6 + b^6\right)\left(a^2 + b^2\right)^2.$$

Ví dụ 4: Với a, b là những số thực không âm. Chứng minh rằng

$$a^{10} + 2b^{10} \ge \frac{1}{9}(a^6 + 2b^6)(a^2 + 2b^2)^2$$

Giải:

Áp dụng ví dụ 2, ta có:

$$a^{10} + 2b^{10} \ge \frac{1}{3}(a^6 + 2b^6)(a^4 + 2b^4)$$

$$\ge \frac{1}{9}(a^6 + 2b^6)(a^2 + 2b^2)^2.$$

Ví dụ 5: Với a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^{10} + b^{10}}{a^6 + b^6}} + \sqrt{\frac{b^{10} + c^{10}}{b^{16} + c^6}} + \sqrt{\frac{c^{10} + a^{10}}{c^{16} + a^6}} \ge a^2 + b^2 + c^2 \qquad (1)$$

Giải:

Ta có

$$\frac{a^{10} + b^{10}}{a^6 + b^6} \ge \frac{1}{4}(a^2 + b^2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^{10} + b^{10}}{a^6 + b^6}} \ge \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

Tương tự, ta có

$$\sqrt{\frac{b^{10}+c^{10}}{b^6+c^6}} \ge \frac{1}{2}(b^2+c^2)$$

$$\sqrt{\frac{c^{10}+a^{10}}{c^6+a^6}} \ge \frac{1}{2}(c^2+a^2)$$

Cộng vế theo vế của các bất đẳng thức trên, ta thu được (1).

1.3. <u>Bất đẳng thức dạng cộng mẫu số</u>:

Chúng ta gọi bất đẳng thức $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \ge \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$

Với $a_i > 0$, $i=\overline{1,n}$ là bất đẳng thức dạng cộng mẫu số.

Bất đẳng thức cộng mẫu số là một bất đẳng thức rất đơn giản nhưng thường được sử dụng ở các bước biến đổi trung gian. Ta chứng minh bất đẳng thức dạng này ở bài toán sau :

<u>Ví dụ 1</u>: [4]

Với $a_i > 0$, ($i=\overline{1,n}$) là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \ge \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

<u>Giải:</u>

Ta có $\sum_{i=1}^{n} a_i \ge n\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

Suy ra $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \ge n^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \ge \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = = \ldots = a_n$ (đpcm)

* **<u>Lưu ý</u>**: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \ne 0)$

Sử dụng bất đẳng thức trên , ta chứng minh các bất đẳng thức sau:

<u>Ví dụ 2</u>: Với a, b, c > 0, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 3\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right)$$

<u>Giải</u>

Ta có $\frac{1}{a}+\frac{2}{b} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b} \ge \frac{9}{a+2b}$

Tương tự ta có : $\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\geq\frac{9}{b+2c}$

$$\frac{1}{c}+\frac{2}{a}\geq\frac{9}{c+2a}$$

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c

<u>Ví dụ 3:</u> Với a, b, c > 0, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\geq\frac{36}{a+b+c}$$

<u>Giải</u>:

Ta có : $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{b}{2}}+\frac{1}{\frac{b}{2}}+\frac{1}{\frac{c}{3}}+\frac{1}{\frac{c}{3}}+\frac{1}{\frac{c}{3}}\geq\frac{36}{a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{c}{3}+\frac{c}{3}}=\frac{36}{a+b+c}$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\frac{b}{2}=\frac{c}{3}$ hay 6a = 3b = 2c

<u>Ví dụ 4</u>: Với a, b, c , d > 0, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{36}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$$

<u>Giải</u> Ta có : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{36}{d}\geq\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}$

$$\geq\frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d}$$

$$\geq\frac{64}{a+b+c+d}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{c}{2}=\frac{d}{4}$ hay 4a = 4b = 2c = d

1.4. <u>Bất đẳng thức dạng phân thức</u>:

Ta chứng minh các kết quả cơ bản sau :

<u>Ví dụ 1</u>: [4]

Với $x_i > 1$ ($i=\overline{1,n}$). Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}\geq\frac{1}{1+\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}}$$

Giải:

Chúng ta chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp quy nạp.
Bất đẳng thức đúng với n = 2.

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}\ge\frac{n}{1+\sqrt{x_1x_2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2+\left(x_1+x_2\right)}{1+x_1x_2+\left(x_1+x_2\right)}\ge\frac{2}{1+\sqrt{x_1x_2}}$$

$$\Leftrightarrow 2+\left(x_1+x_2\right)+2\sqrt{x_1x_2}+\left(x_1+x_2\right)\sqrt{x_1x_2}\ge 2+2x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)\left(\sqrt{x_1x_2}-1\right)+2\sqrt{x_1x_2}\left(1-\sqrt{x_1x_2}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x_1x_2}-1\right)\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2\ge 0 \quad \text{(hiển nhiên đúng)}$$

Ta chứng minh : Nếu bất đẳng thức đúng với n thì cũng đúng với 2n

Thật vậy : $$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{1+x_i}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}+\frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{1+x_i}\right]$$

$$\ge\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{1+\left(\prod_{i=n+1}^{2n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}}\right]$$

$$\ge\frac{1}{1+\left(\prod_{i=1}^{2n}x_i\right)^{\frac{1}{2n}}} \quad \text{(đpcm)}$$

Bất đẳng thức đã cho sẽ được chứng minh nếu chúng ta chứng minh được khẳng định sau :
Nếu bất đẳng thức đúng với n = k + 1 thì cũng đúng với n = k

Thật vậy : $$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1+x_i}\ge\frac{1}{1+\left(\prod_{i=1}^{k}x_i\right)^{\frac{1}{k}}}$$

$$\Leftrightarrow P=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1+x_i}\right)+\frac{1}{1+\left(\prod_{i=1}^{k}x_i\right)^{\frac{1}{k}}}\ge\frac{k+1}{1+\left(\prod_{i=1}^{k}x_i\right)^{\frac{1}{k}}}$$

Áp dụng giả thiết quy nạp ta suy ra :

$$P\ge\frac{k+1}{1+\left[\prod_{i=1}^{k}x_i.\left(\prod_{i=1}^{k}x_i\right)^{\frac{1}{k}}\right]^{\frac{1}{1+k}}}=\frac{k+1}{1+\left(\prod_{i=1}^{k}x_i\right)^{\frac{1}{k}}} \quad \text{(đpcm)}$$

Chứng minh tương tự ta thu được :

Ví dụ 2 : **[4]**

Với $0 < x_i < 1$ ($i=\overline{1,n}$) thì :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}\le\frac{1}{1+\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}}$$

Sử dụng bất đẳng thức $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{x_i}\le\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}$, ta có được các kết quả sau :

Ví dụ 3: **[4]**

Với $0 < x_i < 1$ ($i=\overline{1,n}$), chứng minh rằng :

$$P=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[m]{1+x_i}}\le\frac{1}{\sqrt[m]{1+\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}}}$$

Giải:

Ta có :
$$P\le\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}}\le\frac{1}{\sqrt[m]{1+\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}}}$$

Sử dụng bất đẳng thức : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^m\ge\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^m$

Với $x_i > 0$, ($i=\overline{1,n}$) ta thu được kết quả sau đây :

Ví dụ 4:

Với $x_i > 1$, ($i=\overline{1,n}$) . Chứng minh rằng :

$$P=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+x_i\right)^m}\ge\frac{1}{\left[1+\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right]^m}$$

Giải:

Ta có :
$$P \ge \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}\right)^m \ge \left(\frac{1}{1+\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}}\right)^m = \frac{1}{\left[1+\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}\right]^m} \quad \text{(đpcm)}$$

1.5. Bất đẳng thức dạng trung bình nhân :

Ví dụ 1: [4]

Với a_i, b_i $(i=\overline{1,n})$ là những số thực dương . Chứng minh rằng :

$$\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^{n}b_i\right)^{\frac{1}{n}} \le \left(\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Giải :

Bất đẳng thức đã cho tương đương với :

$$P = \left(\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+b_i}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i}\right)^{\frac{1}{n}} \le 1$$

Áp dụng bất đẳng thức AM- GM , ta có :

$$P \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+b_i} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1 = \frac{n}{n} = 1$$

Ví dụ 2: [4]

Với a_{ij}, b_{ij} $(i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m})$ là những số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n}a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}} \le \left(\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Giải :

Bất đẳng thức đã cho tương đương với :

$$P = \sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m}a_{ij}}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \le 1$$

Áp dụng bất đẳng thức AM- GM , ta có :

$$P \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}.\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m}a_{ij}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum_{j=1}^{m}a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m}a_{ij}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1 = \frac{n}{n} = 1$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta có thể tóm tắt :

“ Tổng các trung bình nhân nhỏ hơn hoặc bằng trung bình nhân của **tổng** **”**
Từ kết quả trên ta thu được các hệ quả sau :

Ví dụ 3: (Bất đẳng thức Cauchy dạng tích)
Với a_i, $(i=\overline{1,n})$ là những số thực dương . Chứng minh rằng :

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\ge\left(1+\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{n}$$

Giải :
Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)\right)^{\frac{1}{n}}\ge 1+\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow P=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+a_i}\right)^{\frac{1}{n}}\le 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy , ta có

$$P\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+a_i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1=\frac{n}{n}=1 \quad \text{(đpcm)}$$

Chúng ta có thể mở rộng ví dụ như sau :
Ví dụ 4: [4]
Cho a_i, b_i $(i=\overline{1,n})$ là những số thực dương . Chứng minh rằng :

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i+b_i)\ge\left(1+\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}b_i\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{n}$$

Giải :
Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(1+a_i+b_i)\right)^{\frac{1}{n}}\ge 1+\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}b_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow p=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i+b_i}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+a_i+b_i}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{b_i}{1+a_i+b_i}\right)^{\frac{1}{n}}\le 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy , ta có

$$P\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i+b_i}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+a_i+b_i}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{1+a_i+b_i}$$

$$\Leftrightarrow P\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1=\frac{n}{n}=1 \quad \text{(đpcm)}$$

Ví dụ 5: [4]

(Một cách mở rộng bất đẳng thức Buniakovski)

Với a_i, b_i, c_i $(i=\overline{1,m})$ là những số thực dương. Chứng minh rằng :

1) $\left(\prod_{i=1}^{m} a_i+\prod_{i=1}^{m} b_i\right)^m \le \prod_{i=1}^{m}\left(a_i^{\,m}+b_i^{\,m}\right)$ (*)

2) $\left(\prod_{i=1}^{m} a_i+\prod_{i=1}^{m} b_i+\prod_{i=1}^{m} c_i\right)^m \le \prod_{i=1}^{m}\left(a_i^{\,m}+b_i^{\,m}+\prod_{i=1}^{m} c_i^{\,m}\right)$ (**)

Giải :

Đặt $A_i=a_i^m;B_i=b_i^m;C_i=c_i^m$

Suy ra $a_i=A_i^{\frac{1}{m}};b_i=B_i^{\frac{1}{m}};c_i=C_i^{\frac{1}{m}}$

Ta có (**) $\Leftrightarrow\left(\prod_{i=1}^{m} A_i\right)^{\frac{1}{m}}+\left(\prod_{i=1}^{m} B_i\right)^{\frac{1}{m}}+\left(\prod_{i=1}^{m} C_i\right)^{\frac{1}{m}}\le\left(\prod_{i=1}^{m}\left(A_i+B_i+C_i\right)\right)^{\frac{1}{m}}$

$$\Leftrightarrow P=\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{A_i}{A_i+B_i+C_i}\right)^{\frac{1}{m}}+\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{B_i}{A_i+B_i+C_i}\right)^{\frac{1}{m}}+\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{C_i}{A_i+B_i+C_i}\right)^{\frac{1}{m}}\le 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy , ta có

$$P\le\frac{1}{m}\prod_{i=1}^{m}\frac{A_i}{A_i+B_i+C_i}+\frac{1}{m}\prod_{i=1}^{m}\frac{B_i}{A_i+B_i+C_i}+\frac{1}{m}\prod_{i=1}^{m}\frac{C_i}{A_i+B_i+C_i}$$

$\Leftrightarrow P\le\frac{1}{m}\prod_{i=1}^{m}\frac{A_i+B_i+C_i}{A_i+B_i+C_i}=\frac{m}{m}=1$ (đpcm)

Bất đẳng thức (*) chứng minh tương tự.

Trong vài trường hợp đặc biệt, ta có các bất đẳng thức sau :

Ví dụ 6: Với a, b, c >0 . Chứng minh rằng :

$$P=\left(1+a^3+b^3\right)\left(1+b^3+c^3\right)\left(1+c^3+a^3\right)\ge\left(1+2abc\right)^3$$

Giải:

Bất đẳng thức đã cho được suy ra trực tiếp từ ví dụ 4:

$$P\ge\left(1+\sqrt[3]{a^3b^3c^3}+\sqrt[3]{b^3c^3a^3}\right)^3=\left(1+2abc\right)^3$$

Ví dụ 7: Với a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng :

$$P=\left(1+8^a\right)\left(1+8^b\right)\left(1+8^c\right)\ge\left(1+2^{a+2b}\right)\left(1+2^{b+2c}\right)\left(1+2^{c+2a}\right)$$

Giải :

Ta có $P=\left(1+8^a\right)\left(1+8^b\right)^2\ge\left(1+\sqrt[3]{8^a.8^b.8^c}\right)^3=\left(1+2^{a+2b}\right)^3$

Tương tự ta có : $\left(1+8^b\right)\left(1+8^c\right)^2\ge\left(1+2^{b+2c}\right)^3$

$$\left(1+8^c\right)\left(1+8^a\right)^2\ge\left(1+2^{c+2a}\right)^3$$

Nhân vế theo vế của các bất đẳng trên, ta có đpcm

Chương II – CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỔNG QUÁT

Đôi khi có nhiều bài toán bất đẳng thức có cùng một cấu trúc, ta có thể đưa chúng về cùng một bất đẳng thức gốc. Người ta gọi phương pháp đó là phương pháp tổng quát. Đảo lại, từ một bất đẳng thức ban đầu, ta có thể phát triển ra nhiều bài toán hay và khó. Sau đây là một số dạng toán và ứng dụng cơ bản của phương pháp này.

2.1. Chứng minh bất đẳng thức cụ thể từ bất đẳng thức tổng quát

Ta xét ví dụ đầu tiên.

Ví dụ 1:[Toán học và tuổi trẻ số 271]

Cho các số thực a,b thỏa mãn $a^2+b^2 \le 1$.

Chứng minh rằng:

$$(ac+bd-1)^2 \ge (a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1)$$ với mọi số thực c,d.

Giải:

Ta xét bất đẳng thức tổng quát hơn:

"Cho các số thực a,b thỏa mãn $a^2+b^2 \le m^2$.

Chứng minh rằng:

$$(ac+bd-mn)^2 \ge (a^2+b^2-m^2)(c^2+d^2-n^2) \qquad (1)$$

Với mọi số thực c,d,n."

Chú ý rằng nếu $a^2+b^2=m^2$ thì (1) đúng nên ta chỉ cần xét với $a^2+b^2<m^2$.

Cách 1: (1) ⇔ $(an-cm)^2+(bn-dm)^2 \ge (ad-bc)^2$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Buniakovsky và gỉa thiết, ta có:

$$m^2((an-cm)^2+(bn-dm)^2) \ge (b^2+(-a)^2)((an-cm)^2+(bn-dm)^2)$$
$$\ge (b(an-cm)-a(bn-dm))^2 = m^2(ad-bc)^2$$

Từ đó suy ra (2) đúng.

Cách 2: Xét tam thức bậc hai:

$$f(x)=(a^2+b^2-m^2)x^2+2(ac+bd-mn)x+(c^2+d^2-n^2)$$
$$=(\mathrm{ax}-c)^2+(bx-d)^2-(mx-n)^2$$

Ta có:

$$f(\frac{n}{m})=(\frac{an}{m}-c)^2+(\frac{bn}{m}-d)^2 \ge 0$$

Suy ra $(a^2+b^2-m^2)f(\frac{n}{m}) \le 0$

Nên phương trình $f(x)=0$ có nghiệm (theo định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai).

Do đó :

$$\Delta'=(ac+bd-mn)^2-(a^2+b^2-m^2)(c^2+d^2-n^2) \ge 0$$

Từ đó bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra trong các trường hợp sau:

1) $a^2+b^2=m^2$ và $ac+bd=mn.$

2) $a^2+b^2<m^2$ và ad = bc.

Bài toán cần chứng minh ứng với m = n = 1.

Ghi chú: Ta còn có thể phát biểu bài toán tổng quát như sau:

Cho các số thực $a_1,a_2,...,a_n$ thỏa mãn: $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \le m^2$.

Chứng minh rằng : $(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i - mn)^2 \ge (\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - m^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 - n^2)$ với mọi số thực $b_1,b_2,...,b_n$.

Nhận xét : Từ ví dụ 1, ta có thể chứng minh được nhiều bài toán khác :

1) Cho các số thực a, b thỏa mãn $a^2+b^2 \le 4$.

Chứng minh rằng:

$$(ac+bd-4)^2 \ge (a^2+b^2-4)(c^2+d^2-4)$$

Với mọi số thực c,d.

2) Cho các số thực a_1,a_2,a_3 thỏa mãn $a_1^2+a_2^2+a_3^2 \le 9$.

Chứng minh rằng :

$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3-9)^2 \geq (a_1^2+a_2^2+a_3^2-9)(b_1^2+b_2^2+b_3^2-9)$

với mọi số thực b_1, b_2, b_3.

Đây chính là nét đặc sắc và hay nhất của phương pháp này: chứng minh một bất đẳng thức là có thể chứng minh được nhiều bất đẳng thức cùng dạng.

Ví dụ 2: **[Toán học và tuổi trẻ số 267]**

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y^2+2y(x+z)=6 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $y(z-x) \leq 4$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải:

Ta xét bài toán tổng quát:

Cho a,b là các số thực dương; x, y, z là các số thực thỏa mãn:

$$\begin{cases} x^2+z^2=b \\ y^2+(a-b)y(x+z)=2ab^2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $y(z-x) \leq (a+b)b.$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức trên.

Áp dụng bất đẳng thức Buniakovsky, ta có:

$$\begin{aligned}(y(z-x))^2 &= ((-x)(y+(a-b)z)+z((a-b)x+y))^2 \\ &\leq \left((-x)^2+z^2\right)\left(\left(y+(a-b)z\right)^2+\left(y+(a-b)x\right)^2\right) \\ &= 2\left(x^2+z^2\right)\left(y^2+(a-b)y(x+z)+\frac{(a-b)^2\left(x^2+z^2\right)}{2}\right) \\ &= 2b\left(2ab^2+\frac{(a-b)^2 b}{2}\right) = b^2(a+b)^2\end{aligned}$$

Do đó $y(y-z) \leq (a+b)b$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2+z^2=b \\ y(z-x)=(a+b)b \\ z\big(y+(a-b)z\big)+x(a-b)x+y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2=b \\ y(z-x)=(a+b)b \\ y(z+x)=-b(a-b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2=b \\ y(z+x)=-b(a-b) \\ z-x=\dfrac{-(a+b)}{a-b}(z+x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a^2+b^2}};y=\dfrac{-b\sqrt{b}}{\sqrt{a^2+b^2}};z=-\sqrt{b\left(a^2+b^2\right)} \\ x=\dfrac{-a\sqrt{b}}{\sqrt{a^2+b^2}};y=\dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a^2+b^2}};z=\sqrt{b\left(a^2+b^2\right)} \end{array}\right. \qquad (*)$$

<u>**Cách 2**</u>: Từ giả thiết ta có $y\neq 0$ và $x+z=\dfrac{2ab^2-y^2}{(a-b)y}$

$$y^2(z-x)^2=y^2\left(2\left(z^2+x^2\right)-(z+x)^2\right)$$

$$=y^2\left(2b-\frac{\left(2ab^2-y^2\right)^2}{(a-b)^2y^2}\right)$$

Suy ra $$=\frac{2b(a-b)^2y^2-\left(2ab^2-y^2\right)^2}{(a-b)^2}$$

$$=\frac{(a+b)^2b^2(a-b)^2-\left(y^2-b\left(a^2+b^2\right)\right)^2}{(a-b)^2}$$

$$=(a+b)^2b^2-\frac{\left(y^2-b\left(a^2+b^2\right)\right)^2}{(a-b)^2}\le(a+b)^2b^2$$

Do đó $y^2(z-x)^2\le(a+b)^2b^2$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2+z^2=b \\ y^2+(a-b)y(x+z)=2ab^2 \\ y^2=b\left(a^2+b^2\right) \\ y(z-x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow (*)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh ứng với a = 3 và b =1

Nhận xét: *Bài toán tuy hơi phức tạp nhưng nhờ bất đẳng thức tổng quát, ta đã giải quyết bài toán 1 cách nhanh chóng.*

Kinh nghiệm giải toán:
Để rút ra được bất đẳng thức tổng quát, ta phải xác định số tham số, thử nhiều trường hợp và đặt các tham số vào vị trí thích hợp.

Ví dụ 3: **[Toán học và tuổi trẻ số 268]**
Chứng minh bất đẳng thức sau với n nguyên dương:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+...+\frac{n}{3^n}<\frac{3}{4}$$

Giải:

Ta xét bất đẳng thức tổng quát hơn:
"Với n nguyên dương, a > 1 thì :

$$S=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+...+\frac{n}{a^n}<\frac{a}{(a-1)^2}.$$"

Chứng minh: Ta có:

$$a.S=1+\frac{2}{a}+\frac{3}{a^2}+...+\frac{n}{a^{n-1}}$$

Lấy a.S trừ đi S, ta được:

$$(a-1).S=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+...+\frac{1}{a^{n-1}}-\frac{n}{a^n}$$

Đặt: $P=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+...+\frac{1}{a^{n-1}}$

Ta có: $P.(\frac{1}{a}-1)=(\frac{1}{a}-1).(\frac{1}{a^{n-1}}+\frac{1}{a^{n-2}}+...+\frac{1}{a})$

$$=\frac{1}{a^n}-\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow P=\frac{\frac{1}{a^n}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-1}=(\frac{1}{a^n}-\frac{1}{a}).\frac{a}{1-a}$$

Suy ra: $S.(a-1)=1+P-\frac{n}{a^n}$

$$=1+\frac{a}{a^n(1-a)}-\frac{1}{1-a}-\frac{n}{a^n}$$

$$=\frac{a}{a-1}-\frac{n}{a^n}-\frac{a}{a^n(a-1)}<\frac{a}{a-1}$$

Do đó $S<\frac{a}{(a-1)^2}$ (đpcm).

Trở lại bài toán:

Áp dụng bất đẳng thức trên với a=3, ta được:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+...+\frac{n}{3^n}<\frac{3}{4}$$

Bài toán đã chứng minh xong.

<u>Bài tập áp dụng</u>

1) **[Toán học và tuổi trẻ số 253]**

Các số dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

chứng minh rằng : $\frac{x}{y^2+z^2}+\frac{y}{z^2+x^2}\frac{z}{x^2+y^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$

2) **[Toán học và tuổi trẻ số 286]**

Tổng dãy số $u_1,u_2,\ldots,u_k$ được xác định như sau :

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \text{ với } n = 1;2;\ldots,k$$

Đặt $S = u_1+ u_2 + \ldots+ u_k$

Chứng minh rằng : $18<\frac{1}{S}\leq 24$

3) **[Toán học và tuổi trẻ số 286]**

Chứng minh bất đẳng thức :

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\geq 2\left(\sqrt{\frac{c}{a+b}}+\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}\right)$$

Trong đó a, b, c là các số dương .

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

4) **[Toán học và tuổi trẻ số 250]**

Cho a, b, c là ba số thực dương . Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\geq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq 2-\frac{1}{2}.\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

5) **[Toán học và tuổi trẻ số 400]**

Cho bốn số a, b, c, d thuộc $\left(0;\frac{1}{2}\right]$. Chứng minh rằng :

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4-a-b-c-d}\right)^4\geq\frac{abcd}{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)}$$

<u>Hướng dẫn và đáp án</u>:

1**)** Có thể tổng quát theo 2 cách sau:

a) Với $a_1,a_2,\ldots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$ thì

$$\frac{a_1}{1-a_1^{2k}} + \frac{a_2}{1-a_2^{2k}} + \ldots + \frac{a_n}{1-a_n^{2k}} \geq \frac{2k+1}{2k}.\sqrt[2k]{2k+1}$$

b) Với n số dương $a_1,a_2,\ldots, a_n$ ($n \geq 3$) thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1} = k > 0$ thì

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{n-2}}{k-a_i^{n-1}} \geq \frac{\sqrt[n-1]{n^n}}{(n-1)\sqrt[n-1]{k}}$$

2) Bài toán tổng quát :

Dãy số $u_1,u_2,\ldots,u_k$ được xác định bởi :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+t)} \text{ với } n = 1;2;\ldots,k \text{ và } t \in N^*$$

Đặt $S = u_1+ u_2 + \ldots + u_k$

Chứng minh rằng : $t!t < \frac{1}{S} \leq (t+1)!$ Trong đó $t! = 1.2.3\ldots t$

3) Bài toán tổng quát : cho n số dương $a_1,a_2,\ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ và $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Khi đó ta có bất đẳng thức: $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{S-a_i}{a_i}} \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_i}{S-a_i}}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i = a_z$ ($\forall i, z = 1,2,\ldots,n$)

4) Ta có hai cách để tổng quát bài toán :

Cho $n \in N^*, n \geq 3$ và cho n số thực dương $a_1,a_2,\ldots, a_n$

Chứng minh rằng :

$$\frac{n-2}{n-1} + \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\sum_{1\leq i\leq z\leq n} a_i a_z} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i} \geq \frac{2}{n-1} + 1 - \frac{2}{(n-1)^2}\cdot\frac{\sum_{1\leq i\leq z\leq n} a_i a_z}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

b) $$\frac{n-2}{n-1} + \frac{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\sum_{i=1}^{n} a(S-a_i)} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i} \geq 2 - \frac{1}{4}\frac{\sum_{i=1}^{n}(S-a_i)}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

5) Mấu chốt của bài toán là chứng minh được bất đẳng thức :

Với $x,y \in \left(0;\frac{k}{2}\right]$, k dương ta luôn có $\left(\frac{x+y}{2k-x-y}\right)^2 \geq \frac{xy}{(k-x)(k-y)}$

Từ đó ta chứng minh được bài toán tổng quát:

Cho n số $x_1, x_2,\ldots,x_n \in \left(0;\frac{k}{2}\right]$ (với $k > 0$, $n = 2^m$, m là số tự nhiên), thì ta có bất đẳng thức : $\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{nk-x_1-x_2-...-x_n}\right)^n \geq \frac{x_1x_2...x_n}{(k-1)(k-2)...(k-x_n)}$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi số $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

2.2. Tổng quát hóa bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Ví dụ 1: **[Toán học và tuổi trẻ số 263]**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$\frac{x^6}{x^3+y^3}+\frac{y^6}{y^3+z^3}+\frac{z^6}{z^3+x^3}$$

Trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện : $xy\sqrt{xy}+yz\sqrt{yz}+zx\sqrt{zx}=1$.

Giải : Ta xét bài toán tổng quát :

" Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ thỏa mãn $\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_2x_3}+...+\sqrt{x_nx_1}=a$

Thì $\frac{x_1^{\,2}}{x_1+x_2}+\frac{x_2^{\,2}}{x_2+x_3}+...+\frac{x_n^{\,2}}{x_n+x_1}\geq\frac{a}{2}$ "

Chứng minh: Áp dụng bất đẳng thức Buniakovsky , ta có :

$$\left(\frac{x_1^{\,2}}{x_1+x_2}+\frac{x_2^{\,2}}{x_2+x_3}+...+\frac{x_n^{\,2}}{x_n+x_1}\right)\left[(x_1+x_2)+(x_2+x_3)+...+(x_n+x_1)\right]\geq(x_1+x_2+...+x_n)^2$$

Suy ra Q $\geq \frac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{2(x_1+x_2+...+x_n)}=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{2}$ (1)

Mặt khác , vì $\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2+\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_3}\right)^2+...+\left(\sqrt{x_n}-\sqrt{x_1}\right)^2\geq 0$

Nên $x_1+x_2+...+x_n\geq\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_2x_3}+...+\sqrt{x_nx_1}=a$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra Q $\geq\frac{a}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=...=x_n=\frac{a}{n}$

* Trở lại bài toán ở trên :

Đặt a = x^3 ; b = y^3; c = z^3 thì biểu thức đã cho trở thành

Q $=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}$ với $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1;\ \ a,b,c>0$

Từ bài toán tổng quát ta suy ra được Q $\geq\frac{a}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

Vậy min Q = $\frac{1}{2}$ đạt được khi x = y = z = $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

* **Nhận xét**:

Từ bài toán này, ta có thể thấy được tác dụng to lớn của phương pháp tổng quát hóa.

Ví dụ 2: **[Toán học và tuổi trẻ số 399]**

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \frac{232y^3 - x^3}{2xy + 24y^2} + \frac{783z^3 - 8y^3}{6yz + 54z^2} + \frac{29x^3 - 27z^3}{3xz + 6x^2}$$

Trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $x + 2y + 3z = \frac{1}{4}$

Giải :

Đặt x = a; 2y = b; 3z = c .

Từ giả thiết suy ra a, b, c là các số dương và $a + b + c = \frac{1}{4}$

Biểu thức M có dạng : $M = \frac{29b^3 - a^3}{ab + 6b^2} + \frac{29c^3 - b^3}{bc + 6c^2} + \frac{29a^3 - c^3}{ca + 6a^2}$

Do đó ta xét bài toán tổng quát :

" Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$N = \frac{\left(k^2 - k - 1\right)b^3 - a^3}{ab + kb^2} + \frac{\left(k^2 - k - 1\right)c^3 - b^3}{bc + kc^2} + \frac{\left(k^2 - k - 1\right)a^3 - c^3}{ca + ka^2}$$

Trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện a + b + c = m ; k và m là các số dương cho trước ."

Chứng minh : Ta có $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$

Mà $a^2 + b^2 \geq 2ab$ nên $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$

Do đó $\left(k^2 - k - 1\right)b^3 - a^3 = \left(k^2 - k\right)b^3 - \left(a^3 + b^3\right) \leq \left(k^2 - k\right)b^3 - ab\left(a + b\right) = b\left(a + kb\right)\left(kb - a - b\right)$

Suy ra $\frac{\left(k^2 - k - 1\right)b^3 - a^3}{ab + kb^2} \leq \left(k - 1\right)b - a$

Tương tự $\frac{\left(k^2 - k - 1\right)c^3 - b^3}{bc + kc^2} \leq \left(k - 1\right)c - b$;

$\frac{\left(k^2 - k - 1\right)a^3 - c^3}{ca + ka^2} \leq \left(k - 1\right)a - c$

$\Rightarrow N \leq \left(k - 2\right)\left(a + b + c\right) = \left(k - 2\right)m$

Dấu " =" xảy ra khi $a = b = c = \frac{m}{3}$

Trở lại bài toán, áp dụng bài toán tổng quát :

$M \leq \left(6 - 2\right).\frac{1}{4} = 1$. Vậy max M = 1 khi $\begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{12}$.

Bây giờ, ta xét một dạng toán khác: Tìm hằng số k để biểu thức có giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất.

Ví dụ 3: **[Toán học và tuổi trẻ số 404]**

Tìm hằng số k lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq k(a^2+b^2+c^2)$$

Trong đó a, b, c là các số thực dương và có tổng bằng 1.

Giải:

Chọn a = b = c = $\frac{1}{3}$ ta có $k\leq 3$.

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với k = 3.

Thật vậy

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 3(a^2+b^2+c^2) \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{b}-2a+b\right)+\left(\frac{b^2}{c}-2b+c\right)+\left(\frac{c^2}{a}-2c+a\right)\geq 3(a^2+b^2+c^2)-(a++b+c)^2$$

(Do a + b + c = 1 nên (a + b + c)^2 = a + b + c)

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}\geq (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \qquad (2)$$

Do a + b +c = 1, a > 0, b > 0, c > 0 nên a < 1, b < 1, c < 1.

Suy ra $\frac{(a-b)^2}{b}\geq (a-b)^2$

$$\frac{(b-c)^2}{c}\geq (b-c)^2$$

$$\frac{(c-a)^2}{a}\geq (c-a)^2$$

Do đó bất đẳng thức (2) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = $\frac{1}{3}$.

Suy ra bất đẳng thức (1) đúng.

Vậy k = 3 là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4: [Toán học và tuổi trẻ số 261]

Xét tổng:

$$S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{2}{2n+1}+...+\frac{n+1}{(n+1)n+1} \text{ với } n\in N^*.$$

Tìm số thực a lớn nhất thỏa mãn $S_n>a$ với mọi $n\in N^*$.

Giải:

Với mọi số n , k $\in N^*$, ta luôn có

$$\frac{k}{kn+k}\leq\frac{k}{kn+1}\leq\frac{k}{kn}$$

Hay $\frac{1}{n+1}\leq\frac{k}{kn+1}\leq\frac{1}{n}$ (1)

Trong đó $\frac{1}{n+1}=\frac{k}{kn+1}$ khi và chỉ khi k = 1.

Từ (1) cho k chạy từ 1 đến n+1 rồi cộng n + 1 bất đẳng thức kép cùng chiều, ta được

$$1 < S_n < 1 + \frac{1}{n}, \forall n \in N^* \quad (2)$$

Suy ra $a \geq 1$. (3)

Xét số thực $a_0 > 1$, ta có $a_0 - 1 > 0$ nên chọn được ít nhất một số nguyên dương N sao cho $N > \frac{1}{a_0 - 1}$ hay $\frac{1}{N} < a_0 - 1$.

Kết hợp với (2), ta có:

$S_N < 1 + \frac{1}{N} < a_0$, không thỏa mãn đề bài.

Suy ra $a \leq 1$.

Kết hợp với (3), ta có a = 1.

Kinh nghiệm giải toán: *Ta cần chọn những giá trị đặc biệt của biến, rồi thay vào bất đẳng thức để có thể đoán được giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của hằng số.*

Bài tập áp dụng:

1) **[Toán học và tuổi trẻ số 256]**

Xét các số thực dương a, b ,c thỏa mãn điều kiện a + b + c = 1.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$$

2) **[Toán học và tuổi trẻ số 276]**

Cho tam giác ABC.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{\sqrt{1 + 2\cos^2 A}}{\sin B} + \frac{\sqrt{1 + 2\cos^2 B}}{\sin C} + \frac{\sqrt{1 + 2\cos^2 C}}{\sin A}$$

3) **[Toán học và tuổi trẻ số 405]**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(5a + \frac{2}{b + c}\right)^3 + \left(5b + \frac{2}{c + a}\right)^3 + \left(5c + \frac{2}{a + b}\right)^3$$

Trong đó a, b , c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

4) **[Toán học và tuổi trẻ số 420]**

Tìm số k lớn nhất sao cho

$$\sqrt{a + 2b + 3c} + \sqrt{b + 2c + 3a} + \sqrt{c + 2a + 3b} \geq k(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

đúng với mọi số thực dương a , b , c.

5) **[Toán học và tuổi trẻ số 414]**

Cho các số thực dương a , b.

Tìm hằng số k lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức

$$\frac{k}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\geq\frac{16+4k}{(a+b)^3}$$

Hướng dẫn và đáp án:

1) Bài toán tổng quát:

Cho $n\in N^*, n\geq 2$. Xét n số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mà $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}+\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{1}{a_i a_j}$$

Đáp số: $\min P = \frac{n(n^3-n^2+2)}{2}$, đạt được khi $a_i = \frac{1}{n}, \forall i=1,2,\ldots,n$

2) Cho tam giác ABC và số k nguyên dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{\sqrt{1+k\cos^2 A}}{\sin B}+\frac{\sqrt{1+k\cos^2 B}}{\sin C}+\frac{\sqrt{1+\cos^2 C}}{\sin A}$$

3) Chứng minh rằng

$$\left(ma+\frac{n}{b+c}\right)^p+\left(mb+\frac{n}{c+a}\right)^p+\left(mc+\frac{n}{a+b}\right)^p\geq 3\left(m\sqrt{\frac{k}{3}}+\frac{n\sqrt{3}}{2\sqrt{k}}\right)^p$$

Trong đó a, b , c là các số thực dương và m , n, p ,k ($p\geq 2$) là các số tự nhiên thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=k$.

4) $k=\sqrt{6}$

5) k = 8

2.3. Chứng minh các bất đẳng thức tổng quát:

2.3.1. (APMO 1989)

Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương, đặt

S= $=x_1+x_2+\ldots+x_n$

Chứng minh rằng: $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\leq 1+S+\frac{S^2}{2!}+\frac{S^3}{3!}+\ldots+\frac{S^n}{n!}$

Giải :

Theo BĐT Cauchy, ta có :

$$\left(1+x_1\right)\left(1+x_2\right)\ldots\left(1+x_n\right)\le\left[\frac{\left(1+x_1\right)+\left(1+x_2\right)+\ldots+\left(1+x_n\right)}{n}\right]^n=\left(1+\frac{S}{n}\right)^n=$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\left[C_n^r\left(\frac{S}{n}\right)^r\right]=\sum_{r=0}^{n}\left[\frac{n!}{r!\left(n-r\right)!}\left(\frac{S}{n}\right)^r\right]$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\left[\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\ldots\left(n-r+1\right)}{r!}\left(\frac{S}{n}\right)^r\right]$$

$$\le\sum_{r=0}^{n}\left[\frac{n^r}{r!}\left(\frac{S}{n}\right)^r\right]=\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{S}{r!}\right)^r=$$

$$=1+S+\frac{S^2}{2!}+\frac{S^3}{3!}+\ldots+\frac{S^n}{n!}$$

Vậy ta có đpcm.

* **Lưu ý:** Ta có hằng đẳng thức sau :

$$\left(a+b\right)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^ra^{n-r}b^r+C_n^na^nb^n$$

2.3.2. (APMO 1991)

Cho $a_1,a_2,....,a_n,b_1,b_2,....,b_n$ là các số thực dương sao cho

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}b_k$, chứng minh rằng :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\right)\ge\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{2}\right)$$

Giải:

Cách 1 : Theo bất đẳng thức Cauchy- Schwarz, ta có :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\right).\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)\ge\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2$$

Suy ra $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\right)\ge\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)}=\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2}{2.\sum_{k=1}^{n}a_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{2}\right)$

Cách 2: Do $(a - b)^2 \ge 0$ suy ra $(a - b)^2 \ge 4ab$, từ đó $\frac{ab}{a+b}\le\frac{a+b}{4}$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^2+a_kb_k-a_kb_k}{a_k+b_k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}\right)\geq\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k+b_k}{4}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2a_k}{4}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{2}\right)\quad \text{(đpcm)}$$

2.3.3. (APM0 1995)

Xác định tất cả dãy số thực $a_1,a_2,....,a_{1995}$ thỏa mãn điều kiện

$2\sqrt{a_n-(n-1)}\geq a_{n+1}-(n-1)$ với n = 1,2,…,1994 và $2\sqrt{a_{1995}-1994}\geq a_1+1$

Giải:

Dãy a_n = n với mọi n = 1,2,…,1995 là dãy duy nhất thỏa mãn đề bài.

Thật vậy , cộng các bất đẳng thức đã cho, ta có :

$$\sum_{n=1}^{1995}2\sqrt{a_n-(n-1)}\geq\left[\sum_{n=1}^{1994}a_{n+1}-(n-1)\right]+a_1+1=\sum_{n=1}^{1995}\left[a_n-(n-1)+1\right]$$

Suy ra $0\geq\sum_{n=1}^{1995}\left[a_n-(n-1)+1-2\sqrt{a_n-(n-1)}\right]=\sum_{n=1}^{1995}\left[\sqrt{a_n-(n-1)}-1\right]^2$

Với n = 1,2,…,1995 , Từ đó ta được: $\sqrt{a_n-(n-1)}-1=0$, hay a_n = n

Cuối cùng ta có thể kiểm tra được rằng dãy a_n = n thỏa mãn các tính chất dòi hỏi, vì

$2\sqrt{n-(n-1)}=(n+1)-(n-1)$ với n =1,2,…,1994 và $2\sqrt{1995-19941}=1+1$

Ta có đpcm.

2.3.4. (APMO 1996)

Cho các số nguyên dương m và n sao cho $n\leq m$

Chứng minh rằng $2^n.n!\leq\dfrac{(m+n)!}{(m-n)!}\leq\left(m^2+m\right)^n$

Giải:

Trước tiên ta có: $\dfrac{(m+n)!}{(m-n)!}=(m+n)(m+n-1)...(m-n+2)(m-n+1)$

$$=\prod_{i=1}^{n}(m+1-i)(m+i)$$

Ngoài ra, $2^n.n!=2^n.1.2.3...n=(2.1).(2.2)...(2.n)=\prod_{i=1}^{n}2!$

Và $\left(m^2+m\right)^n=\left(m^2+m\right)\left(m^2+m\right)...\left(m^2+m\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(m^2+m\right)$

Do đó , các bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$\prod_{i=1}^{n}2i\le\prod_{i=1}^{n}(m+1-i)(m+i)\le\prod_{i=1}^{n}\left(m^2+m\right)$

Ta có : $2i=i^2+i-i^2+i$

$$\le m^2+m-i^2+i=(m+1-i)(m+i)$$

$$\le m(m+1)=m^2+m$$

(vì i là số nguyên nằm giữa 1 và n). Suy ra:

$$2i\le(m+1-i)(m+i)\le m^2+m$$

Do đó, ta được :

$$\prod_{i=1}^{n}2i\le\prod_{i=1}^{n}(m+1-i)(m+i)\le\prod_{i=1}^{n}(m^2+m)$$

<u>Vậy</u>: Các bất đẳng thức đã cho là đúng.

2.3.5. (Singapore – National Team Selection Tests 1997 – 1998)

Cho $a_1\ge...a_n\ge a_{n+1}=0$ là một dãy các số thực.

Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k}\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\left(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k-1}}\right)$$

<u>Giải:</u>

Ta cần chứng minh:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k}\le\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k}\left(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k-1}}\right)+\sqrt{na_n} \qquad (1)$$

Ta sử dụng phương pháp quy nạp theo n.

Trường hợp n = 1 đã rõ.

Giả sử (1) đúng với $n\ge1$. Ta xét $a_1\ge...a_n\ge a_{n+1}\ge a_{n+2}=0$

Đặt $S=\sum_{k=1}^{n}a_k$ và $b=a_{n+1}$. Ta chỉ cần chứng minh:

$$\sqrt{S+b}-\sqrt{S}\le-\sqrt{nb}+\sqrt{(n+1)b} \qquad (2)$$

Hiển nhiên (2) đúng khi b = 0.

Nếu b > 0, chia hai vế của (2) cho $\sqrt{b}$ và đặt $U=\frac{S}{b}$, ta được bất đẳng thức tương đương: $\sqrt{U+1}-\sqrt{U}\le\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{U+1}+\sqrt{U}}\le\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

Bất đẳng thức sau cùng này đúng vì ta có $b=a_{n+1}\le\frac{S}{n}$, do đó $U\ge n$.

Ta có điều phải chứng minh.

2.3.6. (IMO 1999)

Cho n là một số nguyên dương cố định, $n \geq 2$.

a) Hãy tìm hằng số C bé nhất sao cho ta có:

$$\sum_{i<j} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right) \leq C\left(\sum x_i\right)^4 \qquad (*)$$

với mọi số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_n$.

b) Với hằng số C trên, khi nào dấu bằng xảy ra?

Giải:

Cho $x_1 = x_2 = 1$ và $x_3 = x_4 = ... = x_n = 0$, ta có:

$$\sum_{i<j} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right) = C\left(\sum x_i\right)^4$$

Nên $C = \frac{1}{8}$. Do đó, số C bé nhất cần tìm không thể bé hơn $\frac{1}{8}$.

Mặt khác, với mọi số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_n$, ta có:

$$\left(\sum x_i\right)^4 = \left(\sum x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j\right)^2 \geq 4\left(\sum x_i^2\right)\left(2\sum_{i<j} x_i x_j\right) = 8\sum_{i<j}\left(x_i x_j \sum x_k^2\right)$$

$$\geq 8\sum_{i<j} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right)$$

Dấu bằng ở bất đẳng thức thứ hai xảy ra khi và chỉ khi (n – 2) các x_i còn lại bằng 0

Lúc đó, để bất đẳng thức thứ nhất trở thành đẳng thức, ta phải có

$$x_1^2 + x_2^2 = 2x_1 x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Tóm lại, ta có kết quả $C = \frac{1}{8}$, đẳng thức xảy ra khi có 2 số trong $x_1, x_2, ..., x_n$ bằng nhau, đồng thời những số còn lại đều bằng 0.

Chương III – CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG GHÉP ĐỐI XỨNG

Thông thường đối với một số bài toán bất đẳng thức (BĐT) phức tạp có tính đối xứng và hoán vị vòng quanh thì chúng ta có rất nhiều cách phân tích và biến đổi để đưa những BĐT này về những dạng quen thuộc hay dễ hơn. Sau đây tôi xin đưa ra một phương pháp giúp cho việc nhận xét và giải các bài toán BĐT một cách dễ dàng hơn, qua các ví dụ sau đây:

3.1. Ghép đối xứng dạng 1:

Ví dụ 1: Cho x, y, z >0, thỏa mãn x + y + z = 1

Chứng minh $\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+xz}+\sqrt{z+xy}\geq 1+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$

Giải : BĐT được viết lại $\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+xz}+\sqrt{z+xy}\geq x+\sqrt{yz}+y+\sqrt{xz}+z+\sqrt{xy}$

Nhìn vào BĐT, ta nghĩ BĐT sẽ được chứng minh xong nếu ta chứng minh được :

$$\begin{cases}\sqrt{x+yz}\geq x+\sqrt{yz}\\ \sqrt{y+xz}\geq y+\sqrt{xz}\\ \sqrt{z+xy}\geq z+\sqrt{xy}\end{cases}$$

Ta cùng xem xét nhận xét này. Ta có

$$\sqrt{x+yz}\geq x+\sqrt{yz}\Leftrightarrow x+yz\geq x^2+2x\sqrt{yz}+yz$$

$$\Leftrightarrow x\geq x^2+2x\sqrt{yz}\Leftrightarrow 1\geq x+2\sqrt{yz}$$

$$\Leftrightarrow x+y+z\geq x+2\sqrt{yz}\Leftrightarrow y+z-2\sqrt{yz}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2\geq 0\quad (*)$$

(*) đúng , nên $\sqrt{x+yz}\geq x+\sqrt{yz}$

Chứng minh tương tự được : $\sqrt{y+xz}\geq y+\sqrt{xz}$, $\sqrt{z+xy}\geq z+\sqrt{xy}$

Suy ra

$$\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+xz}+\sqrt{z+xy}\geq x+y+z+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}+\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+xz}+\sqrt{z+xy}\geq 1+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}+\sqrt{xy}$$

Nhận xét : Với một cách nhìn nhận đơn gián ta có thể chứng minh bài toán trên một cách dễ dàng mà không cần dùng đến một BĐT hay một phép biến đổi nào phức tạp.

Ví dụ 2: Cho x, y, z >0. Chứng minh:

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\geq\sqrt{3}\left(x+y+z\right)$$

Giải:

Ta viết lại BĐT

$$2\sqrt{x^2+xy+y^2}+2\sqrt{y^2+yz+z^2}+2\sqrt{x^2+xz+z^2}\geq\sqrt{3}\left(2x+2y+2z\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+xy+y^2}+2\sqrt{y^2+yz+z^2}+2\sqrt{x^2+xz+z^2}\geq\sqrt{3}\left(x+y\right)+\sqrt{3}\left(y+z\right)+\sqrt{3}\left(x+z\right)(*)$$

Ta có $2\sqrt{x^2+xy+y^2} \geq \sqrt{3}(x+y)$ (**)

Thật vậy (**) $\Leftrightarrow 4(x^2+xy+y^2) \geq 3(x+y)^2$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$, đúng .

Suy ra (**) đúng

Nên $2\sqrt{x^2+xy+y^2} \geq \sqrt{3}(x+y)$

Chứng minh tương tự được:

$2\sqrt{y^2+yz+z^2} \geq \sqrt{3}(y+z)$

$2\sqrt{x^2+xz+z^2} \geq \sqrt{3}(x+z)$

Cộng vế được:

$$2\sqrt{x^2+xy+y^2}+2\sqrt{y^2+yz+z^2}+2\sqrt{x^2+xz+z^2} \geq \sqrt{3}(x+y)+\sqrt{3}(y+z)+\sqrt{3}(x+z)$$

Vậy (*) đúng, ta có điều phải chứng minh.

<u>Ví dụ 3</u>: Cho x, y, z > 0 và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Chứng minh : $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}+\dfrac{z}{1-z^2} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

<u>Giải:</u> Với giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

ta dễ liên tưởng đến việc ghép đối xứng, ta phân tích: $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2+z^2)$

Việc chứng minh bài toán lúc này đơn giản hơn nhiều, ta chỉ cần chứng minh:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}x^2 & (1) \\ \dfrac{y}{1-y^2} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}y^2 & (2) \\ \dfrac{z}{1-z^2} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}z^2 & (3) \end{cases}$$

Ta có : $\dfrac{x}{1-x^2} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \Leftrightarrow 2x \geq 3\sqrt{3}x^2(1-x^2)$

$\Leftrightarrow 2 \geq 3\sqrt{3}x(1-x^2) \Leftrightarrow 2+3\sqrt{3}x^3 \geq 3\sqrt{3}x$ (*)

Áp dụng BĐT AM-GM : $1+1+(\sqrt{3}x)^3 \geq 3\sqrt{3}x \Leftrightarrow 2+3\sqrt{3}x^3 \geq 3\sqrt{3}x$, suy ra (*) đúng

Chứng minh tương tự (2) và (3)

Vậy bài toán được chứng minh xong

***<u>Nhận xét</u>**:

Qua các VD1,VD2,VD3 ta thấy đều có dạng: $A+B+C \geq X+Y+Z$

Ta có cách chứng minh tổng quát: $A \geq X;\ B \geq Y;\ C \geq Z$

3.2. <u>Ghép đối xứng dạng 2:</u>

Ví dụ 4: Cho a, b, c > 0; chứng minh

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

Giải: Thoạt nhìn ta liền nghĩ ngay đến việc sử dụng BĐT AM - GM trong việc chứng minh bài toán này, nhưng nếu xét kĩ thì ta thấy a + b - c; b + c - a; a + c - b chưa chắc là những số dương .Bây giờ phương pháp ta nghĩ đến là ghép đối xứng.

Ta chỉ cần chứng minh $b^2 \geq (a+b-c)(b+c-a)$ (*)

Áp dụng BĐT : $xy \leq \dfrac{(x+y)^2}{4}, \quad \forall x, y$

Dễ dàng chứng minh được (*)

Chứng minh tương tự ta cũng có $a^2 \geq (a+b-c)(a+c-b)$

$$c^2 \geq (c+a-b)(c+b-a)$$

Suy ra $a^2b^2c^2 \geq (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2$

Vậy $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Ví dụ 5: Chứng minh với mọi số dương a, b, c ta có

$$\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^3+abc}}+\frac{b+c}{\sqrt[3]{b^3+abc}}+\frac{a+c}{\sqrt[3]{c^3+abc}} \geq 3\sqrt[3]{4} \quad (1)$$

Giải:

Ta có : $(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{\dfrac{(a+b)^3}{a^3+abc}}+\sqrt[3]{\dfrac{(b+c)^3}{b^3+abc}}+\sqrt[3]{\dfrac{(a+c)^3}{c^3+abc}} \geq 3\sqrt[3]{4}$

Áp dụng BĐT : AM-GM

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)^3}{a^3+abc}}+\sqrt[3]{\frac{(b+c)^3}{b^3+abc}}+\sqrt[3]{\frac{(a+c)^3}{c^3+abc}} \geq 3.\sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{(a+b)^3(b+c)^3(a+c)^3}{abc(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)^3(b+c)^3(a+c)^3}{abc(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)} \geq 64$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^3(b+c)^3(a+c)^3 \geq 64abc(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)$$

Với BĐT bậc 9 này ta không thể chứng minh bằng cách bình thường, ta nghĩ đến phương pháp đối xứng nhưng không phải có thể áp dụng dễ dàng . Ta phải biến đổi thêm:

BĐT tương đương

$$(a+b)^4(b+c)^4(a+c)^4 \geq 64abc(a+b)(b+c)(a+c)(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab) \quad (*)$$

Và bây giờ ta chỉ cần việc chứng minh :

$$(a+b)^2(a+c)^2 \geq 4a(b+c)(a^2+bc)$$

Ta có: $(a+b)^2(a+c)^2 = ((a^2+bc)+a(b+c))^2$

$$\geq 4a(b+c)(a^2+bc)$$

Và với việc chứng minh tương tự, ta được:

$$(b+c)^2(a+b)^2 \ge 4b(a+c)(b^2+ac)$$
$$(b+c)^2(a+c)^2 \ge 4c(a+b)(c^2+ab)$$

Vậy (*) được chứng minh xong.
Do đó bất đẳng thức ở đầu bài đã được chứng minh xong.

*<u>**Nhận xét**</u>:
Qua hai VD4, VD5, ta nhận thấy 2 bất đẳng thức trên có dạng

$$ABC \ge XYZ$$

Và ta có cách chứng minh tổng quát:

$$A^2 \ge XY$$
$$B^2 \ge YZ$$
$$C^2 \ge ZX$$

3.3.<u>Chuẩn hóa các bài toán bất đẳng thức đối xứng ba biến:</u>

<u>**Ví dụ 6:**</u> **(Japan MO 2002)**

Chứng minh rằng với mọi a, b , c không âm ta có bất đẳng thức:

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \ge \frac{3}{5}$$

<u>**Giải:**</u>

Ta chuẩn hóa a + b + c = 3 và xét riêng từng số hạng của biểu thức :

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}=\frac{(3-2a)^2}{(3-a)^2+a^2}=\frac{9-12a+4a^2}{9-6a+2a^2}=2-\frac{9}{2a^2-6a+9}$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{1}{2a^2-6a+9}+\frac{1}{2b^2-6b+9}+\frac{1}{2c^2-6c+9} \le \frac{3}{5}$$

Ta làm theo phương pháp tìm số thực k sao cho

$$\frac{1}{2a^2-6a+9} \le \frac{1}{5}+k(a-1)$$

Để tìm được số k, ta hãy chú ý đến phép tính sau:

$$\frac{5}{2a^2-6a+9}-1=\frac{2a^2-6a+4}{2a^2-6a+9}=\frac{2(a-1)(a-2)}{2a^2-6a+9}$$

Khi a = 1 thì biểu thức $\frac{a-2}{2a^2-6a+9}$ có giá trị bằng $\frac{-1}{5}$.

Vậy nên ta sẽ dự đoán rằng

$$\frac{2(a-1)(a-2)}{2a^2-6a+9} \ge \frac{-2(a-1)}{5}$$

Bất đẳng thức trên được chứng minh như sau

$$(a-1)(5(a-2)+2a^2-6a+9) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)(2a^2-a-1) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^2(2a+1) \ge 0$$

(đúng theo giả thiết)
Từ đó suy ra

$$\frac{1}{2a^2-6a+9} \le \frac{1}{5} - \frac{2}{25}(a-1)$$

Thay a bởi b, c rồi cộng theo vế các bất đẳng thức, ta được điều phải chứng minh.

<u>Ví dụ 7</u>: (USA MO 2003)

Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8$$

<u>Giải:</u>

Ta chuẩn hóa a + b + c = 3 để rút gọn các số hạng vế trái trở thành các biểu thức đơn giản hơn đối với một biến của a, b, c.

Bất đẳng thức ban đầu tương đương với

$$\frac{(3-a)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(3-b)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(3-c)^2}{2c^2+(3-c)^2} \le 8$$

Chú ý điều kiện a + b + c = 3, ta sẽ tìm một số thực k sao cho

$$\frac{(3-a)^2}{2a^2+(3-a)^2} \le \frac{8}{3} + k(a-1)$$

Khi đó bất đẳng thức sẽ được chứng minh vì

$$VT \le 8 + k(a+b+c-3) = 8$$

Ta có

$$\frac{3(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2} = \frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3} = 1 + \frac{8a+6}{(a-1)^2+2} \le 1 + \frac{8a+6}{2} = 4a+4$$

Vậy $k = \frac{4}{3}$ và bất đẳng thức được chứng minh xong.

Sau đây là một số **bài tập áp dụng**:

1) Cho a, b, c dương. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \ge \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}\right)$$

2) Cho a, b, c dương thỏa mãn ab + bc + ca = 3. Chứng minh:

$$\sqrt[3]{1+3a^2} + \sqrt[3]{1+3b^2} + \sqrt[3]{1+3c^2} \ge 2\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a+b}}\right)$$

3) Cho a, b,c dương. Chứng minh:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \ge abc(a+b+c)$$

4) Cho a, b, c dương. Chứng minh:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc} \ge \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}$$

5) Cho a, b, c dương. Chứng minh:

$$(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 \geq (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$$

6) (Poland 1991)

Giả sử các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=2$.

Chứng minh $x+y+z \leq 2+xyz$

7) (Poland 1997)

Các số thực a, b, c thỏa mãn a, b, c $\geq -\frac{3}{4}$ và $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng : $\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2} \leq \frac{9}{10}$

8) (Math Changelles)

Chứng minh với mọi a, b, c ≥ 0 thì

$3\sqrt[3]{abc}+|a-b|+|b-c|+|c-a| \geq a+b+c$.

9) (Mathlinks Contests)

Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương có tích bằng 1 thì

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+1}}+\sqrt{\frac{b+c}{b+1}}+\sqrt{\frac{c+a}{c+1}} \geq 3$$