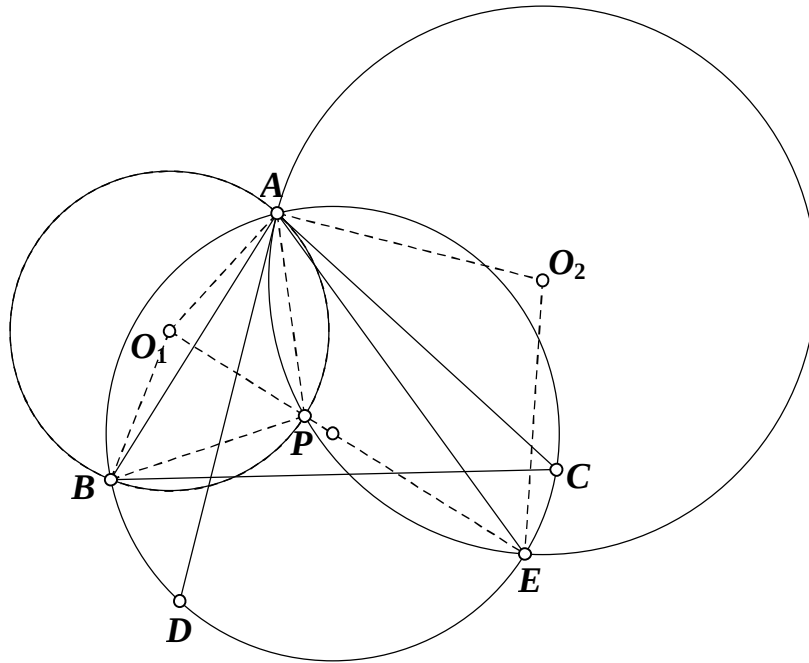


LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA TRUNG QUỐC NĂM HỌC 2012^(*)

Bài 1.

Cho tam giác ABC có A là góc lớn nhất. Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác, gọi D, E lần lượt là trung điểm của các cung ABC và ACB . Đường tròn C_1 đi qua A, B và tiếp xúc với AC tại A . Đường tròn C_2 đi qua A, E và tiếp xúc với AD tại A . Hai đường tròn này cắt nhau tại A và P . Chứng minh rằng AP là phân giác của góc BAC .

Lời giải.



Xét trường hợp góc A nhọn. Trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Giả sử O_1, O_2 lần lượt là tâm của các đường tròn C_1, C_2 . Ta sẽ chứng minh rằng $(O_1), (O_2), O_1E$ cùng đi qua P .

Thật vậy, trên đoạn EO_1 , lấy điểm Q sao cho $BO_1 = QO_1$, suy ra Q nằm trên (O_1) .

Do (O_1) tiếp xúc với AC tại A nên $\angle BO_1A = 2\angle BAC$.

Hơn nữa, O_1, E cùng nằm trên đường trung trực của AB nên O_1E là phân giác của góc $\angle BO_1A$ hay $\angle BO_1Q = \angle BAC$.

Tam giác BO_1Q cân tại O_1 nên suy ra $\angle BQE = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$. Ta cũng có Q nằm trên đường trung trực EO_1 của AB và A và B đối xứng với nhau qua EO_1 nên

$$\angle AQE = \angle BQE = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Vì (O_2) tiếp xúc với AD tại A và đi qua E nên ta cũng có $\angle AO_2E = 2\angle DAE = 180^\circ - \angle BAC$.

Từ đó suy ra $\frac{1}{2}\angle AO_2E + \angle AQE = 180^\circ$ hay Q nằm trên đường tròn (O_2) .

Do đó P, Q trùng nhau hay $\angle BAP = \frac{1}{2}\angle BO_1P = \frac{1}{2}\angle BAC$.

Vậy AP là phân giác của góc $\angle BAC$. Ta có đpcm.

Bài 2.

Cho p là số nguyên tố. Xét bảng $p \times p$ và điền các số nguyên từ 1 đến p^2 vào từng ô trong bảng. Tiếp theo, người ta chọn một hàng hoặc một cột bất kì của bảng rồi cộng 1 hoặc trừ 1 cho tất cả các ô vuông trong hàng hoặc cột đó. Một cách điền số ban đầu được gọi là “tốt” nếu sau một số hữu hạn lần chuyển đổi như trên thì nhận được một bảng gồm toàn số 0.

Hỏi có bao nhiêu cách điền “tốt” như thế?

Lời giải.

Gọi giá trị của ô ở hàng thứ i , cột thứ j là $A_{(i,j)}$. Giả sử sau a_i lần cộng 1 và $-b_j$ lần trừ 1 vào số này thì sẽ nhận được 0 ở cùng vị trí của bảng trong trạng thái cuối cùng, trong đó $1 \leq i, j \leq p$.

Dễ dàng thấy rằng $A_{(i,j)} + a_i + b_j = 0, \forall i, j = \overline{1, p}$.

Tính tổng tất cả các ô này theo hàng và theo cột, ta được

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p [A_{(i,j)} + a_i + b_j] &= 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (a_i + b_j) = - \sum_{k=1}^{p^2} k \\ &\Leftrightarrow p(a_1 + a_2 + \dots + a_p + b_1 + b_2 + \dots + b_p) = - \frac{p^2(p^2 + 1)}{2} \\ &\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_p) + (b_1 + b_2 + \dots + b_p) = - \frac{p(p^2 + 1)}{2} \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh rằng với $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(p)\}$ là một hoán vị bất kì của $\{1, 2, 3, \dots, p\}$ thì tổng của các số $A_{(1, \sigma(1))}, A_{(2, \sigma(2))}, \dots, A_{(p, \sigma(p))}$ là không đổi (nghĩa là tổng của p số mà không có hai số nào cùng thuộc một hàng hoặc cùng một cột).

Thật vậy, dễ thấy rằng $b_1 + b_2 + \dots + b_p = b_{\sigma(1)} + b_{\sigma(2)} + \dots + b_{\sigma(p)}$ nên

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_p) + (b_{\sigma(1)} + b_{\sigma(2)} + \dots + b_{\sigma(p)}) = (a_1 + a_2 + \dots + a_p) + (b_1 + b_2 + \dots + b_p)$$

Suy ra $A_{(1, \sigma(1))} + A_{(2, \sigma(2))} + \dots + A_{(p, \sigma(p))} = A_{(1,1)} + A_{(2,2)} + \dots + A_{(p,p)} \cdot (*)$

Do hoán vị này lấy tùy ý nên ta có thể giả sử $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1, \sigma(i) = i, 3 \leq i \leq p$.

Khi đó, so sánh các giá trị trong hai vế của đẳng thức (*), ta được $A_{(1,1)} + A_{(2,2)} = A_{(1,2)} + A_{(2,1)}$ hay $A_{(1,1)} - A_{(2,1)} = A_{(1,2)} - A_{(2,2)}$. Tiếp tục thay đổi hoán vị này và với cách lập luận tương tự, ta suy ra rằng $A_{(1,i)} - A_{(2,i)}$ không đổi với $1 \leq i \leq p$.

Điều này cũng đúng với hai hàng bất kì nào khác, tức là khoảng cách giữa các phần tử ở trong hàng đầu tiên sẽ giống với khoảng cách giữa các phần tử trong các hàng khác.

Tiếp theo, ta sẽ tìm số cách điền số vào bảng thỏa mãn tính chất trên.

Giả sử ta điền vào hàng thứ nhất của bảng các số $c_1, c_2, \dots, c_p \in \{1, 2, 3, \dots, p^2\}$.

Khi đó, bộ $C_i = \{c_1 + x_i, c_2 + x_i, \dots, c_p + x_i\}$ đại diện cho các số điền lên hàng thứ i với $1 \leq i \leq p$ và $0 = x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{Z}$ tương ứng với hàng thứ nhất $C_1 = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$ đã nêu.

Ta cần tìm các số $c_1, c_2, \dots, c_p \in \{1, 2, 3, \dots, p^2\}$ sao cho tồn tại các số $x_2, x_3, \dots, x_p$ mà tất cả các bộ $C_1, C_2, \dots, C_p$ là phân hoạch của tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, p^2\}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $1 = c_1 < c_2 < \dots < c_p$ và $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p$.

Ta sẽ chứng minh rằng trong trường hợp này thì $x_i = i - 1, 2 \leq i \leq p$ (tương ứng với cột đầu tiên là $1, 2, 3, \dots, p$) hoặc $c_i = i, 1 \leq i \leq p$ (tương ứng với hàng đầu tiên là $1, 2, 3, \dots, p$).

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $c_2 > 2, x_2 > 1$ thì không có hàng chứa số 2, mâu thuẫn. Do đó, trường hợp này không thể xảy ra.

- Nếu $x_2 = 1$. Ta thấy rằng nếu $c_2 \leq p$ thì ta giả sử $c_2 = k, 3 \leq k \leq p$. Khi đó, hai số đầu tiên của hàng thứ hai buộc phải là 2 và $k + 1$ (do việc sắp thứ tự ở trên). Tiếp theo, hai số đầu tiên của hàng thứ ba buộc phải là 3 và $k + 2$. Cứ như thế thì hai số đầu tiên của hàng thứ $k - 1$ buộc phải là $k - 1$ và $2(k - 1)$.

Như thế, ta đã điền được $2(k - 1)$ số đầu tiên vào bảng con $(k - 1) \times 2$ ở phía trên bên trái của bảng đã cho.

Tiếp theo, ta xét việc điền số $2k-1$. Rõ ràng $x_k \geq 2k-2$ và nếu như $x_k > 2k-2$ thì số $2k-1$ sẽ không thể điền được.

Như thế, buộc $x_k = 2k-2$ và cứ tiếp tục lập luận như thế, tức là ta phải đặt thêm một bảng con $(k-1) \times 2$ phía dưới bảng kia và cứ tiếp tục như thế đến khi hết hai cột đầu tiên như minh họa:

1	k								
2	$k+1$								
3	$k+2$								
...	...								
$k-1$	$2k-2$								
$2k-1$	$3k-2$								
$2k-2$	$3k-3$								

Từ đó dễ thấy rằng ta phải có $(k-1) \mid p$, mâu thuẫn do p là số nguyên tố. Do đó, ta có $c_2 \geq p+1$.

Như thế, cột đầu tiên phải được điền bởi $1, 2, 3, \dots, p$ theo đúng thứ tự đó hay $x_i = i-1, 2 \leq i \leq p$.

- Nếu $c_2 = 2$. Gọi k là số lớn nhất sao cho $c_i = i, 1 \leq i \leq k$. Ta cần chứng minh rằng $k = p$.

Thật vậy, nếu $k < p$ thì các số $k+1, k+2, \dots, 2k-1, 2k$ không thể nằm trên hàng thứ nhất.

Do việc sắp thứ tự giá trị ở trên thì ta thấy rằng các số này phải nằm ở hàng thứ hai. Tiếp tục như thế thì các số sau $2k+1, 2k+2, \dots, 3k$ phải nằm ở hàng thứ nhất, ... ta nhận được bảng có dạng sau

1	2	...	k	$2k+1$	$2k+2$	...	$3k$	$4k+1$	...
$k+1$	$k+2$	...	$2k$	$3k+1$	$3k+2$	...	$4k$	$5k+1$	...
...									

Dễ thấy rằng hai ô cuối cùng của cột thứ nhất và thứ hai phải kết thúc bằng một bội số của k mà mỗi hàng đều có tổng cộng là p số nên $k \mid p$, mâu thuẫn vì p là số nguyên tố.

Do đó, trong trường hợp này, ta có $c_i = i, 1 \leq i \leq p$.

Từ hai trường hợp trên, ta thấy rằng điều kiện của một bảng thỏa mãn đề bài là:

Bảng phải chứa một hàng (hoặc một cột) mà trong đó các số $1, 2, 3, \dots, p-1, p$ xuất hiện đầy đủ (không nhất thiết là theo đúng thứ tự). Giá trị tương ứng của các số ở hàng (hoặc cột) khác sẽ được xác định theo dãy đó bằng cách cộng đồng thời vào mỗi số một giá trị $x_i = pi, 1 \leq i \leq p-1$.

Ta sẽ chứng minh rằng có thể chuyển bảng này về bảng chứa toàn số 0 bằng các biến đổi đã cho.

Thật vậy, giả sử các số ở hàng đầu tiên lúc này là $1, 2, 3, \dots, p$ theo đúng thứ tự đó (các trường hợp khác hoàn toàn tương tự). Ở hàng có dạng $1 + x_i, 2 + x_i, \dots, p + x_i$, ta trừ cho 1 với x_i lần và thực hiện cho tất cả $p - 1$ hàng như vậy. Khi đó, các số trên tất cả các hàng này sẽ đều cùng trở thành $1, 2, 3, \dots, p$. Đến đây, ta trừ cho cột thứ nhất 1 lần, cột thứ hai 2 lần, ... và cứ thế.

Rõ ràng, các thao tác này sẽ cho ta bảng chứa toàn số 0. Điều này có nghĩa là cách điền số như trên là cách điền “tốt”.

Ta sẽ đếm số các cách điền “tốt” như vậy.

Xét trường hợp có một hàng chứa toàn các số $1, 2, 3, \dots, p - 1, p$ thì số cách sắp xếp các số này lên một hàng là $p!$ và cách điền số lên mỗi hàng khác được xác định duy nhất theo hàng đó.

Số cách đổi thứ tự các hàng $1, 2, 3, \dots, p$ là $p!$ nên số trường hợp là $(p!)^2$ cách.

Trường hợp còn lại khi mà có một cột được điền bởi các số $1, 2, 3, \dots, p$ thì cũng có $(p!)^2$ cách.

Vậy số cách điền “tốt” thỏa mãn đề bài là $2(p!)^2$. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Bài 3.

Chứng minh rằng với mọi $c > 2$, tồn tại một dãy tăng ngặt các số nguyên dương

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{m-1} < a_m < \dots$$

thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $a_i > c^i$ với mọi $i = 1, 2, 3, \dots$

ii) Với mọi $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m \in \{-1, 1\}$ thì giá trị $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m$ luôn khác 0.

iii) Với mọi số nguyên n khác 0 tùy ý, tồn tại số nguyên dương m và $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m \in \{-1, 1\}$ sao cho ta có đẳng thức $n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m$.

Lời giải.

Rõ ràng điều kiện iii) ở trên có thể thay bằng:

“Với mọi số nguyên dương n khác 0 tùy ý, tồn tại số nguyên dương m và $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m \in \{-1, 1\}$ sao cho ta có đẳng thức $n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m$.”

Thật vậy, nếu đã có $n = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_mb_m$ thì $-n = a_1(-b_1) + a_2(-b_2) + \dots + a_m(-b_m)$ và hiển nhiên $-b_1, -b_2, \dots, -b_m \in \{-1, 1\}$ nên ta không cần xét số âm.

Gọi $a(n)$ là số nguyên dương lớn nhất sao cho các số trong tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, a(n)\}$ đều có thể biểu diễn được bởi các phân tử $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ của dãy.

Trước hết, ta sẽ chọn hai giá trị a_1, a_2 thích hợp rồi xây dựng phân tử của dãy sao cho các điều kiện i) và ii) được thỏa mãn; từ đó xây dựng dần dần các giá trị của dãy để có thể biểu diễn được tất cả các số nguyên dương n (tức là thỏa mãn điều kiện iii đã phát biểu lại ở trên).

Giả sử $a_1 = c^2, a_2 = c^2 + 1$ với $c > 2$ đã cho.

Các số dương tương ứng mà hai phân tử này biểu diễn được là $2c^2 + 1, 1$. Trong trường hợp này, ta thấy $a(2) = 1$.

Hơn nữa, dễ dàng thấy rằng $a_1 = c^2 > c^1, a_2 = c^2 + 1 > c^2, \forall c > 2$ nên các điều kiện i) và ii) được thỏa mãn.

Ta xây dựng tiếp hai phân tử a_3, a_4 thỏa mãn các điều kiện sau:

$$a_3 > c^3, a_4 > c^4, a_3 > a_1 + a_2 \text{ và } a_4 - a_3 = a_1 + a_2 + a(2) + 1.$$

Ta có thể chọn $a_3 = 2c^4 + 1, a_4 = 2c^4 + 2c^2 + 4$. Rõ ràng các điều kiện i), ii) vẫn thỏa.

Khi đó, dễ thấy rằng $-a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = 2$ nên $a(4) = a(2) + 1 = 2$.

Giả sử ta đã xây dựng được n phân tử của dãy là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ với n chẵn thỏa mãn các điều kiện sau đồng thời:

(1) $a_i > c^i$ với mọi $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

(2) Với mọi $k, 1 \leq k \leq n$ thì $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k \neq 0, b_i \in \{-1, 1\}, i = \overline{1, k}$.

(3) Với mọi $k \in \{1, 2, 3, \dots, a(n)\}$ thì tồn tại các số $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m \in \{-1, 1\}$ sao cho

$$k = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_mb_m.$$

(4) Với mọi $k = 1, 2, 3, \dots, \frac{k-1}{2}$ thì $a_{2k+1} > \sum_{i=1}^{2k} a_i$.

Ta sẽ chứng minh rằng từ n phần tử này, ta có thể xây dựng $n + 2$ phần tử thỏa mãn tất cả các điều kiện (1), (2), (3), (4) tương ứng ở trên.

Ta sẽ chọn tiếp a_{n+1}, a_{n+2} với cách sau

$$a_{n+1} > c^{n+1}, a_{n+2} > c^{n+2}, a_{n+1} > \sum_{i=1}^n a_i, a_{n+2} - a_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i + a(n) + 1 \quad (*)$$

Dễ thấy rằng có thể chọn a_{n+1}, a_{n+2} là có dạng đa thức bậc $n + 2$ theo biến c với các hệ số thích hợp, tức là chúng luôn tồn tại.

Rõ ràng với cách chọn như thế thì các điều kiện (1), (4) được thỏa mãn. Ta sẽ chứng minh rằng điều kiện (2) vẫn thỏa mãn.

Giả sử ngược lại là tồn tại giá trị k sao cho $\sum_{i=1}^k a_i b_i = 0, 1 \leq k \leq n + 2, b_i \in \{-1, 1\}$ thì theo cách xây dựng các phần tử đầu tiên của dãy, ta phải có $k > n$, tức là k chỉ có thể là $n + 1, n + 2$.

Tuy nhiên, từ hai điều kiện cuối của (*) thì không thể có $\sum_{i=1}^k a_i b_i = 0, 1 \leq k \leq n + 2, b_i \in \{-1, 1\}$ với $k = n + 1, k = n + 2$.

Hơn nữa, từ cách chọn phần tử a_{n+2} , ta cũng thấy rằng $a(n + 2) \geq a(n) + 1$, tức là các giá trị này tăng thực sự. Điều kiện (3) vẫn thỏa mãn với giá trị tốt hơn.

Ta lặp lại quá trình này vô hạn lần, tức là cho n tiến tới vô cực thì với số nguyên dương n lớn tùy ý, ta đều thấy rằng tồn tại số nguyên dương m và các số $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m \in \{-1, 1\}$ sao cho có đẳng thức $n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m$.

Vậy dãy như thế là tồn tại và ta có đpcm.

Bài 4.

Cho hàm số $f(x) = (x + a)(x + b)$ với $a, b > 0$.

Với các số thực không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$ có tổng là 1, xác định giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \min \{ f(x_i), f(x_j) \}.$$

Lời giải.

Không mất tính tổng quát, giả sử $1 \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n \geq 0$.

Dễ thấy rằng hàm số $f(x) = (x+a)(x+b)$ đồng biến nên ta có $\min_{1 \leq i < j \leq n} \{f(x_i), f(x_j)\} = f(x_j)$.

Do đó,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \min \{f(x_i), f(x_j)\} &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} f(x_j) = f(x_2) + 2f(x_3) + \dots + (n-1)f(x_n) = \sum_{i=2}^n (i-1)f(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (i-1)x_i^2 + (a+b) \sum_{i=1}^n (i-1)x_i + \frac{n(n-1)}{2}ab \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Chebyshev cho các dãy đơn điệu ngược chiều là

$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n$ và $0 \leq 1 \leq 2 \leq \dots \leq n-1$, ta có

$$\sum_{i=2}^n (i-1)x_i \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (i-1) \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $\sum_{i=1}^n (i-1)x_i^2 \leq \frac{n-1}{2n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$ với mọi $n \geq 2$. (*)

Thật vậy,

- Với $n = 2$, ta có $x_2^2 \leq \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2$. Điều này hiển nhiên do $x_2 \leq x_1$.

- Giả sử bất đẳng thức (*) đúng với $n = k \geq 2$, tức là $\sum_{i=1}^k (i-1)x_i^2 \leq \frac{k-1}{2k} \left(\sum_{i=1}^k x_i \right)^2$

Ta cần chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{k+1} (i-1)x_i^2 \leq \frac{k}{2(k+1)} \left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i \right)^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k (i-1)x_i^2 + kx_{k+1}^2 \leq \frac{k}{2(k+1)} \left(\sum_{i=1}^k x_i + x_{k+1} \right)^2.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{k-1}{2k} \left(\sum_{i=1}^k x_i \right)^2 + kx_{k+1}^2 \leq \frac{k}{2(k+1)} \left(\sum_{i=1}^k x_i + x_{k+1} \right)^2.$$

Đặt $\sum_{i=1}^k x_i = kx, x \geq x_{k+1}$. Bất đẳng thức trên chính là $\frac{k(k-1)}{2}x^2 + kx_{k+1}^2 \leq \frac{k}{2(k+1)}(kx + x_{k+1})^2$.

Biến đổi tương đương, ta được

$$(k^2 - 1)x^2 + 2(k+1)x_{k+1}^2 \leq (kx + x_{k+1})^2 \Leftrightarrow x^2 + 2kxx_{k+1} - (2k+1)x_{k+1}^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng do $0 < x_{k+1} \leq x$. Theo nguyên lí quy nạp thì (*) được chứng minh.

Do $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1$ nên $\sum_{i=1}^n (i-1)x_i^2 \leq \frac{n-1}{2n}$.

Từ đó suy ra $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \min\{f(x_i), f(x_j)\} \leq \frac{n-1}{2n} + (a+b)\frac{n-1}{2} + \frac{n(n-1)ab}{2} = \frac{n-1}{2n}(1+na)(1+nb)$.

Vậy giá trị lớn nhất cần tìm của F cần tìm là $\frac{n-1}{2n}(1+na)(1+nb)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$.

Bài 5.

Xét một số square – free n chẵn và một số nguyên tố p sao cho

i) n, p nguyên tố cùng nhau.

ii) $p \leq 2\sqrt{n}$.

iii) Tồn tại số nguyên dương k sao cho $n+k^2$ chia hết cho p .

Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương (a, b, c) sao cho $n = ab + bc + ca$.

Lời giải.

Giả sử $k \equiv m \pmod{p}$ với $0 \leq m \leq p-1$. Do $(n, p) = 1$ và $p \mid (n+k^2)$ nên $(k, p) = 1$ hay $m > 0$.

Do n chẵn và $(n, p) = 1$ nên p là số nguyên tố lẻ. Suy ra $p - m \neq m \pmod{p}$.

Giả sử $c \in \{m, p-m\}$. Do $0 < m < p$ và $p \mid (n+k^2)$ nên $c > 0$ và $p \mid (n+c^2)$.

Thật vậy, giả sử $k = ap + c$ thì $n+c^2 = n+(k-ap)^2 = (n+k^2) + p(a^2p - 2ka)$ chia hết cho p .

Do $n+c^2$ chia hết cho p nên tồn tại số nguyên dương q sao cho $n+c^2 = pq$.

Suy ra $q = \frac{n+c^2}{p} \geq \frac{2c\sqrt{n}}{p} \geq c$ (do $p \leq 2\sqrt{n}$ theo giả thiết).

Tuy nhiên, do n là *square-free* nên không thể có $n = c^2$ và đẳng thức trong đánh giá trên không thể xảy ra, tức là $q > c$.

Đặt $a = q - c, b = p - c$ thì $n + c^2 = pq = (a + c)(b + c) = ab + bc + ca + c^2 \Leftrightarrow n = ab + bc + ca$.

Ta chỉ còn cần chứng minh rằng a, b, c đôi một khác nhau.

Thật vậy, giả sử $b = c$ thì $p = 2c$, mâu thuẫn do p là số lẻ.

Nếu $a = b$ thì $p = q$ hay $n = p^2 - c^2 = (p - c)(p + c)$. Tuy nhiên, p, q cùng lẻ nên $p - c, p + c$ đều là các số chẵn hay n chia hết cho 4, mâu thuẫn do n là số *square-free*.

Nếu $a = c$ thì $q = 2c$ hay $2pc - n = c^2$ cũng mâu thuẫn do n chẵn và c lẻ.

Do đó, các số a, b, c đôi một khác nhau.

Ta có đpcm.

Bài 6.

Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất thỏa mãn tính chất sau:

Với mỗi tập con A của tập hợp $S = \{1, 2, 3, \dots, 2012\}$ với $|A| = k$, luôn tồn tại ba phần tử của tập hợp A là x, y, z sao cho

$$x = a + b, y = b + c, z = c + a$$

trong đó a, b, c là các phần tử đôi một khác nhau của tập hợp S .

Lời giải.

Từ điều kiện đã cho, ta thấy rằng $c = \frac{y + z - x}{2}, b = \frac{x + y - z}{2}, a = \frac{z + x - y}{2}$.

Trước hết, ta giả sử $b = c$ hay $z - x = x - z \Leftrightarrow x = z$, điều này không thể xảy ra. Tương tự với các điều kiện để có đẳng thức $c = a, a = b$. Từ đó suy ra các số này đôi một khác nhau.

Dễ thấy rằng điều kiện để các số trên nguyên là $x + y + z$ là chẵn. Ta cần tìm điều kiện của bộ số (x, y, z) sao cho $x < y < z, x + y > z$. (*)

Ta thấy rằng tập hợp tất cả các số lẻ $A' = \{1, 3, 5, \dots, 2009, 2011\}$ không thỏa mãn điều kiện tồn tại ba số mà tổng của chúng là chẵn. Tiếp theo, nếu ta thêm số 2 vào tập hợp đó thì được tập hợp

$A'' = \{1, 2, 3, 5, \dots, 2009, 2011\}$. Khi đó, ba số có tổng là chẵn trong tập hợp này chắc chắn phải chứa số 2. Tuy nhiên, điều kiện thứ hai nêu ở trên là tổng của hai số lớn hơn số còn lại không thỏa mãn, tức là tập hợp này vẫn không thỏa mãn điều kiện (*)

Hơn nữa $|A''| = 1007$ nên suy ra tập hợp A muốn thỏa mãn đề bài thì $|A| = k > 1007 \Rightarrow k \geq 1008$.

Ta sẽ chứng minh rằng mọi $k \geq 1008$ đều thỏa mãn điều kiện (*).

Xét một tập hợp A có 1008 phần tử và a số chẵn, $1008 - a$ số lẻ. Ta có hai trường hợp sau:

- Số phần tử chẵn trong A ít nhất là 100, tức là $a \geq 100$. Giả sử 100 phần tử chẵn trong đó là

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100} \text{ thì } a_{100} - a_1 < 2011 - 1 = 2010.$$

Ta cũng thấy rằng đánh giá trên có thể viết lại là

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{100} - a_{99}) \leq 2010.$$

Có tất cả 99 hiệu như thế nên tồn tại một số hiệu không vượt quá $\left\lceil \frac{2010}{99} \right\rceil = 21$. Tuy nhiên, do đây cùng là các số chẵn nên các hiệu này sẽ không vượt quá 20.

Giả sử một hiệu thỏa mãn điều đó là $a_{k+1} - a_k \leq 20$. Loại hiệu đó ra, ta còn 98 hiệu và tổng của chúng sẽ không vượt quá $2010 - 20 = 1990$.

Lập luận tương tự, ta sẽ tìm được một hiệu mới không vượt quá $\frac{1990}{98} < 21$. Tiếp tục như thế, ta

thấy rằng nếu đánh giá $\frac{2010 - 20z}{99 - z} < 22$ được thỏa thì ta sẽ tìm được tất cả z hiệu như thế mà giá trị của chúng không vượt quá 20. Dễ thấy bất phương trình trên tương đương với $z \leq 83$, tức là ta có thể chọn được nhiều nhất 83 hiệu có giá trị không vượt quá 20.

Ta gọi hiệu có chỉ số lớn nhất là $a_{k+1} - a_k$ thì $a_{k+1} - a_k \leq 20, a_k \geq 186$. Tiếp tục gọi hiệu có chỉ số lớn thứ nhì là $a_{j+1} - a_j$ thì $a_{j+1} - a_j \leq 20$ và $a_j \geq 184$.

Dễ dàng thấy rằng bộ ba (a_j, a_k, a_{k+1}) thỏa mãn $a_j < a_k < a_{k+1}$ và

$$a_j \geq 184 > 20 \geq a_{k+1} - a_k \Leftrightarrow a_j + a_k > a_{k+1}.$$

Rõ ràng bộ ba này thỏa mãn điều kiện (*).

- Số phần tử chẵn trong A nhỏ hơn 100, tức là số phần tử lẻ trong A ít nhất là 908. Ta xét 908 phần tử trong đó là $b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_{908}$. Dễ thấy rằng $b_{908} - b_1 \leq 2011 - 1 = 2010$.

Đánh giá trên có thể viết lại là

$$(b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \dots + (b_{908} - b_{907}) \leq 2010.$$

Có tất cả 907 hiệu như thế nên có thể tìm được một hiệu không vượt quá $\left\lceil \frac{2010}{907} \right\rceil = 3$. Tuy nhiên, do đây đều là các số lẻ nên các hiệu này sẽ không vượt quá 2.

Giả sử một hiệu thỏa mãn điều đó là $a_{k+1} - a_k \leq 2$. Loại hiệu đó ra, ta còn 906 hiệu và tổng của chúng sẽ không vượt quá $2010 - 2 = 2008$.

Tiếp tục lập luận như trên, xét đánh giá $\frac{2010 - 2z}{907 - z} < 4$ thì ta thấy rằng có thể tìm được 808 hiệu có giá trị không vượt quá 2.

Giả sử hiệu có chỉ số lớn nhất là $b_{j+1} - b_j$ thì $b_{j+1} - b_j \leq 2$ và $b_j \geq 1615$.

Do trong A có ít nhất 2 số chẵn nên có một số không nhỏ hơn 4 là a_0 . Khi đó, bộ ba (a_0, b_j, b_{j+1}) thỏa mãn điều kiện $a_0 + b_j > b_{j+1}$ và $a_0 + b_j + b_{j+1}$ là các số chẵn nên thỏa mãn (*).

Từ đây dễ thấy tất cả các tập hợp A có $|A| = k \geq 1008$ đều thỏa mãn đề bài và như thế, giá trị nhỏ nhất cần tìm của k là $k = 1008$.