LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA
DỰ THI IMO 2001
****

Bài 1.

Cho dãy số nguyên $(a_n), n \in \mathbb{N}$ ***được xác định bởi*** $a_0 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{\left[\frac{n}{3}\right]}$ ***với mọi*** $n \in \mathbb{N}$**.**

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p \le 13$***, tồn tại vô số số nguyên dương k thỏa mãn*** a_k ***chia hết cho p.***

Lời giải.

Với p là số nguyên tố nào đó không vượt quá 13, ta sẽ chứng minh rằng nếu tồn tại $a_n \vdots p, n > 0$ thì sẽ có vô số số tự nhiên $m > n$ sao cho $a_m \vdots p$. (*)

Thật vậy, từ công thức xác định dãy, ta có:

$$a_{3n} = a_{3n-1} + a_n,$$
$$a_{3n+1} = a_{3n} + a_n = a_{3n-1} + 2a_n,$$
$$a_{3n+2} = a_{3n+1} + a_n = a_{3n-1} + 3a_n$$

Từ đó suy ra $a_{3n}, a_{3n+1}, a_{3n+2}$ có cùng số dư khi chia cho p, giả sử số dư đó là k.

- Nếu $k = 0$ thì nhận xét được chứng minh.
- Nếu $k \ne 0$ thì ta xét các số hạng sau của dãy:

$$a_{9n-4} \equiv a_{9n-4} \equiv a_{9n-4} (\text{mod } p), n > 0$$
$$a_{9n-3} \equiv a_{9n-4} + a_{3n-1} \equiv a_{9n-4} + a (\text{mod } p)$$
$$a_{9n-2} \equiv a_{9n-3} + a_{3n-1} \equiv a_{9n-4} + 2a_{3n-1} \equiv a_{9n-4} + 2a (\text{mod } p)$$
$$...$$
$$a_{9n+8} \equiv a_{9n+7} + a_{3n+2} \equiv a_{9n-4} + 12a (\text{mod } p)$$

Do $k \ne 0$ nên p số đầu tiên trong 13 số $a_{9n-4}, a_{9n-3}, a_{9n-2}, ..., a_{9n+8}$ lập thành một hệ thặng dư đầy đủ modun p và như thế thì tồn tại một số chia hết cho p. Do $n > 0 \Rightarrow 9n - 4 > n$ nên số hạng này lớn hơn số hạng a_n đã nêu.

Nhận xét (*) được chứng minh.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p \le 13$ thì tồn tại một số hạng của dãy chia hết cho p.

Ta có: $a_1 = 2 \vdots 2, a_2 = 3 \vdots 3, a_3 = 5 \vdots 5, a_4 = 7 \vdots 7, a_{11} = 33 \vdots 11, a_{20} = 117 \vdots 13$.

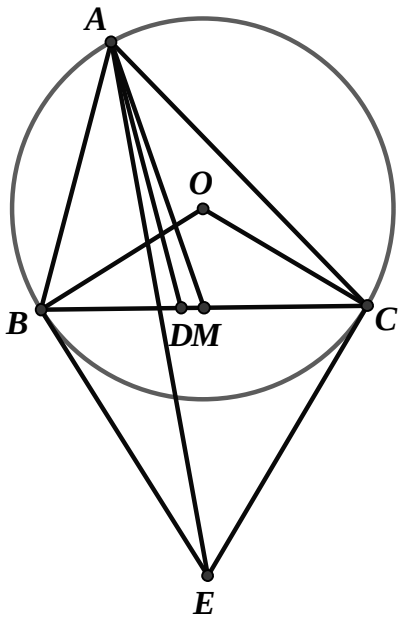
Từ hai điều này ta có đpcm.

Bài 2.

Trong mặt phẳng, cho hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi PT là một trong hai tiếp tuyến chung của đường tròn (P, T là các tiếp điểm). Tiếp tuyến tại P và T của đường tròn ngoại tiếp tam giác APT cắt nhau tại S. Gọi H là điểm đối xứng với B qua PT. Chứng minh rằng A, S, H thẳng hàng.

Lời giải.

Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề:



"Trong một tam giác, đường đối trung xuất phát từ một đỉnh đi qua giao điểm của tiếp tuyến tại hai đỉnh còn lại của đường tròn ngoại tiếp tam giác."

Chứng minh:

Xét tam giác ABC nội tiếp (O) có phân giác AD, E là giao điểm của tiếp tuyến tại B và C của (O) với nhau. Gọi AM là đường thẳng đối xứng với AE qua AD (M thuộc BC). Ta sẽ chứng minh rằng M là trung điểm của BC.

Thật vậy, do AM đối xứng với AE qua phân giác AD nên: $\widehat{BAM} = \widehat{CAE}, \widehat{CAM} = \widehat{BAE}$. Theo định lí sin trong các tam giác, ta có:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AM.\sin\widehat{BAM}}{AM.\sin\widehat{CAM}}.\frac{\sin\widehat{MBA}}{\sin\widehat{MCA}} = \frac{\sin\widehat{BAM}}{\sin\widehat{CAM}}.\frac{\sin\widehat{CBA}}{\sin\widehat{BCA}} =$$

$$= \frac{\sin\widehat{CAE}}{\sin\widehat{BAE}}.\frac{\sin\widehat{CBA}}{\sin\widehat{BCA}} = \frac{CE}{AE}.\frac{AE}{BE} = 1$$

Vậy M là trung điểm BC. Bổ đề được chứng minh.

*Trở lại bài toán:

Ta có:

$\widehat{BPT} = \widehat{BAP}, \widehat{BTP} = \widehat{BAT}$. Suy ra:

$$\widehat{PAT} = \widehat{BAP} + \widehat{BAT} = \widehat{BPT} + \widehat{BTP} = 180^0 - \widehat{PBT}$$

$$= 180^0 - \widehat{PHT} \Rightarrow \widehat{PAT} + \widehat{PHT} = 180^0$$

Do đó tứ giác PATH nội tiếp.

Gọi I là giao điểm của AB với PT. Theo tính chất phương tích, ta có:

$IP^2 = IB.IA,\ IT^2 = IB.IA \Rightarrow IP = IT$

hay I là trung điểm của PT.

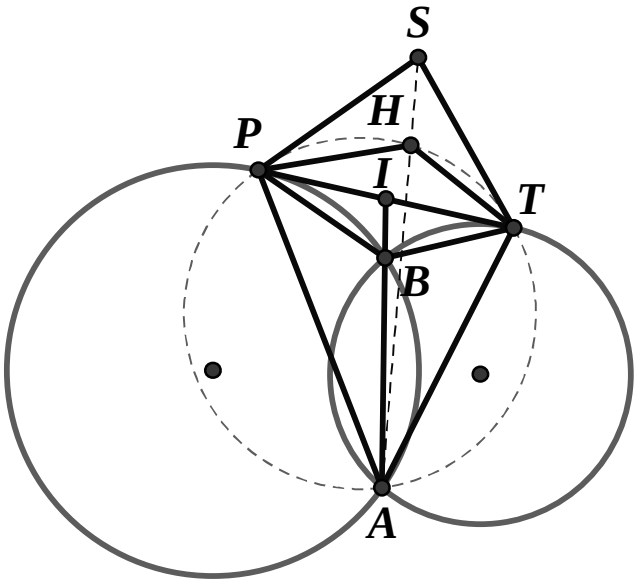
Hơn nữa, ta cũng có:

$\widehat{BAP} = \widehat{BPT} = \widehat{HPT} = \widehat{HAT}$.

Suy ra AH đối xứng với trung tuyến AI của tam giác APT qua phân giác góc $\widehat{PAT}$.

Do S là giao điểm của tiếp tuyến tại P và tại T của (APT) nên theo bổ đề trên, ta có: A, H, S thẳng hàng.

Đây chính là đpcm.



Bài 3.

Một câu lạc bộ có 42 thành viên sao cho trong 31 thành viên bất kì, luôn tồn tại ít nhất một cặp nam và nữ quen biết nhau. Chứng minh rằng có thể chọn ra được 12 cặp nam và nữ đôi một khác nhau có quen biết nhau từ câu lạc bộ.

Lời giải.

Gọi k là số lớn nhất các cặp nam-nữ quen nhau trong CLB.

- Nếu $k \geq 12$ thì ta có đpcm.
- Nếu $k \leq 11$ thì gọi $(b_i, g_i), i = 1, 2, 3, ..., k$ là k cặp nam-nữ quen biết nhau. Khi đó trong CLB còn lại $42 - 2k$ người mà ta không thể chọn thêm cặp nam-nữ nào quen biết nhau từ họ.

Trong tập hợp này, ta bỏ đi $11 - k$ người nào đó và chọn ra một tập hợp S gồm $31 - k$ người còn lại. Ta thêm k nam đã chọn ra trong bộ k đôi quen biết nhau lúc nãy vào tập S gồm $31 - k$ người này để được tập gồm 31 người.

Theo giả thiết thì trong tập 31 người xây dựng theo cách đó, tồn tại một nam trong k người thêm vào, giả sử là b_1 quen với một nữ trong S.

Khi đó, rõ ràng g_1 không được quen người nào trong S vì nếu không thì ta đổi cách ghép 4 người này lại thì k sẽ tăng lên 1, mâu thuẫn với cách chọn k lớn nhất.

Tiếp tục quá trình này thì cả k nam thêm vào đều có quen với một nữ trong S và cả k nữ đều không quen với nam nào trong S.

Khi đó, ta thêm k nữ vào S thì được 31 người mà không có cặp nam nữ nào quen nhau, mâu thuẫn. Ta có đpcm.

Bài 4.

Xét các số thực dương thỏa mãn điều kiện $21ab+2bc+8ca\le 12$**.**

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P(a,b,c)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$**.**

Lời giải.

Đặt $x=\frac{1}{a},\ y=\frac{2}{b},\ z=\frac{3}{c}$, điều kiện đã cho trở thành

$$2xyz\ge 2x+4y+7z.$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $x+y+z.$

Điều kiện (*) có thể viết lại là $z(2xy-7)\ge 2x+4y$, suy ra $2xy>7, z\ge\frac{2x+4y}{2xy-7}.$

Biến đổi biểu thức và dùng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$x+y+z\ge x+y+\frac{2x+4y}{2xy-7}=x+\frac{11}{2x}+\left(y-\frac{7}{2x}\right)+\frac{2x+\frac{14}{x}}{2xy-7}\ge x+\frac{11}{2x}+2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}.$$

Đến đây, ta sẽ chứng minh rằng $2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}\ge\frac{3+\frac{7}{x}}{2}$ hay $x+y+z\ge\frac{3}{2}+x+\frac{9}{x}\ge\frac{15}{2}.$

Đẳng thức xảy ra khi $x=3,\ y=\frac{5}{2},\ z=2.$

Vậy giá trị nhỏ nhất là $\frac{15}{2},$ đạt được khi $a=\frac{1}{3},\ b=\frac{4}{5}$ và $c=\frac{3}{2}.$

Bài 5.

Cho số nguyên dương n lớn hơn 1. Trong không gian vuông góc $Oxyz$, gọi T là tập hợp tất cả các điểm có tọa độ là (x, y, z) với x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn $1 \le x, y, z \le n$.

Tô màu tất cả các điểm thuộc tập hợp T sao cho: nếu điểm $A(x_0, y_0, z_0)$ được tô màu thì những điểm có dạng $B(x_1, y_1, z_1)$ với $x_1 \le x_0, y_1 \le y_0, z_1 \le z_0$ sẽ không được tô màu.

Tìm giá trị lớn nhất các điểm được tô màu thỏa mãn điều kiện trên.

Lời giải.

Nếu hai bộ (x, y, z) và (x', y', z') thỏa mãn $x \le x', y \le y', z \le z'$ thì ta nói bộ (x', y', z') trội hơn bộ (x, y, z), ta quy ước gọi hai bộ đó là hai bộ trội. Ta có thể phát biểu bài toán dưới dạng tương đương là:

Tìm số lớn nhất $S(n)$ tất cả các bộ (x, y, z) thỏa mãn $0 \le x, y, z \le n-1$ sao cho trong đó, không tồn tại hai bộ trội. (thay $1 \to 0, n \to n-1$).

Rõ ràng với hai bộ trội bất kì thì tổng của chúng là phân biệt vì nếu có hai bộ trội như trên và tổng bằng nhau thì $x + y + z \le x' + y' + z'$ và đẳng thức xảy ra khi $x = x', y = y', z = z'$, vô lí.

Tổng lớn nhất có thể có của các bộ này là $3(n-1)$ và tổng nhỏ nhất là 0. Ta sẽ chứng minh các mệnh đề sau với hai trường hợp n chẵn và lẻ.

(1) Số các bộ (x, y, z) thỏa mãn $x + y + z = \left\lceil \frac{3(n-1)}{2} \right\rceil$ và $0 \le x, y, z \le n-1$ là $\left\lfloor \frac{3n^2+1}{4} \right\rfloor$.

(2) Với mọi cách chọn $\left\lfloor \frac{3n^2+1}{4} \right\rfloor + 1$ đều tồn tại hai bộ mà bộ này là bộ trội của bộ kia.

Ta xét hai trường hợp:

*Nếu $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ thì ta sẽ đếm số bộ thỏa $x + y + z = \left\lceil \frac{3(2k-1)}{2} \right\rceil = 3k - 1$ và $1 \le x, y, z \le 2k - 1$.

+ Nếu $x = 0$ thì $y + z = 3k - 1$ và $k \le y \le 2k - 1$: có k nghiệm thỏa.

+ Nếu $x = k$ thì $y + z = 2k - 1$ và $0 \le y \le 2k - 1$: có $2k$ nghiệm thỏa.

+ Nếu $x = i, 1 \le i \le k - 1$ thì $y + z = 3k - i$ và $k - i \le y \le 2k - 1$: có $k + i$ nghiệm thỏa.

Do đó, số nghiệm tổng cộng là $k + 2k + 2\left(\sum_{i=k+1}^{2k-1} i\right) = 3k + \frac{2k(2k-1) - k(k+1)}{2} = 3k^2$.

Rõ ràng $\left\lfloor \frac{3(2k)^2+1}{4} \right\rfloor = 3k^2$. Mệnh đề (1) được chứng minh.

Gọi A là tập hợp tất cả các bộ ba (x, y, z) với $0 \le x, y, z \le n-1$ hay

$$A = \{(x, y, z) \mid 0 \le x, y, z \le n-1\}$$

Giả sử $B \subset A$ là một tập con có đúng $3k^2$ phần tử. Ta cần chứng minh rằng trong B, tồn tại ít nhất hai bộ mà bộ này là bộ trội của bộ kia.

Ta sẽ chứng minh mệnh đề (2) bằng cách xây dựng các tập con sau đây của tập tất cả các bộ ba:

$$\begin{aligned}
&C_1 = \{(x, y, z) \in A \mid x = 0 \vee y = 2k-1\} \\
&C_2 = \{(x, y, z) \in A \mid (x = 1 \wedge y \le 2k-2) \vee (x \ge 1 \wedge y = 2k-2)\} \\
&C_2 = \{(x, y, z) \in A \mid (x = 2 \wedge y \le 2k-3) \vee (x \ge 2 \wedge y = 2k-3)\} \\
&\ldots \\
&C_k = \{(x, y, z) \in A \mid (x = k-1 \wedge y \le k) \vee (x \ge k-1 \wedge y = k)\}
\end{aligned}$$

Đặt $C = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ và $D = A \setminus C = \{(x, y, z) \in A \mid x \ge k \wedge y \le k-1\}$.

Xét các tập hợp $C_{i,j} = \{(x, y, z) \in C_i \mid z = j\}$ trong đó $1 \le i \le k, 0 \le j \le 2k-1$. Rõ ràng có tất cả $2k^2$ tập hợp như thế và chúng là các phân hoạch của C.

Xét các tập hợp $D_{p,q} = \{(x, y, z) \in D \mid x = p \wedge y = q\}$ trong đó $k \le p \le 2k-1, 0 \le q \le k-1$. Rõ ràng có tất cả k^2 tập hợp như thế là chúng là các phân hoạch của D.

Ta có hai trường hợp sau:

- Nếu $|B \cap C| \ge 2k^2$ phần tử thì theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai bộ thuộc cùng một tập $C_{i,j}$.

Giả sử hai phần tử $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ cùng thuộc tập $C_{i,j} = \{(x, y, z) \in C_i \mid z = j\}$. Rõ ràng, ta thấy rằng $z_1 = z_2 = j$ và có ba trường hợp như sau:

+ Nếu $x_1 = x_2 = i-1$ thì $y_1, y_2 \le i$ nên trong hai bộ trên, phải tồn tại một bộ là bộ trội của bộ kia.

+ Nếu $x_1 = x_2 = i$ thì $y_1, y_2 \le i-1$ nên trong hai bộ trên, phải tồn tại một bộ là bộ trội của bộ kia.

+ Nếu $x_1 = i, x_2 \le i-1$ thì $y_1 \le i-1, y_2 = i$ nên dễ thấy rằng bộ (x_1, y_1, z_1) trội hơn bộ (x_2, y_2, z_2).

- Nếu $|B \cap C| < 2k^2$ thì $|B \cap D| > k^2$ thì do D chỉ có k^2 phần tử nên tồn tại hai bộ thuộc D, lập luận tương tự trên, ta thấy rằng B chứa hai bộ mà bộ này là bộ trội của bộ kia.

Như thế, hai mệnh đề đã được chứng minh trong trường hợp n chẵn.

* Nếu $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ thì ta sẽ đếm số bộ thỏa $x+y+z = \left\lceil \frac{3(2k)}{2} \right\rceil = 3k$ và $1 \le x, y, z \le 2k$.

+ Nếu $x = 0$ thì $y+z = 3k$ và $k+1 \le y \le 2k$: có k nghiệm thỏa.

+ Nếu $x = k$ thì $y+z = 2k$ và $0 \le y \le 2k$: có $2k+1$ nghiệm thỏa.

+ Nếu $x = i, 1 \le i \le k-1$ thì $y+z = 3k-i$ và $k-i \le y \le 2k-1$: có $k+i-1$ nghiệm thỏa.

+ Nếu $x = 1$ thì $y+z = 3k$ và $k \le y \le 2k$: có $k+1$ nghiệm thỏa.

Do đó, số nghiệm tổng cộng là

$$k + (2k+1) + 2\left(\sum_{i=k+1}^{2k} i\right) = 3k + 1 + \frac{2k(2k+1) - k(k+1)}{2} = 3k^2 + 4k + 1.$$

Rõ ràng $\left\lfloor \frac{3(2k+1)^2 + 1}{4} \right\rfloor = 3k^2 + 3k + 1$.

Dễ thấy rằng bất kì hai bộ (x, y, z) nào thỏa mãn điều kiện trên thì đều không là bộ trội của nhau được. Gọi A là tập hợp tất cả các bộ ba (x, y, z) với $0 \le x, y, z \le n-1$ hay

$$A = \{(x, y, z) \mid 0 \le x, y, z \le n-1\}$$

Giả sử $B \subset A$ là một tập con có đúng $3k^2 + 4k + 1$ phần tử. Ta cần chứng minh rằng trong B, tồn tại ít nhất hai bộ mà bộ này là bộ trội của bộ kia.

Ta sẽ chứng minh mệnh đề (2) bằng cách xây dựng các tập con sau đây của tập tất cả các bộ ba:

$$C_1 = \{(x, y, z) \in A \mid x = 0\}$$
$$C_2 = \{(x, y, z) \in A \mid (x = 1 \wedge y \le 2k) \vee (x \ge 1 \wedge y = 2k-1)\}$$
$$C_2 = \{(x, y, z) \in A \mid (x = 2 \wedge y \le 2k-1) \vee (x \ge 2 \wedge y = 2k-1)\}$$
$$\ldots$$
$$C_k = \{(x, y, z) \in A \mid (x = k \wedge y \le k+1) \vee (x \ge k \wedge y = k+1)\}$$

Đặt $C=\bigcup_{i=1}^{k} C_i$ và $D=A\setminus C=\{(x,y,z)\in A \mid x\ge k+1 \wedge y\le k\}$.

Xét các tập hợp $C_{i,j}=\{(x,y,z)\in C_i \mid z=j\}$ trong đó $1\le i\le k, 0\le j\le 2k$. Rõ ràng có tất cả $k(2k+1)$ tập hợp như thế và chúng là các phân hoạch của C.

Xét các tập hợp $D_{p,q}=\{(x,y,z)\in D \mid x=p \wedge y=q\}$ trong đó $k\le p\le 2k, 0\le q\le k$. Rõ ràng có tất cả $(k+1)^2$ tập hợp như thế là chúng là các phân hoạch của D.

Ta có hai trường hợp sau:

- Nếu $|B\cap C|\ge 2k^2$ phần tử thì theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai bộ thuộc cùng một tập $C_{i,j}$.

Giả sử hai phần tử $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$ cùng thuộc tập $C_{i,j}=\{(x,y,z)\in C_i \mid z=j\}$. Rõ ràng, ta thấy rằng $z_1=z_2=j$ và có ba trường hợp như sau:

+ Nếu $x_1=x_2=i-1$ thì $y_1,y_2\le i$ nên trong hai bộ trên, phải tồn tại một bộ là bộ trội của bộ kia.

+ Nếu $x_1=x_2=i$ thì $y_1,y_2\le i-1$ nên trong hai bộ trên, phải tồn tại một bộ là bộ trội của bộ kia.

+ Nếu $x_1=i, x_2\le i-1$ thì $y_1\le i-1, y_2=i$ nên dễ thấy rằng bộ (x_1,y_1,z_1) trội hơn bộ (x_2,y_2,z_2).

- Nếu $|B\cap C|<2k^2$ thì $|B\cap D|>k^2$ thì do D chỉ có k^2 phần tử nên tồn tại hai bộ thuộc D, lập luận tương tự trên, ta thấy rằng B chứa hai bộ mà bộ này là bộ trội của bộ kia.

Như thế, hai mệnh đề đã được chứng minh trong trường hợp n lẻ.

Tóm lại, trong mọi trường hợp, hai mệnh đề ban đầu là đúng.

Từ đó suy ra ta chỉ cần tô màu tất cả các điểm nằm trên mặt phẳng $x+y+z=\left\lceil \frac{3(n-1)}{2} \right\rceil$ thì số điểm tô được sẽ lớn nhất và là $\left\lfloor \frac{3n^2+1}{4} \right\rfloor$.

Bài 6.

Cho dãy $\{a_n\}, n \in \mathbb{N}$ ***thỏa mãn điều kiện*** $0 < a_{n+1} - a_n \le 2001$ ***với mọi n nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại vô số cặp số nguyên dương*** (p,q) ***thỏa mãn*** $p < q$ ***và*** a_p ***là một ước nguyên dương của*** a_q**.**

Lời giải.

Từ cách xác định dãy, ta thấy rằng số hạng tiếp theo sẽ không lớn hơn số hạng liền trước nó cộng thêm 2001 đơn vị. Như thế, chỉ cần xét 2002 số nguyên dương liên tiếp thì sẽ có ít nhất một số hạng thuộc dãy, đặt số đó là a.

Ta xây dựng bảng như sau:

$a_{(1,1)} = a$	$a_{(1,2)} = a+1$	$\cdots$	$a_{(1,2002)} = a+2001$
$a_{(2,1)} = \prod_{i=1}^{2002} a_{(1,i)} + a_{(1,1)}$	$a_{(2,2)} = \prod_{i=1}^{2002} a_{(1,i)} + a_{(1,2)}$	$\cdots$	$a_{(2,2001)} = \prod_{i=1}^{2002} a_{(1,i)} + a_{(1,2001)}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$a_{(2002,1)} = \prod_{i=1}^{2001} a_{(2001,i)} + a_{(2001,1)}$	$a_{(2002,1)} = \prod_{i=1}^{2002} a_{(2001,i)} + a_{(2001,1)}$	$\cdots$	$a_{(2002,2002)} = \prod_{i=1}^{2002} a_{(2001,i)} + a_{(2001,2002)}$
$a_{(2003,1)} = \prod_{i=1}^{2001} a_{(2002,i)} + a_{(2002,1)}$	$a_{(2002,1)} = \prod_{i=1}^{2001} a_{(2002,i)} + + a_{(2002,2)}$	$\cdots$	$a_{(2003,1)} = \prod_{i=1}^{2001} a_{(2002,i)} + a_{(2002,2002)}$

Bảng này có tất cả 2002 cột và 2003 hàng; trong đó, mỗi số hạng ở hàng thứ 2 trở đi bằng tích của tất cả số hạng ở hàng liền trước nó cộng với số hạng cùng cột với nó. Rõ ràng, trong mỗi hàng, có ít nhất một số hạng thuộc dãy đã cho.

Từ đó theo nguyên lí Dirichlet, ta suy ra rằng, có hai số hạng thuộc dãy đã cho nằm trên cùng một cột và rõ ràng bằng cách xây dựng bảng như trên thì trong hai số đó, số lớn hơn sẽ chia hết cho số còn lại.

Do có vô số cách chọn giá trị a nên cũng có vô số số hạng của dãy mà số hạng này chia hết cho số hạng kia, ta có đpcm.