SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TIỀN GIANG	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 THPT – NĂM HỌC: 2011-2012

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: Toán

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất: 25/10/2011

Bài 1 (4,0 điểm).

Chứng minh rằng hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 4x + 6$ luôn luôn có ba cực trị, đồng thời gốc toạ độ O là trọng tâm của tam giác tạo bởi ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đó.

Bài 2 (6,0 điểm).

1. Cho tam giác ABC không có góc tù thoả mãn hệ thức:

$$\frac{1}{3}(\cos 3A + \cos 3B) - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos A + \cos B = \frac{5}{6}$$

Hãy tính các góc của tam giác đó.

2. Giải phương trình: $2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$

Bài 3 (6,0 điểm).

1. Giải phương trình : $x = \sqrt{3-x}.\sqrt{4-x} + \sqrt{4-x}.\sqrt{5-x} + \sqrt{5-x}.\sqrt{3-x}$

2. Tìm đa thức P(x) xác định với mọi x thoả điều kiện:

$$2P(x) + P(1 - x) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Bài 4 (4,0 điểm).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N. Gọi V_1, V thứ tự là thể tích của khối chóp S.AMKN và khối chóp S.ABCD. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

--------------------------------HẾT--------------------------------

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị không giải thích gì thêm.*

KÌ THI CHỌN HSG LỚP 12 THPT
CẤP TỈNH
Khóa ngày 25 tháng 10 năm 2011

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Môn: **TOÁN (Vòng 1)**

Bài	Nội dung	Điểm
Câu 1 (4,0đ)	Tập xác định: D = **R** Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 12x + 4$ $y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ (1) Ta có: g(x) liên tục, g(-2) = -1, g(-1) = 3, g(1) = -1, g(2) = 3 Nên: $\begin{cases} g(-2).g(-1)<0 \\ g(-1).g(1)<0 \\ g(1).g(2)<0 \end{cases}$	0,5
	Suy ra: phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn : $-2 < x_1 < -1 < x_2 < 1 < x_3 < 2$	1,0
	* Ta có $f(x) = \frac{1}{4}f'(x).x - 3.(x^2 - x - 2)$ (1) Gọi các điểm cực trị là A (x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3) và G $(x_0; y_0)$ là trọng tâm tam giác ABC. Theo định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 & (2) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3 & (3) \end{cases}$	0,5
	Từ (2) suy ra $x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 0$	0,5
	Từ (1) (2) (3) suy ra: $y_0 = \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3) = -3\ [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1+x_2+x_3) - 6]$	0,5
	$= -3\ [(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2\ (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 6]$ $= -3\ (0 - 2\ (-3) - 6) = 0$ Vậy G (0; 0) nên G trùng với gốc toạ độ 0.	1,0
Câu 2 (6,0đ)	**1) (3,0 điểm)** Ta có: $\frac{1}{3}(\cos 3A + \cos 3B) - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos A + \cos B = \frac{5}{6}$ (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{3}\ (4\cos^3 A - 3\cos A + 4\cos^3 B - 3\cos B) - \frac{1}{2}(2\cos^2 A - 1 + 2\cos^2 B - 1) + \cos A + \cos B = \frac{5}{6}$ $\Leftrightarrow (\frac{4}{3}\cos^3 A - \cos^2 A) + (\frac{4}{3}\cos^3 B - \cos^2 B) = -\frac{1}{6}$ (2)	0,5

Xét hàm số $f(t) = \frac{4}{3}t^3 - t^2$ với $t \in [0;1]$

Ta có : $f'(t) = 4t^2 - 2t$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = \frac{1}{2}$. **0,5**

Ta có bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$-1/12$	$\nearrow$	

Vậy:

- Với $\forall t \in [0;1]$ thì $f(t) \geq f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{12}$ **0,5**

- Vì ΔABC không có góc tù nên: $0 \leq \cos A, \cos B < 1$

-Ta có: $\frac{4}{3}\cos^3 A - \cos^2 A \geq -\frac{1}{12}$ và $\frac{4}{3}\cos^3 B - \cos^2 B \geq -\frac{1}{12}$

Suy ra: $(\frac{4}{3}\cos^3 A - \cos^2 A) + (\frac{4}{3}\cos^3 B - \cos^2 B) \geq -\frac{1}{6}$ **0,5**

- Do đó (2) được thoả mãn $\Leftrightarrow$ (3) xảy ra dấu " = "

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{1}{2} \\ \cos B = \frac{1}{2} \end{cases}$$ **0,5**

- Vậy: $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^0$

2) **(3,0 điểm)** **0,5**

Điều kiện: $x \neq 0$

Nhận xét: $\frac{1-2x}{x^2} - \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{x^2-2x}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{x})$ **0,5**

Viết phương trình ra dạng: $2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x^2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1-2x}{x^2} - \frac{1-x^2}{x^2}\right]$ **0,5**

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} + \frac{1}{2}.\frac{1-x^2}{x^2} = 2^{\frac{1-2x}{x^2}} + \frac{1}{2}.\frac{1-2x}{x^2}$$ **0,5**

Xét hàm số: $f(t) = 2^t + \frac{1}{2}t$

Nhận xét: $f(t)$ là hàm số đồng biến. **0,5**

Viết phương trình đã cho ra dạng: $f(\frac{1-x^2}{x^2}) = f(\frac{1-2x}{x^2})$

	$\Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{x^2}=\dfrac{1-2x}{x^2} \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$ Vậy: phương trình có nghiệm $x=2$	0,5 0,5
Câu 3 **(6,0đ)**	**1) (3,0 điểm)** ĐK : $x \le 3$ Đặt $a=\sqrt{3-x};\ b=\sqrt{4-x};\ c=\sqrt{5-x}$ Ta có: $x=3-a^2=4-b^2=5-c^2=ab+bc+ca$ Do đó $\begin{cases} 3-a^2=ab+bc+ca \\ 4-b^2=ab+bc+ca \\ 5-c^2=ab+bc+ca \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(c+a)=3 \\ (b+c)(a+b)=4 \\ (c+a)(b+c)=5 \end{cases}$ Nhân vế với vế các phương trình trên ta được : $(a+b)(b+c)(c+a)=2\sqrt{15}\ \ (*)$ Thay lần lượt các phương trình của hệ vào $(*)$ ta được: $\begin{cases} a+b=\dfrac{2\sqrt{15}}{5} \\ b+c=\dfrac{2\sqrt{15}}{3} \\ c+a=\dfrac{2\sqrt{15}}{4} \end{cases}$ Cộng các vế phương trình của hệ, ta được: $a+b+c=\dfrac{47\sqrt{15}}{60}$ Suy ra: $a=\dfrac{7\sqrt{15}}{60}$ nên $x=2-a^2=\dfrac{671}{240}$ Ta được nghiệm của phương trình đã cho là: $x=\dfrac{671}{240}$ **2) (3,0 điểm)** Ta nhận thấy vế trái của biểu thức của ẩn là bậc nhất : x, 1-x, còn vế phải là bậc hai x^2. Vậy P(x) phải có dạng ax^2+bx+c. Khi đó ta có: $2(ax^2+bx+c)+a(1-x)^2+b(1-x)+c=x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$ Do đó : $3ax^2+(b-2a)x+a+b+3c=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$ Đồng nhất các hệ số ta được : $\begin{cases} 3a=1 \\ b-2a=0 \\ a+b+3c=0 \end{cases}$	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5

	Giải hệ trên ta được : $a = \frac{1}{3}; b = \frac{2}{3}; c = -\frac{1}{3}$ Vậy : $P(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ -Thử lại ta thấy P(x) thoả điều kiện bài toán. -Ta chứng minh mọi hàm số khác P(x) thì không thoả điều kiện bài toán. Thật vậy : Giả sử có Q(x) khác P(x) thoả điều kiện bài toán. Vì P(x) khác Q(x) nên có $x_0 \in \mathbb{R}$: $Q(x_0) \neq P(x_0)$ Ta có : $2Q(x) + Q(1 - x) = x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$ Thay x bởi x_0 ta được: $2Q(x_0) + Q(1 - x_0) = x_0^2$ (1) Thay x bởi $1 - x_0$ ta được : $2Q(1-x_0) + Q(x_0) = (1 - x_0)^2$ (2) Từ (1) và (2) suy ra : $Q(x_0) = \frac{1}{3}x_0^2 + \frac{2}{3}x_0 - \frac{1}{3} = P(x_0)$ Điều này trái với giả thiết $Q(x_0) \neq P(x_0)$ -Vậy có duy nhất một đa thức $P(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$	**0,5** **0,5** **0,5**
Câu 4 **(4,0đ)**	Vì ABCD là hình bình hành $\Rightarrow V_{S.ABC} = V_{S.ADC} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{1}{2}V$ Đặt $\frac{SM}{SB} = x, \ \frac{SN}{SD} = y$ thì $\frac{V_{SAMK}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SK}{SC} \Rightarrow V_{SAMK} = \frac{x.V}{4}$ Suy ra: $V_1 = V_{S.AMK} + V_{S.ANK} = \frac{V}{4}(x + y)$ (1) Mặt khác $V_1 = V_{S.AMN} + V_{S.MNK} = x.y.\frac{V}{2} + x.y.\frac{V}{4} = \frac{3xy.V}{4}$ (2) Từ (1) và (2) ta có: $x + y = 3xy \Rightarrow y = \frac{x}{3x - 1}$ (3) Do $x > 0$ và $y > 0$ nên từ (3) => $x > \frac{1}{3}$ Và $y = \frac{SN}{SD} \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{3x - 1} \leq 1 \Leftrightarrow 2x^3 - 1 \geq 0$ (vì 3x-1> 0) => $x \geq \frac{1}{2}$ Do đó: $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ Từ (1) => $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{4}(x + y) = \frac{3}{4}xy = \frac{3}{4}x.\frac{x}{3x - 1} = \frac{3x^2}{4(3x - 1)}$ Xét hàm số $f(x) = \frac{3x^2}{4(3x - 1)}$ với $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.	 **0,5** **0,5** **0,5** **0,5** **0,5**

Ta có $f'(x) = \dfrac{3x(3x-2)}{4(3x-1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \; x = 0$ (loại) hoặc $x = \dfrac{2}{3}$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	3/8	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	3/8

0,5

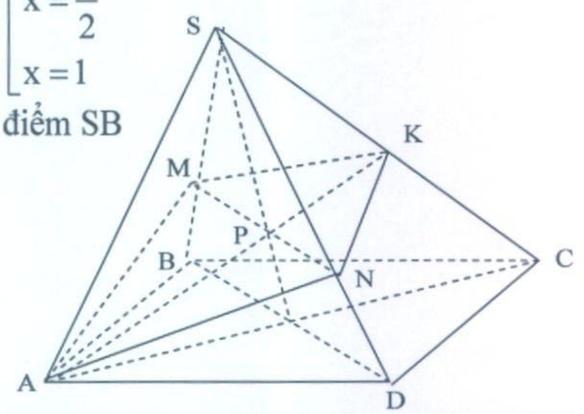
Suy ra $\dfrac{1}{3} \le f(x) \le \dfrac{3}{8}$ với $\forall x \in [\dfrac{1}{2};1]$ hay $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{V_1}{V} \le \dfrac{3}{8}$

Vậy:

- Min $(\dfrac{V_1}{V}) = \dfrac{1}{3}$ khi $x = \dfrac{2}{3}$ hay $SM = \dfrac{2}{3}$ SB — 0,5

- Max $(\dfrac{V_1}{V}) = \dfrac{3}{8}$ khi $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 1 \end{array}\right.$ — 0,5

Khi đó: với M là trung điểm SB hoặc M trùng với B.



Lưu ý:

1) Mọi cách giải khác nếu đúng học sinh được hưởng trọn số điểm của câu.

2) Giám khảo không làm tròn điểm số toàn bài.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
TIỀN GIANG	LỚP 12 THPT – NĂM HỌC: 2011-2012

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: Toán

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai: 26/10/2011

Bài 1 (4,0 điểm).

Tìm tổng các nghiệm thuộc đoạn [2; 40] của phương trình:

$$2\cos^2 x + \cot g^2 x = \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x}$$

Bài 2 (6,0 điểm).

1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \left(1+4^{2x-y}\right)5^{1-2x+y} = 1+2^{2x-y+1} \\ y^3+4x+1+\ln(y^2+2x)=0 \end{cases}$

2. Giải phương trình: $3x^2 + 1 + \log_{2011}\dfrac{4x^2+2}{x^6+x^2+1} = x^6$

Bài 3 (6,0 điểm).

1. a. Chứng minh rằng: $\sin 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x)=\left(32x^5-40x^3+10x-1\right)^{2012}+\left(16x^3-12x+\sqrt{5}-1\right)^{2010}$$

2. Cho dãy (u_n) được xác định bởi: $u_0>0,\ u_{n+1}=\dfrac{2+\sqrt{2u_n^2+4u_n+4}}{u_n}$

với mọi n = 1, 2, 3, ...Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 4 (4,0 điểm).

Cho hai đường tròn (O) và (O’) cắt nhau tại hai điểm A và B. Trên tia đối Ax của tia AB ta lấy điểm M. Từ M kẻ tới đường tròn (O’) hai tiếp tuyến MC và MD (C, D là các tiếp điểm và D nằm trong (O)). Đường thẳng AC cắt (O) tại điểm P và AD cắt (O) tại điểm Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định.

--------------------------------HẾT--------------------------------

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị không giải thích gì thêm.*

KÌ THI CHỌN HSG LỚP 12 THPT
CẤP TỈNH
Khóa ngày 25 tháng 10 năm 2011

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Môn: **TOÁN (vòng 2)**

Bài	Nội dung	Điểm
Câu 1 **(4,0đ)**	Với điều kiện $\sin x \neq 0$, phương trình đã cho tương đương với: $2\cos^2 x + \cot g^2 x = \sin x + 1 + \cot g^2 x$ $\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi + 4k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right.$	0,5
	- Ta có: phương trình nhận nghiệm trong đoạn [2; 40] nên: $2 \leq \dfrac{3\pi + 4k\pi}{2} \leq 40$ khi đó k nhận các giá trị 0, 1, 2, 3, 4, 5.	0,5
	Vậy tổng các nghiệm là : $\dfrac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{5}(4k+3) = 39\pi$	0,5
	-Tương tự: $*2 \leq \dfrac{\pi + 12k\pi}{6} \leq 40$ khi đó k nhận các giá trị 1, 2, 3, 4, 5, 6.	0,5
	Vậy tổng các nghiệm của họ x là : $\sum_{k=1}^{6}(\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi) = 43\pi$	0,5
	$*2 \leq \dfrac{5\pi + 12k\pi}{6} \leq 40$ khi đó k nhận các giá trị 0, 1, 2, 3, 4, 5.	0,5
	Vậy tổng các nghiệm của họ x là: $\sum_{k=0}^{5}(\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi) = 35\pi$	
	Do đó: tổng các nghiệm là: $39\pi + 43\pi + 35\pi = 117\pi$	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 2 **(6,0đ)**	**1) (3,0 điểm)** Gọi hệ (I): $\begin{cases}\left(1+4^{2x-y}\right)5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1} & (1)\\ y^3+4x+1+\ln(y^2+2x)=0 & (2)\end{cases}$ Đặt $t=2x-y$ Ta có: (1) $\Leftrightarrow \left(1+4^t\right)5^{1-t}=1+2^{1+t}$ $\Leftrightarrow 5\left[\left(\frac{1}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t\right]=1+2.2^t \quad (3)$ Đặt $f(t)=5\left[\left(\frac{1}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t\right]$; $g(t) = 1+2.\ 2^t$	0,5
	Ta có: f(t) là hàm số giảm, g(t) là hàm số tăng và f(1) = g (1) Do đó: (3) $\Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow 2x-y=1$	1,0
	Vậy hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases}2x=y+1\\ y^3+2y+3+\ln(y^2+y+1)=0\end{cases}$	0,5
	Đặt $h(y) = y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2+ y +1)$ Ta có: $h'(y) = 3y^2 + 2 + \frac{2y+1}{y^2+y+1}$ $= 3y^2+\frac{2y^2+4y+3}{y^2+y+1}$ $= 3y^2+\frac{2(y+1)^2+1}{y^2+y+1}>0$ $h'(y) > 0 \Rightarrow h(y)$ là hàm số tăng và $h(-1) = 0$	0,5
	Vậy (I) $\Leftrightarrow \begin{cases}2x=y+1\\ y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}$	0,5
	2) (3,0 điểm) PT đã cho viết thành: $\log_{2011}\frac{4x^2+2}{x^6+x^2+1}=x^6-3x^2-1 \quad (1)$ Đặt: $\begin{cases}u=4x^2+2\\ v=x^6+x^2+1\end{cases}$ (Điều kiện: $u \geq 2$, $v \geq 1$) Với điều kiện trên ta có: (1) $\Leftrightarrow \log_{2011}\frac{u}{v}=v-u$ $\Leftrightarrow \log_{2011}u-\log_{2011}v=v-u \ (*)$	0,5
	- Nếu $u > v$ thì (*) không thoả mãn (vì vế trái dương, vế phải âm).	0,25

- Nếu u < v thì (*) không thoả mãn. **0,25**

(vì vế phải dương, vế trái âm).

- Xét u = v thì thoả yêu cầu bài toán.

Do đó pt (*) $\Leftrightarrow$ $x^6 + x^2 + 1 = 4x^2 + 2 \Leftrightarrow x^6 - 3x^2 - 1 = 0$ (2) **0,5**

Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được pt: $f(t) = t^3 - 3t - 1 = 0$ (3)

Ta có $f'(x) = 3t^2 - 3$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = 1$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'(t)		+	0	-		-	0	+	
f (t)	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó (3) có nghiệm với $t \geq 0$ và là nghiệm duy nhất $t \in (0; 2)$ **0,5**

(vì: $f(2).\ f(1) = 1.(-3) = -3 < 0$)

Đặt $t = 2\cos\alpha$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, ta được $8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \frac{1}{2}$ hay $\cos 3\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\alpha = \frac{\pi}{3}$ **0,5**

(vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) nên $\alpha = \frac{\pi}{9}$

Ta có $t = x^2 = 2\cos\frac{\pi}{9}$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = \pm\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}$ **0,5**

Câu 3 (6,0đ)

1) (3,0 điểm)

a. (1,0 điểm)

Ta có: $90^0 = 5.18^0 = 3.18^0 + 2.18^0$

Nên: $\sin(3.18^0) = \cos(2.18^0)$

$\Leftrightarrow 3\sin 18^0 - 4\sin^3 18^0 = 1 - 2\sin^2 18^0$

$\Leftrightarrow 4\sin^3 18^0 - 2\sin^2 18^0 - 3\sin 18^0 + 1 = 0$ **0,5**

$\Leftrightarrow (\sin 18^0 - 1)(4\sin^2 18^0 + 2\sin 18^0 - 1) = 0$

Do đó: $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ **0,5**

b.(2,0 điểm)

Ta có: $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó: f(x) đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 — **0,5**

Khi đó dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} 32x^5 - 40x^3 + 10x - 1 = 0 \\ 16x^3 - 12x + \sqrt{5} - 1 = 0 \end{cases}$$ — **0,25**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x^5 - 20x^3 + 5x = \dfrac{1}{2} \\ 3x - 4x^3 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \end{cases}$$

Mà: $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha$ — **0,5**

$\sin 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

Vậy chọn $x = \sin\dfrac{\pi}{30}$ thì thoả hệ phương trình. — **0,5**

Vậy: Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0 khi $x = \sin\dfrac{\pi}{30}$ — **0,25**

2) (3,0 điểm)

.Từ giả thiết suy ra : dãy (u_n) là dãy dương.

. Ta có: $u_{n+1} = \dfrac{2 + \sqrt{2u_n^2 + 4u_n + 4}}{u_n} = \dfrac{2}{u_n} + \sqrt{2 + \dfrac{4}{u_n} + \dfrac{4}{u_n^2}} > \sqrt{2}$,

$\forall n = 1, 2, \ldots$

Suy ra: $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} + \sqrt{2 + \dfrac{4}{u_n} + \dfrac{4}{u_n^2}} < \dfrac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2 + \dfrac{4}{\sqrt{2}} + \dfrac{4}{2}} = M$,

$\forall n = 1, 2, \ldots$

Vậy: (u_n) dương và bị chặn. (1) — **0,5**

. Xét hàm $f(x) = \dfrac{2}{x} + \sqrt{2 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2}}$

Ta có: f(x) là hàm nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Suy ra: f(f(x)) là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$.

. Ta có: $u_{n+2} = f(u_{n+1}) = f(f(u_n)), \forall n = 1, 2, \ldots$

Vậy dãy (u_n) tăng. (2)

. Từ (1) và (2) suy ra dãy (u_n) có giới hạn. — **0,5**

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

. Gọi a và b là giới hạn của hai dãy con $\left(u_{2k}\right)$ và $\left(u_{2k+1}\right)$ với k =1, 2,... ($\sqrt{2} \le a,\ b \le M$). Ta có:

$$u_{2k+1} = \frac{2}{u_{2k}} + \sqrt{2 + \frac{4}{u_{2k}} + \frac{4}{u_{2k}^2}} \text{ và}$$

$$u_{2k+2} = \frac{2}{u_{2k+1}} + \sqrt{2 + \frac{4}{u_{2k+1}} + \frac{4}{u_{2k+1}^2}}$$

Lấy giới hạn hai biểu thức trên ta được :

$$\begin{cases} a = \dfrac{2}{b} + \sqrt{2 + \dfrac{4}{b} + \dfrac{4}{b^2}} = f(b) \\ b = \dfrac{2}{a} + \sqrt{2 + \dfrac{4}{a} + \dfrac{4}{a^2}} = f(a) \end{cases} \text{. Do đó : } a = b$$

. Vậy :

$$a = \frac{2}{a} + \sqrt{2 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}} \Leftrightarrow \frac{a^2 - 2}{a} = \frac{\sqrt{2a^2 + 4a + 4}}{a} \ (\ a > 0)$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 6a^2 - 4a = 0$$

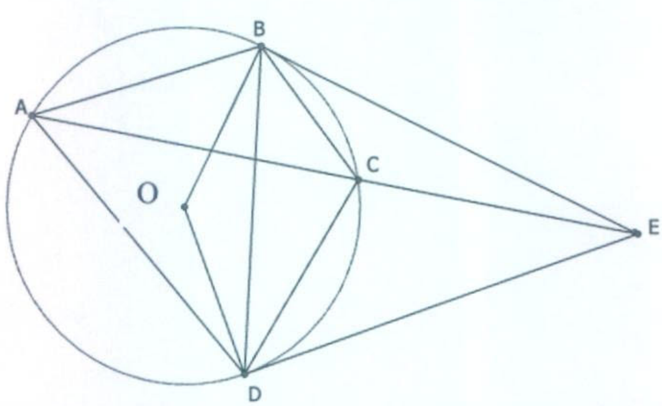
$$\Leftrightarrow (a+2)\left(a^2 - 2a - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1 + \sqrt{3} \ (\ a > 0)$$

. Vậy dãy $\left(u_n\right)$ có giới hạn bằng $1 + \sqrt{3}$

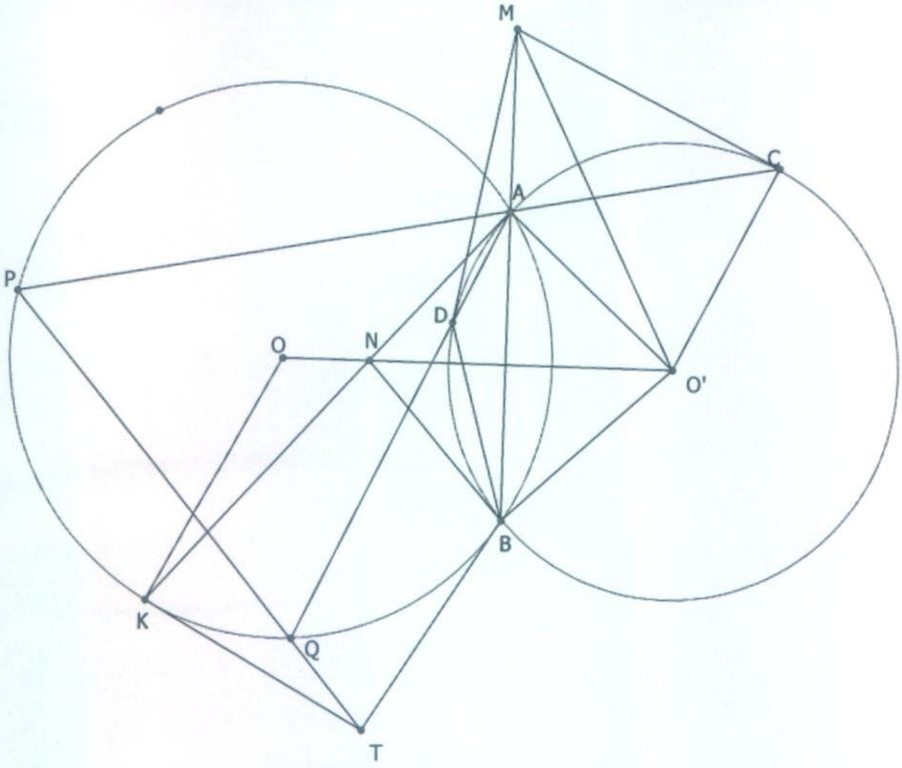
</td>
<td>0,5
0,5
0,5
0,5</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Câu 4</u>
(4,0đ)</td>
<td>

-Ta có : Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O).
Khi đó : AB.CD =AD.BC khi và chỉ khi đường chéo AC đi qua giao điểm E của hai tiếp tuyến của (O) tại B và D. (*)



- Gọi N là giao điểm của tiếp tuyến tại A và B của (O'). AN cắt (O) tại điểm thứ hai là K. Ta chứng minh PQ đi qua giao điểm T của hai tiếp tuyến của (O) tại B và K.
- Thật vậy :

</td>
<td>1,0
0,5</td>
</tr>
</table>



. Tứ giác ACBD nội tiếp (O') có đường chéo AB đi qua giao điểm hai tiếp tuyến của (O') tại C và D nên theo (*) ta được:

$$AC.\,BD = AD.\,BC$$ 0,5

. Suy ra : $\sin\widehat{ADC}.\sin\widehat{DAB} = \sin\widehat{DCA}\sin\widehat{BAC}$ 0,5

$\Leftrightarrow \sin\widehat{KAP}.\sin\widehat{BAQ} = \sin\widehat{KAQ}\sin\widehat{BAP}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin\widehat{BAP}}{\sin\widehat{KAP}} = \dfrac{\sin\widehat{BAQ}}{\sin\widehat{KAQ}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{PB}{PK} = \dfrac{QB}{QK}$

$\Leftrightarrow PB.QK = PK.QB$ 0,5

. Do đó : theo (*) PQ đi qua giao điểm T của hai tiếp tuyến của (O) tại B và K. 0,5

. Ta có : tiếp tuyến tại B cố định,

N cố định, nên K cố định. Vậy tiếp tuyến tại K cố định.

Do đó : điểm T cố định. 0,5

Lưu ý:

1) Mọi cách giải khác nếu đúng học sinh được hưởng trọn số điểm của câu.

2) Giám khảo không làm tròn điểm số toàn bài.