Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

Phiên bản:
BM.ĐH.11a.02-2013.09

TÓM TẮT

Trong chuyên đề này các bạn sẽ được tiếp cận với một phương pháp tỏ ra hiệu quả là sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.
Từ khóa: Giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN).

1 Định nghĩa

■ Số M gọi là giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số y = f(x) trên D nếu:

$$\begin{cases} \forall x \in D : f(x) \le M \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$$

Kí hiệu: $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$

■ Số m gọi là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số y = f(x) trên D nếu:

$$\begin{cases} \forall x \in D : \ f(x) \ge m \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$$

Kí hiệu: $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$

2 Phương pháp tìm GTLN, GTNN của hàm số

Dạng 1 Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn [a ; b]

TOPPER. Phương pháp

- Tìm tập xác định của hàm số (chỉ xét trên đoạn [a ; b])
- Tính đạo hàm và tìm các điểm x_i (i = 1, 2, ...n) trên (a ; b) mà tại đó $f(x_i) = 0$ hoặc không xác định.
- Tính $f(x_i)$, f(a) và f(b).
- Khi đó: $\max\limits_{[a\,;\,b]} f(x) = \text{Max}\{f(x_i), f(a), f(b)\}$, $\min\limits_{[a\,;\,b]} f(x) = \text{Min}\{f(x_i), f(a), f(b)\}$

VD1: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn [0 ; 2].

✍ **HD**

– Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ (loại vì không thuộc } [0\,;\,2]) \\ x = 1 \end{array}\right.$

– Tính: f(0) = 5; f(2) = 7; f(1) = 3

– Vì hàm số liên tục trên [0 ; 2] nên ta có: $\begin{cases} \max\limits_{[0\,;\,2]} f(x) = 7 \text{ tại } x = 2 \\ \min\limits_{[0\,;\,2]} f(x) = 3 \text{ tại } x = 1 \end{cases}$

TRUNG TÂM TỰ HỌC TOPPER
Để tham khảo thêm các tài liệu mới, truy cập:
htttp://tuhoc.edu.vn/blog

Bản quyền tài liệu thuộc về TOPPER. Mọi hình thức sao chép, trích dẫn vui lòng ghi rõ nguồn.

Phiên bản:
BM.ĐH.11a.02-2013.09

VD2: Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn [0 ; 2].

✍ **HD**

– Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn [0 ; 2].

– Ta có: $y' = \dfrac{-8}{(x-3)^2} < 0,\ \forall x \in [0\ ;\ 2]$

– Bảng biến thiên:

x	0		2
y'		–	
y	$\frac{1}{3}$	↘	–5

– Từ bảng biến thiên suy ra:

$$\begin{cases} \underset{[0\ ;\ 2]}{\text{Max}}\ f(x) = \dfrac{1}{3} \text{ tại } x = 0 \\ \underset{[0\ ;\ 2]}{\text{Min}}\ f(x) = -5 \text{ tại } x = 2 \end{cases}$$

TOPPER. Chú ý

Trong trường hợp hàm f(x) luôn tăng hoặc luôn giảm trên [a ; b] thì

– $\underset{[a\ ;\ b]}{\text{Max}}\ f(x) = \max\{f(a), f(b)\}$

– $\underset{[a\ ;\ b]}{\text{Min}}\ f(x) = \min\{f(a), f(b)\}$

TRUNG TÂM TỰ HỌC TOPPER
Để tham khảo thêm các tài liệu mới, truy cập:
htttp://tuhoc.edu.vn/blog

Bản quyền tài liệu thuộc về TOPPER. Mọi hình thức sao chép, trích dẫn vui lòng ghi rõ nguồn.

Phiên bản:
BM.ĐH.11a.02-2013.09

BÀI TẬP

1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số:

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên các đoạn $[-4 ; 4]$ và $[0 ; 5]$.

(b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ trên các đoạn $[0 ; 3]$ và $[2 ; 5]$.

(c) $f(x) = \dfrac{2-x}{1-x}$ trên các đoạn $[2 ; 4]$ và $[-3 ; -2]$.

2. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1 ; 1]$.

3. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

4. Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau:

(a) $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0 ; 2]$.

(b) $y = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0 ; 3]$.

(c) $y = \sqrt{-x^2+5x+6}$ trên đoạn $[-1 ; 6]$.

Bản quyền tài liệu thuộc về TOPPER. Mọi hình thức sao chép, trích dẫn vui lòng ghi rõ nguồn.

Phiên bản:
BM.ĐH.11a.02-2013.09

Dạng 2 Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên nửa đoạn hay khoảng

TOPPER. Phương pháp

- Tìm tập xác định của hàm số (chỉ xét trên khoảng (a ; b)).
- Tính đạo hàm và tìm các điểm $x_i \in (a ; b)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ mà $f(x_i) = 0$.
- Lập bảng biến thiên và dựa vào bảng biến thiên để kết luận về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

VD3: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 5$ trên khoảng (0 ; 2).

✍ **HD**

– Hàm số xác định và liên tục trên khoảng (0 ; 2).

– Ta có $y' = 3x^2 - 3,\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \ (\notin (0 ; 2)) \end{array}\right.$

– Bảng biến thiên:

x	0		1		2
y'		–	0	+	
y		↘	3	↗	

Từ bảng biến thiên ta suy ra: Min f(x) = 3 tại x = 1.

BÀI TẬP

5 Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = x + \dfrac{1}{x-1}$ trên khoảng (2 ; 5].

6 Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ với x > 0.

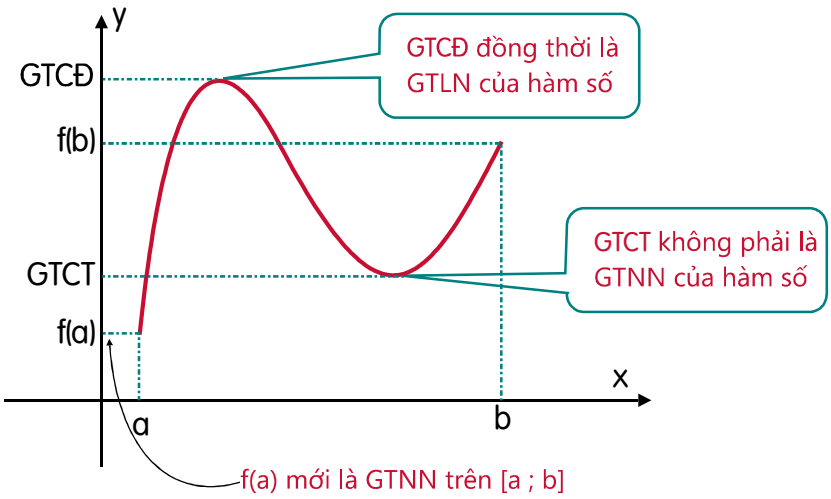
Bản quyền tài liệu thuộc về TOPPER. Mọi hình thức sao chép, trích dẫn vui lòng ghi rõ nguồn.

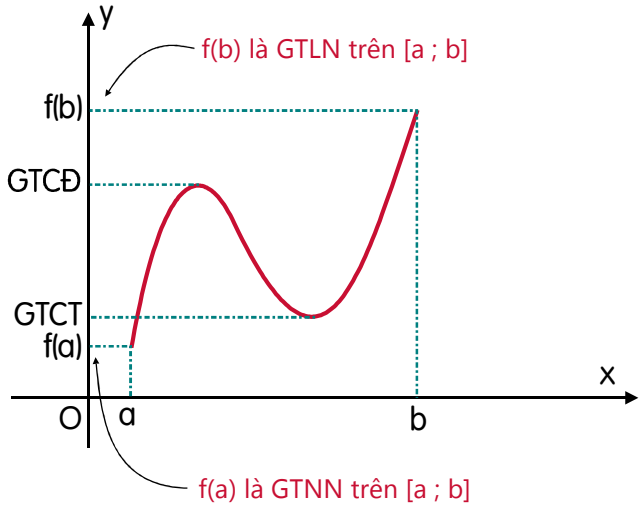
Phiên bản:
BM.ĐH.11a.02-2013.09

TOPPER. Chú ý

■ Nếu bài toán không cho khoảng hay đoạn thì phải hiểu là tìm GTLN, GTNN trên tập xác định của hàm số.

■ Giá trị cực đại, giá trị cực tiểu chưa hẳn là GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn cho trước [a ; b].





- Giải thích kí hiệu:
  – GTCĐ: giá trị cực đại
  – GTCT: giá trị cực tiểu

TRUNG TÂM TỰ HỌC TOPPER
Để tham khảo thêm các tài liệu mới, truy cập:
htttp://tuhoc.edu.vn/blog

Bản quyền tài liệu thuộc về TOPPER. Mọi hình thức sao chép, trích dẫn vui lòng ghi rõ nguồn.

Phiên bản:
BM.ĐH.11a.02-2013.09

VD4: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

✍ **HD**

– Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

– Ta có: $y' = \dfrac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

– Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	1	↗	2	↘	$\frac{2}{3}$	↗	1

– Từ bảng biến thiên suy ra: $\underset{D}{\text{Max}}\, f(x) = 2$ tại $x = -1$, $\underset{D}{\min}\, f(x) = \dfrac{2}{3}$ tại $x = 1$

VD5: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ $y = \sqrt{x^2+3x-4}$.

✍ **HD**

– Tập xác định: $D = (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$.

– Ta có: $y' = \dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-4}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2} \notin D$

– Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-4		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
y'		−						+	
y	$+\infty$	↘	0				0	↗	$+\infty$

– Từ bảng biến thiên suy ra: Hàm số không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất: $\underset{D}{\min}\, f(x) = 0$ tại $x = -4$ và $x = 1$.

Bản quyền tài liệu thuộc về TOPPER. Mọi hình thức sao chép, trích dẫn vui lòng ghi rõ nguồn.

Phiên bản:
BM.ĐH.11a.02-2013.09

VD6: Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.

✍ **HD**

– Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

– Ta có: $y = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$

– Đặt t = sin x + cos x với $|t| \le \sqrt{2}$.

Biến đổi để đưa hàm số về dạng: $y = \dfrac{3t - t^3}{2}$

– Tính đạo hàm của y theo t sau đó lập bảng biến thiên tìm được:

$\min y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\max y = 1$.

Bản quyền tài liệu thuộc về TOPPER. Mọi hình thức sao chép, trích dẫn vui lòng ghi rõ nguồn.

Phiên bản:
BM.ĐH.11a.02-2013.09

BÀI TẬP

7 Tìm GTLN, GTNN của hàm số: $y = x + \sqrt{4 - x^2}$.

8 Tìm GTLN, GTNN của hàm số:

(a) $y = \sin^2 x + \cos x - \frac{1}{2}$,

(b) $y = \sin^2 x - \cos x + 1$.

9 Tìm GTLN, GTNN của hàm số:

(a) $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$

(b) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$

(c) $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ $(x > 0)$

(d) $y = e^x + \frac{4}{e^x + 1}$.

Bản quyền tài liệu thuộc về TOPPER. Mọi hình thức sao chép, trích dẫn vui lòng ghi rõ nguồn.

Phiên bản:
BM.ĐH.11a.02-2013.09

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1

(a) Trên [–4 ; 4] : max f(x) = 40, min f(x) = –41

Trên [0 ; 5] : max f(x) = 40, min f(x) = 8

(b) Trên [0 ; 3] : max f(x) = 56, min f(x) = $-\frac{1}{4}$

Trên [2 ; 5] : max f(x) = 552, min f(x) = 6

(c) Trên [2 ; 4] : max f(x) = $\frac{2}{3}$, min f(x) = 0

Trên [–3 ; –2] : max f(x) = $\frac{4}{3}$, min f(x) = $\frac{5}{4}$

2 Max f(x) = 3, min f(x) = 1

3 Max f(x) = π, min f(x) = $-\frac{\pi}{2}$.

4

(a) Max f(x) = $\frac{1}{3}$, min f(x) = –5

(b) Max f(x) = $-3\sqrt{13}$, min f(x) = – 12

(c) Max f(x) = $\frac{7}{2}$, min f(x) = 0

5 Max f(x) = $\frac{21}{4}$.

6 Min f(x) = 3

7 Max f(x) = $2\sqrt{2}$, min f(x) = –2

8 (a) Đưa hàm số về dạng: $y = -\cos^2 x + \cos x + \frac{1}{2}$

Đặt t = cosx; $|t| \le 1$, hàm số trở thành $y = -t^2 + t + \frac{1}{2}$ (*).

Tìm GTLN, GTNN của (*) trên đoạn [–1 ; 1]

Min y = $-\frac{3}{2}$, max y = $\frac{3}{4}$.

(b) Tương tự câu (a): min y = 0, max y = $\frac{25}{8}$.

9 (a) Min y = 0, max y = 2

(b) Min y = 1, không tồn tại max y

(c) Min y = –3, không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$.

(d) Min y = 3

TRUNG TÂM TỰ HỌC TOPPER
Để tham khảo thêm các tài liệu mới, truy cập:
htttp://tuhoc.edu.vn/blog

Bản quyền tài liệu thuộc về TOPPER. Mọi hình thức sao chép, trích dẫn vui lòng ghi rõ nguồn.

Gọi 04 6657 4444 để đăng ký học thử miễn phí (ở Hà Nội)

"Một cách dạy và học đơn giản, nhưng mang lại kết quả đáng kinh ngạc."

Nguyễn Thanh Tùng

(29,5 điểm - Thủ khoa ĐH Dược Hà Nội năm 2013)

TOPPER là tổ chức giáo dục tiên phong đổi mới cách dạy và học tại Việt Nam. Lấy phương pháp tự học làm nền tảng, TOPPER đã sáng tạo ra một phương thức học hoàn toàn mới. Ở đó, học sinh thật sự là trung tâm của lớp học.

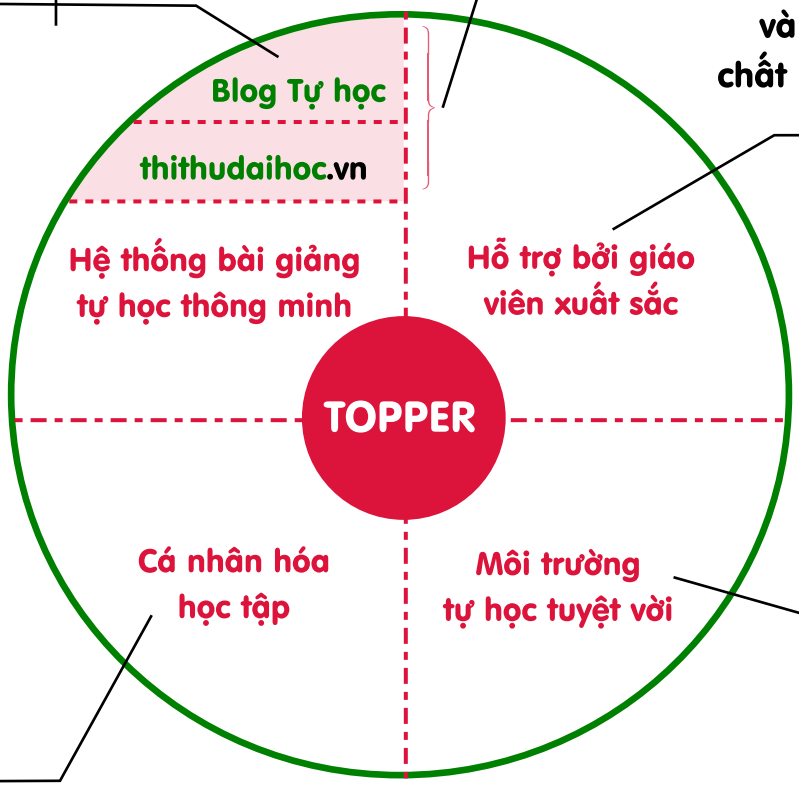
Lợi ích khi tham gia chương trình:

- ✔ Học sinh hiểu bài ngay trên lớp;
- ✔ Học sâu, nhớ lâu;
- ✔ Xóa bỏ áp lực và có niềm vui khi học tập;
- ✔ Cá nhân hóa kế hoạch học tập;
- ✔ Cải thiện điểm số; nâng cao thành tích học tập;
- ✔ Phát triển kỹ năng tự học.

Blog Tự học
(www.tuhoc.edu.vn/blog)
được cung cấp miễn phí cho học sinh và giáo viên

Kênh học và thi Online

Chương trình tuyển chọn và đào tạo giáo viên chất lượng nhất Việt Nam



Âm nhạc Baroque; Đồ uống miễn phí

Mỗi học sinh được học với cách thức và lộ trình riêng phù hợp với từng cá nhân

"Bạn đang sử dụng bài giảng tự học miễn phí. Đăng ký học có phí chính thức ở các Trung tâm Tự học TOPPER để trải nghiệm cảm giác khác biệt từ chất lượng giáo dục thực chất."