BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

CHƯƠNG TRÌNH PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC TRUNG HỌC

TÀI LIỆU TẬP HUẤN

DẠY HỌC MÔN TOÁN VÀ CÁC MÔN KHOA HỌC TỰ NHIÊN BẰNG TIẾNG ANH TRONG TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

(TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ)

MÔN TOÁN

Hà Nội 2013

Tài liệu tập huấn giảng dạy môn Toán bằng tiếng Anh

1. ***Mathematical English*** – Thuật ngữ toán học tiếng Anh

   Chu Thu Hoàn - Trường PT Chuyên ngoại ngữ , Đại học ngoại ngữ,ĐHQG Hà nội

2. ***Một số vấn đề trong việc soạn bài và giảng dạy môn Toán bằng tiếng Anh***

   Nhóm biên soạn tài liệu tập huấn môn Toán

3. ***The sine rule and the cosine rule*** – Các công thức sin và cos

   Tạ Ngọc Trí – Bộ giáo dục

   Loại bài giảng: bài giảng trung học phổ thông

4. ***Trig Derivative*** – Đạo hàm hàm lượng giác

   Tạ Ngọc Trí – Bộ giáo dục

   Loại bài giảng: bài giảng trung học phổ thông

5. ***Equation of Circle*** – Phương trình đường tròn

   Nguyễn Đắc Thắng – Trường PT Amsterdam Hà Nội

   Loại bài giảng: bài giảng trung học phổ thông

6. ***Parametric equation of a line*** – Phương trình tham số của đường thẳng (chuyển thể bài giảng tiếng Việt sang tiếng Anh)

   Nguyễn Đắc Thắng – Trường PT Amsterdam Hà Nội

   Loại bài giảng: bài giảng trung học phổ thông

7. ***Geometric Sequences*** – Dãy cấp số nhân

   Trần Thanh Tuấn – Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội

   Loại bài giảng: A-level

8. ***Application of Differentiation: Related Rates*** – Ứng dụng của phép tính vi phân: Các tốc độ biến thiên phụ thuộc nhau

   Trần Thanh Tuấn – Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội

   Loại bài giảng: A-level

9. ***Permutations and Combinations*** - Hoán vị và Tổ hợp

   Chu Thu Hoàn - Trường PT Chuyên ngoại ngữ , Đại học ngoại ngữ,ĐHQG Hà nội

   Loại bài giảng: SAT

LỜI NÓI ĐẦU

Với mục đích là trong khoảng 8 buổi tập huấn, các thầy cô sẽ soạn được bài giảng, và bước đầu có thể giảng bài được bằng tiếng Anh, nên bộ tài liệu tập huấn này sẽ trình bày những hướng dẫn hết sức cơ bản với các bài soạn mẫu có nội dung không khó để đa số các thầy cô sẽ không gặp vấn đề khó khăn gì trong nội dung, mà chỉ tập trung vào các phương pháp soạn bài giảng và cách thức giảng bài trên lớp. Để có thể giảng bài trên lớp, đầu tiên các thầy cô sẽ phải soạn giáo án bài giảng đó. Công việc này khá là tương tự với việc soạn bài giảng bằng tiếng Việt, chỉ khác là các thầy cô sẽ phải soạn bằng tiếng Anh. Vì vậy, bài viết đầu tiên trong tài liệu tập huấn là một bảng liệt kê các thuật ngữ Toán học bằng tiếng Anh khá là cơ bản và đầy đủ. Những thuật ngữ này sẽ là những từ vựng chuyên môn Toán cần thiết cho công việc giảng dạy của các thầy cô. Tiếp theo đó, ở bài viết thứ hai, nhóm biên soạn trình bày những hướng dẫn cơ bản và cần thiết để các thầy cô có thể soạn một bài giảng và các bước trình bày bài giảng đó ở trên lớp. Bài viết này sẽ cung cấp cho các thầy cô những hướng dẫn khá là chi tiết để các thầy cô có thể áp dụng và thực hành được ngay. Phần còn lại của tài liệu gồm bẩy bài soạn mẫu, trong đó bốn bài được soạn theo cách chuyển thể từ bài soạn tiếng Việt sang tiếng Anh, hai bài được soạn theo giáo trình giảng dạy A-level, và một bài được soạn theo giáo trình giảng dạy SAT. Bẩy bài soạn mẫu này sẽ cung cấp cho các thầy cô những ví dụ để các thầy cô bước đầu có thể thực hành soạn những bài giảng của mình.

Nhóm biên soạn hy vọng những tài liệu này sẽ giúp ích được các thầy cô một phần trong việc giảng dạy Toán bằng tiếng Anh. Tài liệu được biên soạn trong một thời gian không dài nên sẽ có không ít thiếu sót, rất mong các thầy cô góp ý để nhóm biên soạn có thể chỉnh sửa thành một tài liệu tốt hơn.

__Nhóm biên soạn tài liệu tập huấn môn Toán.__

MATHEMATICAL ENGLISH

By *CHU THU HOÀN*

GV Trường PT Chuyên ngoại ngữ, Đại học ngoại ngữ, ĐHQG Hà nội

Arithmetic

0	zero	10	Ten	20	twenty
1	one	11	Eleven	30	thirty
2	two	12	Twelve	40	forty
3	three	13	thirteen	50	fifty
4	four	14	fourteen	60	sixty
5	five	15	fifteen	70	seventy
6	six	16	sixteen	80	eighty
7	seven	17	seventeen	90	ninety
8	eight	18	eighteen	100	one hundred
9	nine	19	nineteen	1000	one thousand

-245	minus two hundred and forty-five
22 731	twenty-two thousand seven hundred and thirty-one
1 000 000	one million
56 000 000	fifty-six million
1 000 000 000	one billion [US usage, now universal]
7 000 000 000	seven billion [US usage, now universal]
1 000 000 000 000	one trillion [US usage, now universal]
3 000 000 000 000	three trillion [US usage, now universal]

Fractions [= Rational Numbers]

$\frac{1}{2}$	one half	$\frac{3}{8}$	three eighths
$\frac{1}{3}$	one third	$\frac{26}{9}$	twenty-six ninths

$\frac{1}{4}$	one quarter [= one fourth]	$-\frac{5}{34}$	minus five thirty-fourths
$\frac{1}{5}$	one fifth	$2\frac{3}{7}$	two and three sevenths
$-\frac{1}{17}$	minus one seventeenth		

Real Numbers

-0.067	minus nought point zero six seven
81.59	eighty-one point five nine
$-2.3 \cdot 10^6$	minus two point three times ten to the six
[= -2 300 000	minus two million three hundred thousand]
$4 \cdot 10^{-3}$	four times ten to the minus three
[= 0.004=4/1000	four thousandths
π [= 3.14159...]	pi [pronounced as ‘pie’]
e [= 2.71828...]	e [base of the natural logarithm]

Complex Numbers

i	I
$3+4i$	three plus four i
$1-2i$	one minus two i
$\overline{1-2i} = 1+2i$	the complex conjugate of one minus two i equals one plus

The real part and the imaginary part of $3+4i$ are equal, respectively, to 3 and 4.

Basic arithmetic operations

Addition:	$3+5=8$	three plus five equals [= is equal to] eight
Subtraction:	$3-5=-2$	three minus five equals [= …] minus two
Multiplication:	$3 \cdot 5 = 15$	three times five equals [= …]

		fifteen
Division:	$3/5 = 0.6$	three divided by five equals [= …] zero point six

$(2-3)\cdot 6+1=5$	Two minus three in brackets times six plus one equals minus five
$\frac{1-3}{2+4} = -\frac{1}{3}$	One minus three over two plus four equals minus one third
$4!\,[=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4]$	four factorial

Exponentiation, Roots

5^2	$[=5\cdot 5=25]$	five squared
5^3	$[=5\cdot 5\cdot 5=125]$	five cubed
5^4	$[=5\cdot 5\cdot 5\cdot 5=625]$	five to the (power of) four
5^{-1}	$[=1/5=0.2]$	five to the minus one
5^{-2}	$[=1/5^2=0.04]$	five to the minus two
$\sqrt{3}$	$[=1.73205...]$	the square root of three
$\sqrt[3]{64}$	$[=4]$	the cube root of sixty four
$\sqrt[5]{32}$	$[=2]$	the fifth root of thirty two

In the complex domain the notation $\sqrt[n]{a}$ is ambiguous, since any non-zero complex number has n-th roots. For example, $\sqrt[4]{4}$ has four possible values: $\pm 1 \pm i$ (with all possible combinations of signs).

$(1+2)^{2+2}$ one plus two, all to the power of two plus two

$e^{\pi i} = -1$ e to the (power of) pi i equals minus one

Divisibility

The multiples of a positive integer a are the numbers $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$. If b is a multiple of a, we also say that a divides b, or that a is a divisor of b (notation: $a \mid b$). This is equivalent to $\frac{b}{a}$ being an integer.

Division with remainder

If a, b are arbitrary positive integers, we can divide b by a, in general, only with a remainder. For example, 7 lies between the following two conseentive multiples of 3:

$$2 \cdot 3 = 6 < 7 < 3 \cdot 3 = 9. \qquad 7 = 2 \cdot 3 + 1 \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} \right)$$

In general, if qa is the largest multiple of a which is less than or equal to b, then

$$b = qa + r, \quad r = 0, 1, \ldots, a - 1$$

The integer q $\left(resp., r\right)$ is the *quotient* (resp the *remainder*) of the division of b by a.

Euclid's algorithm

The algorithm computes the greatest common divisor (notation: $\left(a,b\right)$= gcd$\left(a,b\right)$) of two positive integers a, b

It proceeds by replacing the pair a, b (say, with $a \le b$) by r ; a where r is the remainder of the division of b by a. This procedure, which preserves the gcd, is repeated until we arrive at $r = 0$.

Example. Compute gcd(12, 44).

$$44 = 3 \cdot 12 + 8$$
$$12 = 1 \cdot 8 + 4 \qquad \text{gcd(12,44) = gcd(8,12) = gcd(0,4) = 4.}$$
$$8 = 2 \cdot 4 + 0$$

This calculation allows us to write the fraction $\frac{44}{12}$ in its lowest terms, and also as a continued fraction:

$$\frac{44}{12}=\frac{44/4}{12/4}=\frac{11}{3}=3+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$$

If $\gcd(a,b)=1$, we say that a and b are *relatively prime.*

add (v)	/æd/	cộng
algorithm (n)	/ˈælgərɪðəm/	thuật toán
Euclid's algorithm	/juːˌklɪd/	thuật toán **Euclid**
bracket (n)	/ˈbrækɪt/	dấu ngoặc
Left bracket	/left/	dấu ngoặc trái
right bracket	/raɪt/	dấu ngoặc phải
curly bracket	/ˈkɜːli/	dấu ngoặc {}
denominator (n)	/dɪˈnɒmɪneɪtə(r)/	mẫu số
difference (n)	/ˈdɪfrəns/	hiệu
divide (v)	/dɪˈvaɪd/	chia
divisibility (n)	/dɪˌvɪzəˈbɪləti/	tính chia hết
Divisor (n)	/dɪˈvaɪzə(r)/	số chia
exponent (n)	/ɪkˈspəʊnənt/	số mũ
factorial (n)	/fækˈtɔːriəl/	giai thừa
fraction (n)	/ˈfrækʃn/	phân số
continued fraction	/kənˈtɪnjuːd /	phân số liên tục
gcd [= greatest common divisor]		ước số chung lớn nhất

lcm [= least common multiple]		bội số chung nhỏ nhất
infinity (n)	/ɪnˈfɪnəti/	vô cực, vô tận
Iterate (v)	/ˈɪtəreɪt/	lấy nguyên hàm
iteration (n)	/ˌɪtəˈreɪʃn/	nguyên hàm
multiple (n)	/ˈmʌltɪpl/	bội số
multiply (v)	/ˈmʌltɪplaɪ/	nhân
number (n)	/ˈnʌmbə(r) /	số
even number (n)	/ˈiːvn/	số chẵn
odd number (n)	/ɒd/	số lẻ
numerator (n)	/ˈnjuːməreɪtə(r)/	tử số
pair (n)	/peə(r)/	cặp
pairwise	/peə(r) waɪz/	từng đôi, từng cặp
power (n)	/ˈpaʊə(r)/	lũy thừa
product (n)	/ˈprɒdʌkt/	tích
quotient (n)	/ˈkwəʊʃnt/	thương số
ratio (n)	/ˈreɪʃiəʊ/	tỷ số
rational	/ˈræʃnəl/	hữu tỷ
irrational (a)	/ɪˈræʃənl/	vô tỷ
relatively prime (n)	/ˈrelətɪvli/ - /praɪm/	số nguyên tố cùng nhau
remainder (n)	/rɪˈmeɪndə(r)/	dư, số dư
root (n)	/ruːt/	căn, nghiệm
sum (n)	/sʌm/	tổng số
subtract (v)	/səbˈtrækt/	trừ

Algebra

Algebraic Expressions

$A = a^2$	Capital a equals small a squared
$a = x + y$	a equals x plus y
$b = x - y$	b equals x minus y
$c = x \cdot y \cdot z$	c equals x times y times z
$c = x\,y\,z$	c equals x y z
$(x + y)\,z + xy$	x plus y in brackets z plus x y
$x^2 + y^3 + z^5$	x squared plus y cubed plus z to the (power of) five
$x^n + y^n = z^n$	x to the n plus y to the n equals z to the n
$(x - y)^{3m}$	x minus y in brackets to the (power of) three m x minus y, all to the (power of) three m
$2^x 3^y$	Two to the x times three to the y
$ax^2 + bx + c$	a x squared plus b x plus c
$\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$	The square root of x plus the cube root of y
$\sqrt[n]{x + y}$	The n-th root of x plus y
$\dfrac{a+b}{c-d}$	a plus b over c minus d
$\dbinom{n}{m}$	(the binomial coefficient) n over m

Indices

x_0	x zero; x nought
$x_1 + y_i$	x one plus y i
$R_{i\,j}$	(capital) R (subscript) i j; (capital) R lower i j;
$M^k_{i\,j}$	(capital) M upper k lower i j;

	(capital) M superscript k subscript i j
$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$	sum of a I x to the i for i from nought [= zero] to n sum over i (ranging) from zero to n of a i (times) x to the i
$\prod_{m=1}^{\infty} b_m$	product of b m for m from one to infinity; product over m (ranging) from one to infinity of b m
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$	sum of a I j times b j k for j from one to n; sum over j (ranging) from one to n of a i j times b j k
$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$	sum of n over i x to the i y to the n minus i for i from nought [= zero] to n.

Matrices

column (n)	/ˈkɒləm/	cột
column vector	/ˈvektə(r)/	vectơ cột
determinant (n)	/dɪˈtɜːmɪnənt/	định thức
index (n)	/ˈɪndeks/	số mũ
(pl. indices)	(/ˈɪndɪsiːz/)	
Matrix (n)	/ ˈmeɪtrɪks/	ma trận
matrix entry (pl. entries)	/ˈentri/	hệ số ma trận
$m \times n$ **matrix [** m **by** n **matrix]**		ma trận $m \times n$
row (n)	/rəʊ/	hàng
row vector	/ˈvektə(r)/	vectơ hàng

Inequalities

$x > y$	x is greater than y
$x \geq y$	x is greater (than) or equal to y
$x < y$	x is smaller than y
$x \leq y$	x is smaller (than) or equal to y
$x > 0$	x is positive
$x \geq 0$	x is positive or zero; x is non-negative
$x < 0$	x is negative
$x \leq 0$	x is negative or zero

Polynomial equations

A polynomial equation of degree $n \geq 1$ with complex coefficients

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

has n complex solutions (= roots), provided that they are counted with multiplicities.

For example, a quadratic equation

$$\mathrm{ax}^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

can be solved by completing the square , i.e. , by rewriting the L.H.S as

$$a\left(x + \mathrm{cons}\tan t\right)^2 + \text{ another constant.}$$

This leads to an equivalent equation

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

whose solutions are

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

where $\Delta = b^2 - 4ac\left(a^2\left(x_1 - x_2\right)^2\right)$ is the discriminant of the original equation. More precisely,

$$\mathrm{ax}^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right).$$

If all coefficients a, b, c are real, then the sign of Δ plays a crucial role

If $\Delta = 0$, then $x_1 = x_2$ $\left(= -b/2a\right)$ is a double root;

If $\Delta > 0$, then $x_1 \neq x_2$ are both real;

If $\Delta < 0$, then $x_1 = \overline{x}_2$ are complex conjugates of each other (and non-real).

coefficient (n)	/ˌkəʊɪ'fɪʃnt/	hệ số
Degree (n)	/dɪ'griː/	độ, cấp bậc
discriminant		biệt số, biệt thức
Equation	/ɪ'kweɪʒn/	phương trình
L.H.S. [= left hand side]		vế trái
R.H.S. [= right hand side]		vế phải
polynomial (adj)	/ˌpɑli'noʊmiəl/	đa thức
polynomial (n)		phương trình đại số
Provided that	/prə'vaɪdəd/	gỉa sử
root (n)	/'sɪmpl/	căn, nghiệm
simple root	/'dʌbl/	nghiệm đơn
double root	/'trɪpl/	nghiệm kép
Triple root	/'mʌltəpl/	nghiệm bội ba
multiple root		nghiệm bội
solution(n)	/sə'luʃn/	nghiệm, lời giải, phép giải
solve (v)	/sɔlv/	giải

Congruences

Two integers a,b are congruent modulo a positive integer m if they have the same remainder when divided by m (equivaqlently, if their difference $a \equiv b$ is a multiple of m).

$a \equiv b(\bmod m)$ a is congruent to b modulo m

$$a \equiv b(m)$$

❖ Some people use the following, slightly horrible, notation: $a = b[m]$.

Fermat's Little Theorem. *If p is a prime number and a is an integer, then $a^p \equiv a(\bmod p)$. In other words, $a^p \equiv a$ is always divisible by p.*

Chinese Remainder Theorem. *If $m_1, m_2, ..., m_k$ are pairwise relatively prime integers, then the system of congruences*

$$x \equiv a_1(\bmod m_1) \quad ... \quad x \equiv a_k(\bmod m_k)$$

has a unique solution modulo $m_1, m_2, ..., m_k$, for any integers $a_1, a_2, ..., a_k$.

Geometry

Lines and angles

line $\overleftrightarrow{AB}$ **(n)**	/lain/	đường thẳng AB
ray $\overrightarrow{AB}$ **(n)**	/rei/	tia AB
line segment $\overline{AB}$ **(n)**	/lain 'segmənt/	Đoạn thẳng AB
length of segment $\overline{AB}$ **(n)**	/leɳθ ɔv 'segmənt/	chiều dài đoạn thẳng AB

$\overline{AB} \cong \overline{XY}$ means the same thing as AB = XY	/mi:nz ðə seim θiŋ æz/	đồng nghĩa với, tương tự như
angle(n)	/'æɳgl/	góc
vertex(n)	/´və:teks/	đỉnh
acute angle	/'əkju:t 'æɳgl/	góc nhọn
right angle	/'rait 'æɳgl/	góc vuông
obtuse angle	/əb'tju:s 'æɳgl/	góc tù
straight angle	/streıt 'æɳgl/	góc bẹt
m$\angle$A = m$\angle$B we can write $\angle$A$\cong$ $\angle$B: congruent	/´kɔηgruənt/	tương đẳng,bằng
supplementary (a)	/ˌsʌpləˈmɛntəri/	phụ
complementary(a)	/,kɔmpli'mentəri/	bù
vertical angle(n)	/'və:tikəl 'æɳgl/	góc đối đỉnh
bisect(v)	/bai´sekt/	chia đôi
midpoint(n)	/midpɔint/	trung điểm
perpendicular(a)	/pə:pən'dikjulə/	vuông góc
parallel(a)	/'pærəlel/	song song
transversal(n)(a)	/trænz´və:səl/	đường ngang,ngang

Triangle

exterior angle(n)	/eks'tiəriə 'æȵgl/	góc ngoài
scalene triangle(n)	/´skeili:n ´traiæηgl/	tam giác thường
isosceles triangle(n)	/ai´sɔsi¸li:z ´traiæηgl/	tam giác cân
equilateral triangle(n)	/¸i:kwi´lætərəl ´traiæηgl/	tam giác đều
acute triangle(n)	/'əkju:t ´traiæȵgl/	tam giác nhọn
Obtuse triangle (n)	/əb'tju:s ´traiæȵgl/	tam giác tù
right triangle(n)	/'rait ´traiæȵgl/	tam giác vuông
hypotenuse(n)	/hai'pɔtinju:z/	cạnh huyền
leg(n)	/´leg/	cạnh góc vuông
Pythagorean theorem and corollaries	/pai¸θægə´riən 'θiərəm ənd kə'rɒləris/	định lý pythagore và hệ quả
perimeter (n)	/pə´rimitə/	chu vi
triangle inequality(n)	/´traiæηgl ,ini:'kwɔliti/	bất đẳng thức tam giác
height(n)	/hait/	chiều cao
altitude(n)	/´ælti¸tju:d/	chiều cao
Similar triangles(n)	/´similə ´traiæηgls/	tam giác đồng dạng
ratio of similitude(n)	/´reiʃiou ɔv si´mili¸tju:d/	tỉ số đồng dạng

Quadrilaterals and other polygons

- /¸kwɔdri´lætərəls ənd ˈʌðər ´pɔligəns/ tứ giác và các đa giác khác

polygon(n)	/´pɔligən/	đa giác
side (n)	/said/	Cạnh
vertex (n)	/´və:teks/	đỉnh
vertices		số nhiều của vertex
diagonal(n)	/dai´ægənəl/	đường chéo
quadrilateral(n)	/¸kwɔdri´lætərəl/	tứ giác
regular polygon (n)	/'rəgjulə ´pɔligən/	đa giác đều
exterior angle (n)	/eks'tiəriə 'æŋgl/	góc ngoài
parallelogram(n)	/¸pærə´lelə¸græm/	hình bình hành
base (n)	/beis/	đáy
height (n)	/hait/	chiều cao
opposite sides are parallel: $\overline{AB} // \overline{CD}$ **and** $\overline{AD} // \overline{BC}$	/'ɔpəzit saids ɑ: 'pærəlel/	các cạnh đối diện song song
opposite sides are congruent: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ **and** $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	/'ɔpəzit saids ɑ: ´kɔŋgruənt/	các cạnh đối diện tương đẳng/bằng nhau

opposite angles are congruent: ∠A ≅ ∠C and ∠B ≅ ∠D	/'ɔpəzit 'æηgls ɑ:´kɔηgruənt/	các góc đối diện tương đẳng /bằng nhau
two congruent triangles: ∆ABC ≅ ∆ACD	/tu: ´kɔηgruənt ´traiæηgls/:	hai tam giác tương đẳng/bằng nhau
rectangle (n)	/´rek¸tæηgl/	hình chữ nhật
length (n)	/leηθ/	chiều dài
width (n)	/wɪdθ/	chiều rộng
rhombus (n)	/´rɔmbəs/	hình thoi
Square (n)	/skweə/	hình vuông
trapezoid(n)	/´træpi¸zɔid/	hình thang
isosceles trapezoid(n)	/ai´sɔsi¸li:z ´træpi¸zɔid/	hình thang cân
perimeter (n)	/pə´rimitə/	chu vi

Circles

circle (n)	/'sə:kl/	đường tròn
center (n)	/'sentə/	tâm
radius (n)	/´reidiəs/	bán kính
diameter(n)	/dai'æmitə/	đường kính
chord (n)	/kɔrd/	dây cung
circumference(n)	/sə:´kʌmfərəns/	chu vi đường tròn
semicircle(n)	/´semi¸sə:kl/	nửa đường tròn, bán nguyệt
arc (n)	/ɑrk/	cung

intercept (v)	/'intəsept/	chắn
central angle (n)	/´sentrəl 'æɳgl/	góc ở tâm

Solid and coordinate geometry

rectangular solid = box(n)	/rek'tæɳgjulə/ /'sɔlid/	Hình hộp chữ nhật
face (n)	/feis/	mặt, bề mặt
edge (n)	/edʒ/	Cạnh
length (n)	/leɳθ/	Chiều dài, độ dài
width (n)	/wid /	Chiều rộng
height (n)	/hait/	Chiều cao
cube (n)	/kju:b/	Hình lập phương
volume (n)	/'vɔljum/	Khối, thể tích
cubic unit (n)	/'kju:bik/ /'ju:nit/	Đơn vị lập phương
surface area (n)	/'sə:fis/ /'eəriə/	Diện tích bề mặt
diagonal (n)	/dai'ægənl/	Đường chéo
cylinder(n)	/'silində/	Hình trụ
circle (n)	/'sə:kl/	Đường tròn
prism (n)	/prism/	Lăng trụ
two congruent parallel bases	/´kɔηgruənt/ /'pærəlel/	hai đáy song song

right prism (n)	/rait/ /prism/	Lăng trụ đứng
cone (n)	/koun/	Hình nón
slant height (n)	/slɑ:nt/ /hait/	Đường sinh
circumference(n)	/sə'kʌmfərəns/	Chu vi
Lateral surface area (n)	/'lætərəl/ /'sə:fis/ /'eəriə/	Diện tích xung quang
pyramid(n)	/'pirəmid/	Hình chóp
polygon(n)	/'pɔligən/	Đa giác
Square(n)	/skweə/	Bình phương, hình vuông
triangle (n)	/´traiæηgl/	Hình tam giác
Sphere(n)	/sfiə/	Hình cầu, mặt cầu
Radius(n)	/´reidiəs/	Bán kính
radii(n)	/'reidjai/	Số nhiều của bán kính
x-axis(n)	/eks/ /'æksis/	Trục hoành
y-axis (n)	/wai/ /'æksis/	Trục tung
origin(n)	/'ɔridʤin/	Gốc tọa độ
quadrant(n)	/'kwɔdrənt/	Góc phần tư, cung phần tư
x-coordinate (n)	/eks/ /kou'ɔ:dnit/	Hoành độ
y-coordinate (n)	/wait/ /kou'ɔ:dnit/	Tung độ
horizontal line (n)	/,hɔri'zɔntl/ /lain/	Đường thẳng song song trục hoành

vertical line (n)	/'və:tikəl/ /lain/	Đường thẳng song song trục tung
midpoint of a segment (n)	/'segmənt/	Trung điểm của đoạn thẳng
slope (n)=gradient	/sloup/	Hệ số góc
equation of line (n)	/i'kweiʃn/ /ɔv, əv/ /lain/	Phương trình đường thẳng
y-intercept (n)	/'intəsept/	Giao với trục tung
parabola	/pə'ræbələ/	Parabol
axis of symmetry	/'æksis/ /ɔv, əv/ /'simitri/	Trục đối xứng
vertex or turning point	/'və:teks/ - /'tə:niɳ/ /pɔint/	Đỉnh
$y = ax^2 + bx + c, a > 0$	$y = ax^2 + bx + c, a < 0$	
The parabola opens upward and the vertex is the lowest point on the parabola	The parabola opens downward and the vertex is the highest point on the parabola	
Ellipse(n)	/i΄lips/	elip
hyperbola(n)	/hai΄pə:bələ/	hyperbol
hexagon (n)	/΄heksəgən/	hình sáu cạnh

parallelogram (n)	/ˌpærəˊleləˌgræm/	hình bình hành
pass through (v)	/pɑ:s θru:/	đi qua
pentagon (n)	/ˊpentəˌgɔn/	hình ngũ giác
plane	/plein/	mặt phẳng (n), phẳng (adj)
point (n)	/pɔint/	điểm
(regular) polygon (n)	(/'rəgjulə/) /ˊpɔligən/	đa giác (đều)
(regular) polyhedron (n)	(/'rəgjulə/) /ˌpɔliˊhi:drən/(pl. polyhedra) (số nhiều. /'pɔli'hedrə/)	khối nhiều mặt (đều)
projection (n)	/prəˊdʒekʃən/	hình chiếu
central projection (n)	/ˊsentrəl prəˊdʒekʃən/	phép chiếu qua tâm
orthogonal projection (n)	/ɔ:ˊθɔgənəl prəˊdʒekʃən/	phép chiếu trực giao
parallel projection (n)	/'pærəlel prəˊdʒekʃən/	phép chiếu song song
quadrilateral (n)	/ˌkwɔdriˊlætərəl/	tứ giác
radius (pl. radii) (n)	/ˊreidiəs/	bán kính
rectangle (n)	/ˊrekˌtæηgl/	hình chữ nhật
rectangular (adj)	/rek'tæŋgjulə/	thuộc hình chữ nhật, vuông góc
rotation (n)	/rouˊteiʃən/	phép quay
side (n)	/said/	cạnh
slope (n)	/sloup/	độ dốc
Sphere (n)	/sfiə/	hình cầu, mặt cầu
Square	/skweə/	bình phương(n),

		vuông(adj)
surface (n)	/ˈsɜrfɪs/	bề mặt
tangent to (v)	/'tændʒənt/	tiếp tuyến với
tangent line (n)	/'tændʒənt lain/	đường tiếp tuyến
tangent hyper (plane) (n)	/'tændʒənt ˊhaipə/	siêu phẳng tiếp xúc
tetrahedron (n)	/¸tetrəˊhi:drən/	khối tứ diện
triangle (n)	/ˊtraiæηgl/	hình tam giác
equilateral triangle (n)	/¸i:kwiˊlætərəl ˊtraiæηgl/	tam giác đều
isosceles triangle (n)	/aiˊsɔsi¸li:z ˊtraiæηgl/	tam giác cân
right-angled triangle (n)	/ˊrait¸æηld ˊtraiæηgl/	tam giác vuông
vertex (n)	/ˊvə:teks/	đỉnh

Euler's Formula

Let P be a convex polyhedron. Euler's formula asserts that

$$V - E + F = 2,$$

V = the number of vertices of P,

E = the number of edges of P,

F = the number of faces of P.

Exercise. *Use this formula to classify regular polyhedra (there are precisely five of them: tetrahedron, cube, octahedron, dodecahedron and icosahedron).*

For example, an icosahedron has 20 faces, 30 edges and 12 vertices. Each face is an isosceles triangle, each edge belongs to two faces and there are 5 faces meeting at each vertex. The midpoints of its faces form a dual regular polyhedron, in this case a dodecahedron, which has 12 faces (regular pentagons), 30 edges and 20 vertices (each of them belonging to 3 faces).

Linear Algebra

basis (n)	/´beisis/ (pl. bases)	cơ sở, nền, đáy, cơ số
change of basis	/tʃeɪndʒ/ /´beisis/	
bilinear form (n)	/bai´lini:ə/ /fɔ:m/	dạng song tuyến tính
coordinate (n)	/kou'ɔ:dneit/	tọa độ
(non-)degenerate	/di´dʒenə¸reit/	đồng biến
dimension (n)	/dɪˈmɛnʃən, daɪˈmɛnʃən/	chiều, kích thước, khổ, cỡ
codimension (n)		số đối chiều
finite dimension (n)	/ˈfaɪnaɪt/ /dɪˈmɛnʃən, daɪˈmɛnʃən/	hữu hạn chiều
infinite dimension (n)	/´infinit//dɪˈmɛnʃən, daɪˈmɛnʃən/	vô hạn chiều
Image(n)	/´imindʒ/	ảnh
Isometry(n)	/ai´sɔmitri/	đẳng cự
kernel (n)	/'kə:nl/	nhân
linear (a)	/'liniə/	tuyến tính, đường thẳng
Origin(n)	/'ɔridʒin/	Gốc
orthogonal; perpendicular	/ɔ:´θɔgənəl/ /pə:pən'dikjulə/	vuông góc, trực giao
(orthogonal) projection	/prə´dʒekʃən/	phép chiếu vuông góc
quadratic form (n)	/kwɔ'drætik/	dạng phương trình bậc hai
reflection (n)	/ri´flekʃən/	sự đối xứng
represent (v)	/,reprɪ'zent/	biểu diễn

rotation (n)	/rou´teiʃən/	phép quay
scalar (a)	/´skeilə/	vô hướng
scalar product (n)	/´prɔdʌkt/	tích vô hướng
subspace (n)	/´sʌb¸speis/	không gian con
(direct) sum (n)	/sʌm/	tổng
skew-symmetric(a)		phản đối xứng
symmetric (a)	/si´metrik/	đối xứng
vector (n)	/'vektə/	véc-tơ
vector space	/´speis/	không gian véc-tơ
vector subspace	/´sʌb¸speis/	không gian con véc-tơ

Mathematical arguments

Set theory

$x \in A$	x is an element of A; x lies in A; x belongs to A; x is in A.
$x \notin A$	x is not an element of A; x does not lie in A; x does not belong to A; x is not in A.
$x, y \in A$	(both) x and y are elements of A; ....lie in A; ..... belong to A; .... are in A.
$x, y \notin A$	(neither) x nor y is an element of A; .... lies in A; ...... belongs to A; ... is in A.
$\varnothing$	The empty set (= set with no elements).
$A = \varnothing$	A is an empty set.
$A \neq \varnothing$	A is non-empty.
$A \cup B$	the union of (the sets) A and B; A union B.
$A \cap B$	the intersection of (the sets) A and B; A intersection B.
$A \times B$	the product of (the sets)) A and B; A times B.
$A \cap B = \varnothing$	A is disjoint from B; the intersection of A and B is empty.

$\{x, ...\}$	the set of all x such that .....
C	the set of all complex numbers.
Q	the set of all rational numbers.
R	the set of all real numbers.
$A \cup B$	contains those elements that belong to A or to B (or to both).
$A \cap B$	contains those elements that belong to both A and B.
$A \times B$	contains the ordered pairs (a, b), where a (resp ..b) belongs to A (resp..to B).
$A^n = \underbrace{A \times A \times .}_{n}$	contains all ordered n-tuples of elements of A.

Belong to(v)	[bi’lɒŋ tu:]	thuộc về
disjoint from(adj)	[dis’dʒɔint frɘm]	rời (nhau)
element(n)	[‘elimɘnt]	phần tử, yếu tố
empty(a)	[‘empti]	trống, rỗng
nonempty(a)	[‘nɒn,empti]	không trống, không rỗng
intersection(n)	[,intɘ’sekʃ(ɘ)n]	sự tương giao
inverse(n)	[in’vɜ:s]	sự nghịch đảo, sự khả nghịch
the inverse map to f	[Θɘ in’vɜ:s mæp tu: ef]	ánh xạ ngược của ánh xạ f
the inverse of f	[Θɘ in’vɜ:s ɒv ef]	ánh xạ ngược của ánh xạ f
map(n)	[mæp]	ánh xạ, bản đồ, bản phương án.
pair(n)	[peɘ(r)]	cặp, đôi
ordered pair	[‘ɔ:dɘ(r) peɘ(r)]	cặp thứ tự
triple(n)	[trip(ɘ)l]	bội ba
quadruple(n)	[‘kwɒdrup(ɘ)l]	gấp bốn, bội bốn
relation (n)	[ri’leiʃ(ɘ)n]	quan hệ, hệ thức

equivalence relation	[i'kwivələnt ri'leiʃ(ə)n]	quan hệ tương đương
set (n)	[set]	tập hợp
finite set	['fainait set]	tập hữu hạn
infinite set	['infinit set]	tập vô hạn
union(n)	['ju:niən]	hợp

Logic

$S \vee T$ — S or T.

$S \wedge T$ — S and T.

$S \Rightarrow T$ — S implies T; if S then T.

$S \Leftrightarrow T$ — S is equivalent to T; S iff T.

$-S$ — not S

$\forall x \in A$..... — for each [=for every] x in A.......

$\exists x \in A$.... — there exists [= there is] an x in A (such that).....

$\exists! x \in A$.... — there exists [= there is] a unique x in A (such that).....

$\nexists\ x \in A$.... — there no x in A (such that).....

$x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x + y > 0$ — if both x and y are positive, so is $x + y$.

$\nexists\ x \in \mathbb{Q}\ \ x^2 = 2$ — no rational number has a square equal to two

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Q}\ \ |x - y| < 2/3$ — for every real number x there exists a rational number y such that the absolute value of x minus y is smaller than two thirds.

<u>**Exercise.**</u> Read out the following statements.

$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$ $\qquad$ $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ x^2 \geq 0$ $\qquad$ $\nexists\ x \in \mathbb{R}\ \ x^2 < 0$ $\qquad$ $\forall y \in \mathbb{C}\ \ \exists : x \in \mathbb{C}\ \ y = x^2$

Basic arguments

It follows from .... that .... : Từ ….suy ra …..

We deduce from ... that ...: Ta suy ra từ …..rằng…..

Conversely, ... implies that ....: Ngược lại, …….có nghĩa……..

Equality (1) holds, by Proposition 2 : Theo mệnh đề 2 , đẳng thức (1) đúng.

By definition, ...: Theo định nghĩa ……

The following statements are equivalent: Những phát biểu sau là tương đương

Thanks to ... the properties ... and ... of ... are equivalent to each other : Nhờ ….những tính chất…là tương đương.

..... has the following properties: ….có những tính chất sau

Theorem 1 hold unconditionally: định lý 1 được suy ra một cách hiển nhiên

This result is conditional on Axiom A : Kết quả này được suy ra từ tiên đề A…

.... is an immediate consequence of Theorem 3: ….là hệ quả trực tiếp từ định lý 3.

Note that .... is well- defined, since ....Chú ý rằng ….luôn đúng vì …..

As ... satifises .... formula (1) can be simplified as follows: vì…thỏa mãn …công thức (1) có thể được viết đơn giản như sau .

We conclude (the argument) by combining in equalities (2) and (3): Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh

(Let us) denote by X the set of all ..... Ký hiệu X là tập hợp …

Let X be the set of all ....

Recall that ..... by assumption : Theo giả thiết ta có …..

It is enough to show that ....Điều kiện đủ là ….

We are reduced to proving that ...Suy rat a cần chứng minh rằng…..

The main idea is as follows : Ý tưởng chính là như sau

We argue by contradiction / Assume that ... exists : Giả sử phản chứng là :….

The formal argument proceeds in several steps : kết luận được đưa ra từ các bước sau…

Consider first the special case when ...xét trường hợp đặc biệt đầu tiên…

The assumptions ... and ... are independent (of each other). Since ....Các giả sử là độc lập nhau vì …

.... which proves the required claim … điều cần chứng minh

We use induction on n to show that ..... Ta sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp với n

On the other hand, ...một mặt….

.... which mean that .... điều đó chứng tỏ rằng…

In others word,....nói một cách khác…

Argument (n)	/'ɑ:gjumənt/	Lập luận
assume (v)	/ə'sju:m/	Giả sử
assumption	/ə'sʌmpʃn/	Sự giả sử
Axiom (n)	/'æksiəm/	tiền đề
Case (n)	/keis/	cách
special case	/'speʃəl keis /	cách đặc biệt
Claim (n)	/kleim/	lời xác nhận
(the following) claim		
Concept (n)	/ˈkɒnsept/	khái niệm
Conclude(v)	/kənˈklud/	kết luận
Conclusion (n)	/kənˈkluʒən/	sự kết luận
Condition (n)	/kən'dɪʃn/	điều kiện
a necessary and sufficient condition	/'nesəseri/ /sə'fiʃnt/	điều kiện cần và đủ
Conjecture (n)	/kən´dʒektʃə/	sự giả định, giả sử
Consequence (n)	/'kɔnsikwəns/	hệ quả, kết quả
Consider (v)	/kən´sidə/	xét, chú ý đến cho rằng
contradict (v)	/¸kɔntrə´dikt/	mâu thuẫn với, trái với
Contradiction (n)	/,kɔntrə'dikʃn/	sự phủ định, sự mâu thuẫn
Conversely (adv)	/kən'və:sli/	ngược lại

corollary (n)	/kə'rɒləri/	Hệ quả
Deduce (v)	/di´dju:s/	suy ra
Define(v)	/di'fain/	định nghĩa
Well-defined	/´weldi´faind/	Được định nghĩa
Definition(n)	/definiʃn/	lời định nghĩa
Equivalent(a)	/i´kwivələnt/	tương đương
Establish(v)	/ɪˈstæblɪʃ/	thiết lập
Example(n)	/ig´za:mp(ə)l/	ví dụ
Exercise (n)	/'eksəsaiz/	bài tập
Explain(v)	/iks'plein/	giải thích
Explanation(n)	/,eksplə'neiʃn/	sự giải thích
False(a)	/fɔ:ls/	sai
Formal(a)	/'fɔ:məl/	hình thức
Hand(n)	/hænd/	tay
on one hand		Một mặt
on the other hand		Mặt khác
iff [=if and only if]		Khi và chỉ khi
Imply(v)	/im'plai/	bao hàm; kéo theo; có hệ quả, có nghĩa
Induction on(v)	/In'dʌkʃn/	phép quy nạp
Lemma(n)	/´lemə/	bổ đề
Proof(n)	/pru:f/	Bằng chứng
Property(n)	/'prɔpəti/	tính chất
satisfy property *P*	/'sætisfai/ /'prɔpəti/	thỏa mãn tính chất
Proposition(n)	/ˌprɒpəˈzɪʃən/	mệnh đề
Reasoning(n)	/´ri:zəniη/	sự biện luận
Reduce to(v)	/ri'dju:s/	rút gọn
Remark(v)	/ri'mɑ:k/	chú ý, chú thích
Require(v)	/ri'kwaiə/	đòi hỏi, cần tìm
Result (v)	/ri'zʌlt/	kết quả

s.t = such that		Sao cho
Statement(n)	/'steitmənt/	câu lệnh
t.f.a.e = the following are equivalent		Tương đương với
theorem (n)	/ 'θiərəm/	định lý
True (a)	/tru:/	đúng
Truth (n)	/tru:θ/	chân lý
wlog = without loss of generality		Không mất tính tổng quát

Function

Formulas/ Formulae

$f(x)$	f of x
$g(x,y)$	g of x (comma) y
$h(2x,3y)$	h of two x (comma) three y
$\sin(x)$	sine x
$\cos(x)$	cosine x
$\tan(x)$	tan x
$\arcsin(x)$	arc sine x
$\arccos(x)$	arc cos x
$\arctan(x)$	arc tan x
$\sinh(x)$	hyperbolic sine x
$\cosh(x)$	hyperbolic cosine x
$\tanh(x)$	hyperbolic tan x
$\sin(x^2)$	sine of x squared
$(\sin x)^2$	sine squared of x; sine x, all squared
$\frac{x+1}{\tan(y^4)}$	x plus one, all over over tan of y to the four
$3^{x-\cos 2x}$	three to the (power of) x minus cosine of two x
$\exp(x^3+y^3)$	exponential of x cubed plus y cubed

Intervals

(a,b)	open interval a,b
$[a,b]$	closed interval a,b
$(a,b]$	halp open interval a,b (open on the left, closed on the right)
$[a,b)$	halp open interval a,b (open on the right, closed on the left)

Derivatives

$f^{'}$	f dash; f prime; the first derivative of f
$f^{''}$	f double dash; f double prime; the second derivative of f
$f^{(3)}$	the third derivative of f
$f^{(n)}$	the n-th derivative of f
$\frac{dy}{dx}$	d y by d x; the derivative of y by x
$\frac{d^2y}{dx^2}$	the second derivative of y by x; d squared y by d x squared
$\frac{\partial f}{\partial x}$	the pattial derivative of f by x (with respect to x); partial d f by d x
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	the second pattial derivative of f by x (with respect to x); partial d squared f by d x squared
∇f	nabla f; the gradient of f
Δf	delta f

Example. The (total) differential of a function $f(x,y,z)$ in three real variables equal to

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

The gradient of f is the vector whose components are the partial derivatives of f with respect to the three variables:

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}).$$

The laplace operator Δ acts on f by taking, the sum of the second partialderivatives with respect to the three variables

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

The Jacobian matrix of a pair of function $g(x, y)$, $h(x, y)$ in two real variables is the 2×2 matrix whose entries are the partial derivatives of g and h, respectively, with respect to the two variables.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Intergrals

$\int f(x)dx$	integral of f of x d x
$\int_a^b t^2 dt$	integral from a to b of t squared d t
$\iint_S h(x, y)dxdy$	double integral over S of h x y d x d y

Differential equations

An ordinary (resp.. a partial) differential equation, abbreviated as ODE (resp ..PDE) is an equation involving an unknown function f of one (resp.. more than one) varial together with its derivatives (resp.. partial derivatives). Its order is the maximal order of derivatives that appear in the equation. The equation is linear if f and its derivatives appear linearly, other wise it is non-linear.

$f' + xf = 0$	first order linear ODE
$f'' + \sin(f) = 0$	second order non-linear ODE
$(x^2+y)\frac{\partial f}{\partial x} + (x+y^2)\frac{\partial f}{\partial y} + 1 = 0$	first order linear PDE

The classial linear PDE is arising from physics invole the Laplace operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial z}$$

$\Delta f = 0$	the Laplace equation
$\Delta f = \lambda f$	the Helmholtz equation
$\Delta g = \frac{\partial y}{\partial x}$	the heat equation
$\Delta g = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$	the wave equation

Above, x, y, z are the standard coordinates on a suit able domain U in $\mathbb{R}^3$, f is the time variable, $f = f(x, y, z)$ and $g = g(x, y, z, t)$. In addition, the function f (resp .. g) is required to satisfy suit able boundary conditions (resp .. initial conditions) on the boundary of U (resp .. for $t = 0$)

act (v)	/ækt/	tác động
action (n)	/ˈækʃən/	tác động
bound (n)	/'baund/	giới hạn
bounded (adj)	/´baundid/	bị chặn
bounded above (adj)	/´baundid ə'bʌv/	bị chặn trên
bounded below (adj)	/´baundid bi'lou/	bị chặn dưới
unbounded (adj)	/ʌn´baundid/	không giới hạn
comma (n)	/ˈkɒmə/	dấu phẩy
concave function (n)	/'kɔnkeiv ˈfʌŋkʃən/	hàm lõm
condition (n)	/kən'dɪʃn/	điều kiện

boundary condition (n)	/'baundəri kən'dɪʃn/	điều kiện biên
initial condition (n)	/i'niʃəl kən'dɪʃn/	điều kiện ban đầu
constant (n)	/'kɔnstənt/	đại lượng (số) không đổi, hằng số
constant (adj)	/'kɔnstənt/	bất biến, không thay đổi
constant function (n)	/'kɔnstənt ˈfʌŋkʃən/	hàm hằng
Non-constant (adj)	/´nɔn 'kɔnstənt/	khả biến, thay đổi
Non-constant function (n)	/´nɔn 'kɔnstənt ˈfʌŋkʃən/	hàm khả biến
continuous (adj)	/kən'tinjuəs/	liên tục, sát nhau
continuous function (n)	/kən'tinjuəs ˈfʌŋkʃən/	hàm liên tục
Convex function (n)	/kənˈvɛks ˈfʌŋkʃən/	hàm lồi
decrease (n)	/ 'di:kri:s/	sự giảm sút
decrease (v)	/ 'di:kri:s/	làm giảm sút
decreasing function (n)	/ 'di:kri:siɳ ˈfʌŋkʃən/	hàm nghịch biến
strictly decreasing function	/striktli 'di:kri:siɳ ˈfʌŋkʃən/	Hàm giảm một cách nghiêm ngặt
derivative (n)	/di'rivətiv/	đạo hàm
second derivative (n)	/ˈsɛkənd di'rivətiv/	đạo hàm bậc 2
n **-th derivative (n)**		đạo hàm bậc n
partial derivative (n)	/ˈpɑrʃəl di'rivətiv/	đạo hàm từng phần
differential (n)	/difə'renʃəl/	vi phân
differential form (n)	/difə'renʃəl fɔ:m/	dạng vi phân
differentiable function (n)	/¸difə´renʃiəbl ˈfʌŋkʃən/	hàm khả vi
twice differentiable function (n)	/twaɪs difə´renʃiəbl ˈfʌŋkʃən/	hàm khả vi bậc 2
n**-times continuously differentiable function**	/en-taimskən'tinjuəsli difə´renʃiəbl	hàm khả vi bậc n

	ˈfʌŋkʃən/	
domain (n)	/də´mein/	miền
equation (n)	/i'kweiʃn/	phương trình
the heat equation (n)	/hi:t i'kweiʃn/	phương trình nhiệt
the wave equation (n)	/weɪv i'kweiʃn/	phương trình sóng
function (n)	/ˈfʌŋkʃən/	hàm, hàm số
graph (n)	/gra:f/	đồ thị
increase(n)	/'ɪŋkri:s/	sự tăng thêm
increase (v)	/ɪn'kri:s/	tăng lên
increasing function (n)	/ɪn'kri:siɳ ˈfʌŋkʃən/	hàm đồng biến
strictly increasing function	/striktli ɪn'kri:siɳ ˈfʌŋkʃən/	Hàm tăng một cách nghiêm ngặt
integral (n)	/'intigrəl/	tích phân
integral (adj)	/'intigrəl/	nguyên
closed integral (n)	/klouzd 'intigrəl/	tích phân đóng
open integral (n)	/'oupən 'intigrəl/	tích phân mở
linear (adj)	/'liniə/	tuyến tính, thẳng
Non-linear (adj)	/´nɔn 'liniə/	không thẳng
maximum (adj)	/´mæksiməm/	cực đại, cực độ, tối đa
global maximum (n)	/´gloubl ´mæksiməm/	cực đại toàn diện
local maximum (n)	/'loukəl ´mæksiməm/	cực đại cục bộ
minimum (n)	/'mɪnɪməm/	cực tiểu
global minimum (n)	/´gloubl 'mɪnɪməm/	cực tiểu toàn diện
local minimum (n)	/'loukəl 'mɪnɪməm/	cực tiểu cục bộ
monotone function (n)	/´mɔnə¸toun ˈfʌŋkʃən/	hàm đơn điệu
operator (n)	/´ɔpə¸reitə/	toán tử , phép toán
otherwise	/ 'ʌðəwaɪz /	cách khác, khác
Partial(a)	/ 'pɑːʃl /	riêng, phần riêng
Sign(n)	/ saɪn /	dấu, dấu hiệu
Value(n)	/ 'væljuː /	giá trị

complex-valued function	/ 'kɒmpleks / /'vælju:/	hàm lấy giá trị phức, hàm phức
Real- value function	/ rɪəl/	hàm lấy giá trị thực, hàm thực
Variable(n)	/ 'veəriəbl/	biến số, biến thiên, biến đổi
complex variable	/ 'kɒmpleks / / 'veəriəbl/	biến phức
Real variable	/ rɪəl/ / 'veəriəbl/	biến thực
function in three variables	/ 'veəriəbl/	hàm ba biến
with respect to [=w.r.t.]	/wɪð rɪ'spekt tə /	đối với

This is all Greek to me

Small Greek letters used in mathematics

α	alpha	β	Beta	γ	Gamma	δ	delta
ε	epsilon	ζ	Zeta	η	Eta	θ	theta
γ	iota	κ	Kappa	λ	Lamda	μ	muy
ν	nu	ζ	Xi	o	Omicron	π, ϖ	pi
ρ	rho	σ	Sigma	τ	Tau	υ	upsilon
ϕ, φ	phi	χ	Chi	ξ	Psi	ω	omega

Capital Greek letters used in mathematics

B	Beta	Γ	Gamma	Δ	Delta	Θ	Theta
Λ	Lamda	Ξ	Xi	Π	Pi	Σ	Sigma
T	Upsilon	Φ	Phi	Ψ	Psi	Ω	Omega

Sequences, Series
Convergence criteria

By definition, an infinite series of complex number $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges (to a complex numbers) if the sequence of partial sums $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ has a finite limit(equal to s) otherwise it diverges.

The simplest convergence criteria are based on the following two facts.

Fact 1. If $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ is convergent, so is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (in this case we say that the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is absolutely convergent).

Fact 2. If $0 \le a_n \le b_n$ for all suflicently large n and if $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges, so does $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Taking $b_n = r^n$ and using the fact that the geometric series $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ of ratio r is convergent iff $|r| < 1$, we deduce from Fact 2 the following statements.

The ratio test (D'Alembert). If there exists $0 < r < 1$ such that, for all sufficiently large n, $|a_{n+1}| \le r|a_n|$ then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is (absolutely) convergent.

The root test(Cauchy). If there exists $0 < r < 1$ such that, for all sufficiently large n, $\sqrt[n]{|a_n|} \le r$, the $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is (absolutely) convergent.

What is the sum $1+2+3+\cdots$ equal to?

At first glance, the answer is easy and not particularly interesting as the partial sums

1, 1+2=3, 1+2+3=6, 1+2+3+4=10,...

tend toward plus infinity, we have

$$1+2+3+\ldots = +\infty$$

It turns out that something much more interesting is going on behind the scenes. In fact, there are several ways of "regularising" this divergent series and they all lead to the following surprising answer:

$$(\text{ the regularized value of}) \; 1+2+3+\cdots = \frac{1}{12}.$$

How is the possible? Let us pretend that the infinite sums

a = 1 + 2 + 3 + 4 +...

b = 1 – 2 + 3 – 4 +...

c = 1 – 1 + 1 – 1 +...

all make sense. What can we say about their values? Firstly, adding e to itself yields.

$$\left.\begin{aligned} c &= 1-1+1-1+\ldots \\ c &= \quad +1-1+1-\ldots \\ c+c &= 1+0+0+0+\ldots = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c = \frac{1}{2}.$$

Secondly, computing $c^2 = c\left(1-1+1-1+\ldots\right) = c-c+c-c+\ldots$ by adding the infinitely many rows in the following table

$$\begin{aligned} c &= 1-1+1-1+\ldots \\ c &= \quad\;\; 1+1-1+\ldots \\ c &= \qquad\quad 1-1+\ldots \\ &\vdots \qquad\qquad\quad \ddots \end{aligned}$$

we obtain $b = c^2 = \frac{1}{4}$. Alternatively, adding b to itself gives

$$\left.\begin{aligned} b &= 1-2+3-4+\ldots \\ b &= \quad +1-2+3-\ldots \\ b+b &= 1-1+1-1+\ldots = c \end{aligned}\right\} \Rightarrow b = \frac{c}{2} = \frac{1}{4}.$$

Finally, we can relate a to b, by adding up the following two rows:

$$\left.\begin{array}{l} a \;\; = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \\ 4a = \quad 4 \quad - \quad 8 - \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow 3a = b = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{12}$$

Exercise. Using the same method, "compute" the sum

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots.$$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ **the limit of f of x as x tends to one is equal to two**

approach (n)	/ əˈprəʊtʃ/	sự gần đúng, phép xấp xỉ, cách tiếp cận
close (v)	/ kləʊz/	đóng kín
arbitrarily close to	ˈɑːbɪtrəri kləʊz tuː/	đóng một cách tùy ý
Compare(v)	/ kəmˈpeə(r)/	so sánh
Comparison (n)	/ kəmˈpærɪsn/	sự so sánh
Converge (v)	/ kənˈvɜːdʒ/	hội tụ, đồng quy
Convergence (n)	/ kənˈvɜːdʒ/	sự hội tụ, tính đồng quy
criterion (pl. criteria)	/ kraɪˈtɪəriən/	tiêu chuẩn
Diverge(v)	/ daɪˈvɜːdʒ/	phân kỳ, lệch
Divergence(n)	/ daɪˈvɜːdʒ/	sự phân kỳ, tính phân kỳ
Infinite(a)	/ ˈɪnfɪnət/	vô hạn, vô cực, vô số
Infinity(n)	/ ɪnˈfɪnəti /	vô số, vô cực, vô hạn, vô tận
minus infinity	/ ˈmaɪnəs ɪnˈfɪnəti /	âm vô cực
Plus infinity	/ plʌs ɪnˈfɪnəti /	cộng vô cực

Large(a)	/ lɑːdʒ /	lớn, rộng
Large enough	/ lɑːdʒ ɪˈnʌf /	đủ lớn
sufficiently large	/ səˈfɪʃnt lɑːdʒ /	Đủ lớn
Limit(n)	/ ˈlɪmɪt /	giới hạn
tend to a limit	/ tend tuː eɪ ˈlɪmɪt /	tiến tới giới hạn
neighbo(u)rhood(n)	/ ˈneɪbəhʊd /	lân cận
sequence (n)	/ ˈsiːkwəns /	dãy
bounded sequence	/ baʊnd ˈsiːkwəns /	dãy bị chặn
convergent sequence	/ kənˈvɜːdʒ ˈsiːkwəns /	dãy hội tụ
divergent sequence	/ daɪˈvɜːdʒ ˈsiːkwəns /	dãy phân kì
unbounded sequence	/ ʌnˈbaʊndɪd ˈsiːkwəns /	dãy không bị chặn
Arithmetic sequence		Cấp số cộng
Geometric sequence		Cấp số nhân
Series(n)	/ˈsɪəriːz /	chuỗi
absolutely convergent series	/ ˈæbsəluːtli ˈsɪəriːz /	chuỗi hội tụ tuyệt đối
geometric series	/ ˌdʒiːəˈmetrɪk ˈsɪəriːz /	chuỗi hình học
Sum(n)	/ sʌm /	tổng
partial sum	/ˈpɑːʃl sʌm /	tổng riêng

Prime Numbers

An integer $a>1$ is a prime (number) if it cannot be written as a product of two integers $a,b>1$. If on the contrary, $n=ab$ for integers $a,b>1$, we say that n is a composite number. The list of primes begins as follows:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47, 53, 59, 61,\ldots$$

Note the presence of several "twin primes" (pairs of primes of the form $p, p+2$) in this sequence:

11, 13 17,19 29, 31 41,43 59,61

Two fundamental properties of primes – with proofs – were already contained in Euclid's Elements:

Proposition 1. There are infinitely many primes.

Proposition 2. Every integer $n\geq 1$ can be written in a unique way (up to reordering of the factors) as a product of primes.

Recall the proof of Proposition 1: given any finite set of primes $p_1,..., p_j$, we must show that there is a prime p different from cach p_i. Set $M = p_1...p_j$; the integer $N=M+1\geq 2$ is divisible by at least one prime p (namely, the smallest divisor of N greater than 1). If p was equal to p, for some to p_i for some $i=1,..., j$, then it would divide both N and $M = p_i(M/p_i)$, hence also $N-M=1$,which is impossible. This contradiction implies that $p\neq p_1,..., p_j$, concluding the proof.

The beauty of this argument lies in the fact that we do not need to know in advance any single prime, since the proof works even for $j=0$: in this case $N=2$ (as the empty product M is equal to 1, by definition) and $p=2$.

It is easy to adapt this argument proof in order to show that there are infinitely many primes of the form $4n+3$ (resp.. $6n+5$). It is slightly more difficult, but still elementary, to do the same for the primes of the form $4n+1$ (resp.. $6n+1$).

Questions About Prime Numbers

Q1. Given a large integer n (say, with several hundred decimal digits), is it possible to decide whether or not n is a prime?

Yes, there are algorithms for "primality testing" which are reasonably fast both in theory (the Agrawal-Kayal-Saxena test) and in practise (the Miller-Rabin test).

Q2. Is it possible to find concrete large primes?

Searching for huge prime numbers usually involves numbers of special form, such as the Mersenne numbers $M_n = 2^n - 1$ (if M_n is a prime, n is necessarily also a prime). The point is that there is a simple test (the Lucas-Lehmer criterion) for deciding whether M_n is a prime or not.

In practive, if we wish to generate a prime with several hundred decimal digits, it is computationally feasible to pick a number randomly and then apply a primality testing algorithm to numbers in its vicinity (having first eliminated those which are divisible by small primes).

Q3. Given a large integer n, is it possible to make explicit the factorisation of n into a product of primes? For example, $999999 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$.

At present, no (unless n has special form). It is an open question whether a fast "prime factorisation" algorithm exists (such an algorithm is known for a hypothetical quantum computer).

Q4. Are there infinitely many primes of special form?

According to Dirichlet's theorem on primes in arithmetic progressions, there are infinitely many primes of the form $an+b$, for fixed integers $a,b \geq 1$ without a common factor.

It is unknown whether there are infinitely many primes of the form n^2+1 (or, more generally, of the form $f(n)$, where $f(n)$ is a polynomial of degree $\deg(f) > 1$).

Similarly, it is unknown whether there are infinitely many primes of the form $2^n - 1$ (the Mersenne primes) or $2^n + 1$ (the Fermat primes).

Q5. Is there anything interesting about primes that one can actually prove?

Green and Tao have recently shown that there are arbitrarily long arithmetic progressions consisting entirely of primes.

Digit(n)	/ ˈdɪdʒɪt /	chữ số, hàng số
prime number (n)	/ praɪm ˈnʌmbə(r) /	Số nguyên tố
Twin primes	/ twɪn ˈnʌmbə(r) /	Số nguyên tố cùng nhau
progression	/ prə'greʃn /	Chuỗi
arithmetic progression	/ ə'rɪθmətɪk prə'greʃn /	Chuỗi số cộng
geometric progression	/ ˌdʒiːə'metrɪk prə'greʃn /	Chuỗi số nhân

Probability and Randomness

Probability theory attempts to describe in quantitative terms various random events

For example, if we roll a die, we expect each of the six possible outcomes to occur with the same probability, namely $\frac{1}{6}$ (this should de true for a fair die; professional gamblers would prefer to use loaded dice, instead).

The following basic rules are easy to remember. Assume that an event A (resp., B) occurs with probability p (resp., q).

Rule 1. *If A and B are independent, then the probability of both A and B occurring is equal to pq.*

For example, if we roll the die twice in a row, the probability that we get twice 6 points is equal to $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

Rule 2. *If A and B are mutually exclusive (= they can never occur together), then the probability that A or B occurs is equal to $p+q$.*

For example, if we roll the die once, the probability that we get 5 or 6 points is equal to $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

It tunrs out that human intuition is not very good at estimating probabilities. Here are three classical examples.

Example 1. The winner of a regular TV show can win a car hidden behind one of three doors. The winner makes preliminary choice of one of the doors (the “first door”). The show moderator then opens one of the remaining two doors behind which there is no car (the “second door”). Should the winner open the initially chosen first door, or the remaining “third door”?

Example 2. The probability that two randomly chosen people have birthday on the same day of the year is equal to $\frac{1}{365}$ (we disregard the occasional existence of February 29). Given $n \geq 2$ randomly chosen people, what is the probability P_n that at least two of them have birthday on the same day of the year? What is the smallest value of n for which $P_n > \frac{1}{2}$?

Example 3. 100 letters should have been put into 100 addressed envelopes, but the letters got mixed up and were put into the envelops completely randomly. What is the probability that no (resp., exactly one) letter is in the correct envelope?

See the next page for answers.

coin (n)	/ kɔɪn /	tiền bằng kim loại
toss [=flip] a coin	/ tɒs/ /kɔɪn /	ném, gieo đồng tiền bằng kim loại
die (pl. Dice)	/ daɪ/	quân súc sắc
fair [= unbiased] die	/ feə(r) daɪ/	quân súc sắc cân bằng
biased [= loaded] die	/ ˈbaɪəst daɪ/	quân súc sắc không đối xứng
roll [= throw] a die	/ rəʊl daɪ/	lăn một quân súc sắc
Head(n)	/ hed/	đầu, phần trên, phần trước, đề mục
Probability(n)	/ ˌprɒbəˈbɪləti/	xác suất
Random(a)	/ ˈrændəm/	ngẫu nhiên
randomly chosen	/ ˈrændəmli ˈtʃəʊzn/	chọn ngẫu nhiên
Tail(n)	/ teɪl/	đuôi, phần dư
with respect to [= w.r.t.]	/ wɪð rɪˈspekt tu/	đối với
Permutation(n)	/ ˌpɜːmju'teɪʃn/	Hoán vị, chỉnh hợp
Combination(n)	/ ˌkɒmbɪ'neɪʃn/	tổ hợp
Basic(a)	/ 'beɪsɪk/	Cơ sở
Count (v)	/ kaʊnt/	Đếm

Fundamental(a)	/ ˌfʌndə'mentl /	Cơ sở
Principle(n)	/ 'prɪnsəpl /	Nguyên lí, nguyên tắc
Row(n)	/ rəʊ /	Dãy
Adjacent(a)	/ ə'dʒeɪsnt /	Liên tiếp, liền kề
Integer(n)	/ 'ɪntɪdʒə(r) /	Số nguyên
Arrange(v)	/ ə'reɪndʒ /	Sắp xếp
Arrangement(n)	/ ə'reɪndʒmənt /	Sự sắp xếp, sự chỉnh hợp
Remain(v)	/ rɪ'meɪn /	Còn lại
Restriction(n)	/ rɪ'strɪkʃn /	Giới hạn
Without restriction	/ wɪ'ðaʊt rɪ'strɪkʃn /	Không có giới hạn
Mean (n)	/mi:n/	Trung bình
Arithmetic mean (n)	/ə'riθmətik/ /mi:n/	Trung bình cộng
Median (n)	/'mi:djən/	Trung vị
Mode (n)	/moud/	Mod
Range (n)	/reinddʒ/	miền giá trị
Average (n)	/'ævəriddʒ/	Trung bình

Answer to Example 1. The third door. The probability that the car is behind the first (resp,. the second) door is equal to $\frac{1}{3}$ (resp,. zero); the probability that it is behind the third one is, therefore, equal to $1-\frac{1}{3}-0=\frac{2}{3}$.

Answer to Example 2. Say, we have n people birthdays on the days $D_1, D_2, ..., D_n$. We compute $1-P_n$, namely, the probability that all the days D_i are distinct. There are 365 possibilitices for each D_i. Given D_1, only 364 possible values of D_2 are distinct from D_1. Given distinct D_1, D_2, only 363 possible values of D_3 are distinct from D_1, D_2. Similarly, given distinct $D_1, D_2, ..., D_{n-1}$, only 365 (n-1) values of D_n are distinct from $D_1, D_2, ..., D_{n-1}$. As a result.

$$1-P_n = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-(n-1)}{365}$$

$$P_n = 1-\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{365}\right).$$

One computes that $P_{22} = 0.476...$ and $P_{23} = 0.507...$

In other words, it is more likely than not that a group of 23 randomly chosen people will contain two people who share the same birthday!

Answer to Example 3. Assume that there are N letters and N envelopes (with $N \geq 10$). The probability p_m, that there will be exactly m letters in the correct envelopes is equal to

$$p_m = \frac{1}{m!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \pm \frac{1}{(N-m)!}\right)$$

(where $m! = 1 \cdot 2 \cdots m$ and $0! = 1$, as usual). For small values of m (with respect to N), p_m is very close to the infinite sum

$$q_m = \frac{1}{m!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots\right) = \frac{1}{e \cdot m!} = \frac{1^m}{m!}e^{-1}.$$

which is the probability occurring in the Poisson distribution, and which does not depend on the (large) number of envelopes.

In particular, both p_0 and p_1 are very close to $q_0 = q_1 = \frac{1}{e} = 0.368...$, which implies that the probability that there will be at most one letter in the correct envelope is greater than 73%!

depend on (v)	/ dɪˈpend ɒn/	phụ thuộc
(to be) independent of	/ ˌɪndɪˈpendənt əv/	độc lập của
Correspondence(n)	/ ˌkɒrəˈspɒndəns /	phép(sự) tương ứng
Transcendental(a)	/ ˌtrænsenˈdentl/	siêu việt

MỘT SỐ VẤN ĐỀ TRONG VIỆC SOẠN BÀI VÀ GIẢNG DẠY MÔN TOÁN BẰNG TIẾNG ANH

Nhóm biên soạn tài liệu tập huấn môn Toán

Tóm tắt

Báo cáo trình bày các kinh nghiệm cá nhân của nhóm biên soạn tài liệu tập huấn trong việc giảng dạy môn Toán bằng tiếng Anh. Các thành viên của nhóm là những giảng viên đại học, các giáo viên trung học đã có nhiều kinh nghiệm giảng dạy môn Toán bằng tiếng Anh trên lớp cũng như đã tham gia luyện thi các chương trình thi Toán vào các trường đại học ở nước ngoài (ví dụ như SAT, A-level,…). Các kinh nghiệm bao gồm việc chuẩn bị bài giảng, cách thức giảng bài, tương tác với sinh viên và các khó khăn trong việc giảng bài bằng tiếng Anh. Đối tượng mà báo cáo này chủ yếu hướng đến là những giáo viên trung học chưa từng, hoặc có rất ít kinh nghiệm trong việc giảng dạy môn Toán bằng tiếng Anh. Do vậy, báo cáo chỉ tập trung vào những kinh nghiệm rất cơ bản.

1. Mở đầu

Việc giảng dạy bản thân nó đã là một nghệ thuật. Một người thầy dạy giỏi không những cần có trình độ kiến thức chuyên môn giỏi mà còn cần một phương pháp truyền đạt, giảng dạy tốt, hợp lý, hấp dẫn để có thể truyền tải nhiều nhất lượng kiến thức tới học sinh và giúp học sinh nhận được nhiều nhất kiến thức có thể. Để thực hiện được điều này, đa số các thầy cô phải trải qua một thời gian đứng lớp để tìm ra cho mình một phương pháp, phong cách giảng dạy phù hợp nhất cho riêng mình. Tuy mỗi thầy cô có một phương pháp giảng dạy riêng nhưng đều phải tuân theo một số nguyên tắc cơ bản trong việc soạn và trình bày bài giảng. Giảng dạy bằng tiếng Anh cũng tương tự như vậy. Để thực hiện được các thầy cô cũng cần phải nắm một số nguyên tắc cơ bản rồi từ đó phát triển riêng cho mình một phương pháp phù hợp nhất đối với bản thân. Vì vậy, báo cáo này trình bày một số kinh nghiệm, nguyên tắc trong việc soạn và trình bày bài giảng bằng tiếng Anh.

Các kinh nghiệm trong báo cáo sẽ được trình bày thành ba phần. Phần đầu liên quan đến việc soạn giáo án. Phần thứ hai trình bày một số nguyên tắc cơ bản và các kinh nghiệm cá nhân trong việc trình bày bài giảng trên lớp. Phần này sẽ trình bày các bước cơ bản cần thực hiện trong một bài giảng và sẽ cung cấp cho các thầy cô các cấu trúc ngôn ngữ và các ví dụ để giúp các thầy cô có thể tự tin giảng bài bằng tiếng Anh trên lớp. Cuối cùng, báo cáo sẽ trình bày một số kinh nghiệm chia sẻ nói chung trong công việc giảng dạy Toán bằng tiếng Anh.

2. Thiết kế và chuẩn bị bài giảng

Thiết kế bài giảng là khâu rất quan trọng trong giảng dạy. Khi giảng dạy môn Toán bằng tiếng Việt thì chương trình môn học đã được chuẩn hóa và các giáo viên sẽ dạy theo chương trình chuẩn hóa này. Tuy nhiên, việc giảng dạy Toán bằng tiếng Anh hiện nay mới chỉ được thực hiện thí điểm tại một số trường, nên một chương trình chuẩn hiện tại chưa được xây dựng. Do đó, các giáo viên hiện nay có xu hướng là chọn một chương trình giảng dạy của một trường nào đó đã giảng dạy môn Toán bằng tiếng Anh để dùng làm chương trình giảng dạy cho lớp của mình. Việc làm này nói chung là khá thuận lợi và dễ dàng vì các chương trình giảng dạy Toán của các trường nước ngoài đã được xây dựng và chỉnh sửa trong thời gian dài nên khá là đầy đủ và tốt. Tuy nhiên, với mục tiêu là đưa việc giảng dạy bằng tiếng Anh vào môn Toán để học sinh vừa phát triển được ngoại ngữ lại vừa đảm bảo được chương trình môn học theo chuẩn của quốc gia, bởi vì học sinh vẫn phải thi tốt nghiệp và thi đại học theo chương trình của Việt Nam, các thầy cô sẽ phải soạn bài giảng của mình với nội dung không khác nhiều so với chương trình đang giảng dạy mà vẫn phải đưa vào được vấn đề ngôn ngữ và rèn cho học sinh tư duy theo kiểu Anh/Mỹ. Việc làm này sẽ là rất khó khăn cho những thầy cô mới làm quen với việc giảng dạy này. Tuy nhiên, để soạn được một bài giảng đủ tốt thì không phải là một việc không thể thực hiện được nếu các thầy cô thực hiện các công việc cần thiết.

Việc dạy học Toán bằng tiếng Anh hiện nay có nhiều mức độ và hình thức khác nhau. Có thể nói là có ba hình thức đang được vận dụng chủ yếu hiện nay:

Hình thức	Mức độ	Mục tiêu dạy học	Yêu cầu về tiếng Anh	Hoạt động giảng dạy
1	Dạy Toán bằng tiếng Anh dưới hình thức Câu Lạc Bộ.	Mục tiêu giúp giáo viên và học sinh cùng tiếp cận với việc sử dụng tiếng Anh trong môn Toán.	Tập trung vào việc làm quen với các thuật ngữ và cấu trúc câu hay sử dụng trong toán học cơ bản.	Đọc, dịch, các hoạt động nhằm ghi nhớ thuật ngữ và cấu trúc câu.
2	Dạy Toán bằng tiếng Anh đáp ứng nhu cầu học sinh thi chứng chỉ SAT của Mỹ.	Giúp học sinh đọc hiểu và sử dụng đúng thuật ngữ toán trong tiếng anh để giải đề chính xác nhất.	Các thuật ngữ và cấu trúc câu theo chuyên đề của toán học phổ thông. Đòi hỏi dịch và hiểu nghĩa chính xác trong các ngữ cảnh.	Đọc, dịch, thống kê thuật ngữ và cấu trúc câu theo chuyên đề ở mức độ cao.

3	Dạy Toán bằng tiếng Anh như một môn học.	Giáo viên và học sinh cùng sử dụng ngôn ngữ tiếng Anh để trao đổi và chiếm lĩnh tri thức Toán học đảm bảo hiểu đúng và đạt yêu cầu của BGD về nội dung khoa học.	Giáo viên và học sinh phải có khả năng giao tiếp bằng tiếng Anh và trình bày ý kiến bằng tiếng Anh.	Cấu trúc bài giảng như một giờ dạy toán tiếng việt, kết hợp với các hoạt động nhằm củng cố ngôn ngữ và kiến thức.

Sau đây là các bước tham khảo để soạn bài giảng thuộc hình thức thứ ba trong bảng trên.

Bước 1: Tìm đọc nội dung bài giảng tương tự bằng tiếng Anh để lọc ra các thuật ngữ chính, cấu trúc câu chính thường hay sử dụng trong nội dung đó.

Ở đây, tài liệu tốt nhất để tham khảo là các giáo trình chuẩn của các nước Anh, Mỹ, Úc, Singapore. Các giáo trình này sẽ cung cấp các thuật ngữ chuẩn và các định nghĩa chuẩn về mặt tiếng Anh để đưa vào giảng dạy.

Bước 2: Kết hợp nội dung của SGK tiếng Việt và tài liệu tiếng Anh để biên soạn tài liệu giảng dạy.

Với yêu cầu học sinh phải đảm bảo các kiến thức môn học để tham dự được các kì thi trong nước nên người dạy phải mất nhiều công sức hơn trong việc tổ chức các hoạt động hợp lý nhằm giúp học sinh ghi nhớ và sử dụng được thuật ngữ bằng tiếng Anh và làm quen được các dạng bài tập trong các kì thi của Việt Nam. Sách tiếng Anh cung cấp thuật ngữ, cấu trúc tiếng Anh chuẩn. Sách tiếng Việt cung cấp hệ thống bài tập nhằm đáp ứng nhu cầu thi cử. Kết quả của việc soạn bài là các sản phẩm như sau (một số hoặc tất cả tùy vào tính chất bài học: lý thuyết, luyện tập, thực hành…)

i. Hệ thống thuật ngữ và cấu trúc câu sử dụng trong bài học.
ii. Hệ thống bài tập đọc hiểu, điền khuyết các đoạn văn bằng tiếng Anh.
iii. Giáo án theo các bước lên lớp và thời gian cho mỗi bước lên lớp. Trong đó cần phải đưa ra được các hệ thống lý thuyết chuẩn về ngôn ngữ lấy từ các giáo trình chuẩn. Bên cạnh đó là hệ thống các câu hỏi để dẫn dắt người học chiếm lĩnh tri thức mới.
iv. Hệ thống bài tập dạng cơ bản để vận dụng các kiến thức nền tảng của bài học.
v. Hệ thống bài tập nâng cao đáp ứng việc thi cử.
vi. Hệ thống trò chơi kiểm tra và củng cố ngôn ngữ.
vii. Giao nhiệm vụ cho bài học kế tiếp.

Một số bài soạn giảng mẫu theo các hình thức dạy học khác nhau các thầy cô có thể xem trong tài liệu tập huấn.

3. Giảng bài trên lớp và vấn đề ngôn ngữ

Những kinh nghiệm trong phần này sẽ giúp các thầy cô có một bài giảng trên lớp bằng tiếng Anh đủ tốt. Tất nhiên, trước khi lên bục giảng thì các thầy cô đã phải nắm rõ nội dung mà mình sắp giảng dạy và đã biết được tất cả các thuật ngữ chuyên môn bằng tiếng Anh trong bài giảng. Do đó phần này sẽ tập trung vào các kinh nghiệm liên quan đến cấu trúc, trình tự bài giảng và đưa ra các cách trình bày bằng tiếng Anh tương ứng.

Một bài giảng tốt sẽ phụ thuộc vào một số yếu tố như là nội dung của bài giảng, cách diễn đạt và tâm lý của giáo viên. Sau khi đã chuẩn bị nội dung bài giảng tốt, chúng ta phải biết cách truyền đạt bài giảng đó một cách có hiệu quả nhất. Việc này phụ thuộc khá nhiều vào tâm lý của chúng ta khi đứng trên bục giảng. Nếu chỉ giảng dạy bằng tiếng Việt thì vấn đề tâm lý không phải là một vấn đề lớn đối với các thầy cô, là các giáo viên có rất nhiều kinh nghiệm đứng trên bục giảng. Tuy nhiên, việc giảng dạy bằng tiếng Anh lại là một vấn đề khác. Với những giáo viên trẻ mà không được đào tạo và làm việc ở nước ngoài thì chắc chắn sẽ không đủ tự tin với phát âm tiếng Anh của mình, điều này dẫn đến sự mất tự tin khi đứng trên bục giảng. Đối với các thầy cô đã có tuổi thì vấn đề ngôn ngữ lại càng trở nên khó khăn hơn. Ngay bản thân những thầy cô mặc dù được đào tạo tại nước ngoài nhưng những ngày đầu đứng trên bục giảng cũng không tự tin lắm về khả năng nói tiếng Anh của mình. Nhưng điều này hoàn toàn có thể được khắc phục nếu chúng ta thực hiện một số việc sau (dựa trên một số kinh nghiệm cá nhân). Thứ nhất là phải chuẩn bị bài giảng thật kỹ, thực hành cách trình bày những câu bằng tiếng Anh liên quan đến bài giảng trước. Dựa vào các bài giảng video mẫu của giáo viên nước ngoài tương tự như bài giảng của chúng ta, chúng ta có thể sửa lại cách phát âm một số từ theo chuẩn của Mỹ. Khi đã chuẩn bị kỹ bước này, lúc giảng bài chúng ta ban đầu hãy nói chậm và rành mạch. Không nên giảng bài nhanh quá vì khi đó học sinh có thể sẽ không hiểu một số thuật ngữ chuyên môn bằng tiếng Anh. Giải thích cặn kẽ các khái niệm và ban đầu nên dùng các cấu trúc ngữ pháp và từ ngữ đơn giản. Cách giảng bài chậm này sẽ giúp học sinh hiểu bài và nắm được các từ mới chuyên môn dễ hơn, do đó sẽ có hiệu quả hơn.

Phần tiếp theo sẽ trình bày các kinh nghiệm nói tiếng Anh trong một bài giảng. Trình tự của một bài giảng có thể được chia ra theo thứ tự như sau:

- Giáo viên vào lớp, ổn định lớp.
- Giới thiệu bài học, cấu trúc bài học.
- Đi vào các phần và các hoạt động chi tiết.
- Tổng kết lại bài học, giao bài tập và thông báo về nội dung bài học tiếp theo.

Sau khi ổn định lớp, các thầy cô sẽ giới thiệu nội dung của bài học hôm đó. Với phần giới thiệu nội dung chính của bài học, các thầy cô có thể dùng các câu ví dụ như sau:

- Today, we are going to study …
- Our topic today is …
- What I want to talk about today is …

- We are going to discuss …
- Today I am going to focus on …
- Today, I want to give you some background on ……..

Tiếp đến các thầy cô sẽ giới thiệu cấu trúc của bài học, các thầy cô có thể dùng các cách diễn đạt sau:

- First we'll look at … and then we'll look at …
- I'm going to cover … and then …
- We'll discuss a few examples of/types of …

Ví dụ 1

Good morning. It's nice to see you all. It looks like you are ready for the lesson, so let's get started. In today's lesson, I'll be talking about one of the special sequence called geometric progression. First, we'll look at some examples about G.P which is the short for geometric progression, then we'll learn about properties of G.P, and finally we'll solve some real-life problems relating to G.P.

Ví dụ 2

Hi everyone. Please take your seats so we can get started. Great. In today's lesson, we are going to look at some rules in trigonometric functions. More specifically, we'll be looking at the cosine rule and the sine rule. In the first half of the lesson, we will prove these two rules and then we will use these rules to solve some problems in the second half. Now, to help understand the proofs of these two rules, I want to review some important properties of the trig functions.

Ví dụ 3

Hi there, everyone. It's ten o'clock, so let's go ahead and get started. What I want to talk about this morning is the parametric equation of line. Now, why do I want to talk about the parametric equation of line? Well, for some complicated curves, it is not easy to find their Cartesian equations. To overcome this difficulty, luckily we could express the variables, says, x and y, as functions of some parameters. In this way, the curve is said to be defined parametrically. Alright, the lesson consists of three parts. First, we will …. Second, we will …. And finally we will….

Ví dụ 4

Greetings everyone. This morning we have an interesting topic. We're going to discuss the derivative of trig functions. That's right, … how to find the derivative of trig function and how to apply it to the problems. Are you ready? All right. First, we'll look at a couple of examples and then we'll go into the detail of …

Sau khi đã giới thiệu nội dung và cấu trúc của môn học, các thầy cô sẽ đi vào giảng bài và thực hiện các nội dung và hoạt động chi tiết. Trong phần này, các thầy cô sẽ phải dùng rất nhiều các thuật ngữ, cấu trúc tiếng Anh trong toán học. Để diễn đạt được các cấu trúc toán học bằng tiếng Anh, các thầy cô nên xem kỹ phần ***Mathematical English*** trong tài liệu tập huấn. Phần tiếp theo sau đây sẽ trình bày một số cấu trúc câu hay dùng để kết nối các phần nhỏ trong phần nội dung bài giảng.

Sau khi đã giới thiệu cấu trúc bài giảng, các thầy cô bắt đầu đi vào phần đầu tiên của bài giảng bằng cách diễn đạt ví dụ như sau:

- First let's look at …
- Let me start with …

Sau đó các thầy cô đi vào phần nội dung của phần đầu tiên đó. Sau khi hết ý/phần thứ nhất, các thầy cô chuyển tiếp sang phần tiếp theo bằng cách có thể nói:

- Next, let's talk about …
- Now let's move on to …
- Now, we are ready for (able to) ….

- With what we have discussed, we now have all necessary information to solve …
- Now that we've talked about ________, let's talk about …
- That's enough about _______. Let's go on to …

Ví dụ

Now, let me start with an interesting example about the interest paid by the bank into fix deposit accounts. The example is ________. To solve this problem, we must use formula of the general term of a geometric progression. So, let's go on to the first section which is about the definition of G.P.

Khi muốn định nghĩa một đại lượng nào đó, các thầy cô có thể nói:

- That is, …
- In other words …
- X, meaning …
- By X, I mean …
- What do I mean by X? Well, I mean …
- Let me define that: …
- The definition of that is …

Khi cần giải thích một vấn đề hay một thuật ngữ mới mà các thầy cô đưa ra, các thầy cô có thể dùng

- Let me explain …
- What I mean is …
- Let me show you what I mean …
- Let's look at how this works …

Ví dụ

Today, we are going to explore one of the applications of differentiation in the max-min problems. In this type of problem, we'll look specifically at the end points and the critical points of the function. Let me explain what I mean by critical points. By critical points, I mean the undefined points and the stationary points – the points at which the derivative of the function equals zero.

Trong bài giảng, khi đưa ra một kết quả hay ý kiến nào đó, các thầy cô đôi khi phải đưa ra những lập luận hay lý do của mình, hay đơn giản là bảo vệ ý kiến đó. Các thầy cô có thể nói:

- Let me tell you why …
- Let me give you an example …
- The reason is …
- This is because …
- I think …

Khi đưa ra một ví dụ, chúng ta có thể diễn đạt bởi

- For example, …
- Here are some examples: …
- Take X, for example…
- For instance, …
- …, such as, …
- Let me give you an example …

Ví dụ

There are some types of sequence that are useful and are used frequently in life, such as the arithmetic sequence, or geometric sequence. In the next lesson, we will study these two kinds of sequence.

Khi đặt tên cho một biến nào đó, chúng ta hay dùng cấu trúc: Let … be/denote….

- Let x be the distance from A to B.
- Let y denote the price of product X.

Khi phát biểu một định luật (law), định lý (theorem) chúng ta hay dùng cấu trúc sử dụng động từ states (phát biểu), ví dụ như:

- Let a, b, and c be the length of the legs of a triangle opposite angles A, B, and C. Then the law of cosine states that

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

- The Pythagorean Theorem states that for a right triangle with legs a, b, and hypotenuse c,

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Khi điều hành thảo luận nhóm, các thầy cô có thể sử dụng các câu sau:

- Is everybody ready to start?
- Let’s start with question number 1.
- Nam, do you want to begin?
- Hung, what do you think about that?
- Has everyone had a chance to speak?
- Any other comments?

- Thanks, everyone. Good discussion.

Trong lúc điều hành thảo luận trong lớp, khi muốn đưa ý kiến của mình, các thầy cô có thể sử dụng:

- In my opinion, …
- I think/feel …
- I noticed that …
- I think it was interesting that …
- … is really important because …

Để tổng kết lại một phần hoặc toàn bộ bài, các thầy cô có thể dùng

- So we have learned …
- Let's wrap up what we have studied today…
- Well, I have talked everything about …
- Ok, I gave/explained you two examples with the solutions, now let's take a look at them again and point out the important facts.

Sau khi kết thúc bài giảng, chúng ta nên thông báo cho học sinh biết về nội dung bài kế tiếp để các em có thể chuẩn bị trước. Các thầy cô có thể dùng

- Ok, that's all for today. Tomorrow, we will come back to this problem.
- Well, we have finished Chapter 3 today. In the next lesson, we will have a test for this chapter and we will move on to the Chapter 4 – Integration.

Một số chú ý thêm

Trong buổi đầu tiên giới thiệu môn học, hoặc khi các thầy cô dạy một topic cho một lớp mới thì các thầy cô có thể thông báo trước với cả lớp về việc liệu có thể học sinh ngắt lời các thầy cô để đặt câu hỏi hoặc yêu cầu giảng kỹ hơn phần các em chưa hiểu hay không. Đây là điều mà những người thuyết trình trước một số lượng lớn khán giả hay làm. Các thầy cô có thể quy ước:

- During the lecture/talk/presentation, you can interrupt me when there is anything you don't understand by making a small hand gesture or raising your hand. I am very willing to answer you questions.

- I would like to finish my lecture/talk/presentation first, so all the questions or comments are welcome at the end of the lecture.

Trong quá trình giảng bài, một trong những điều quan trọng là quan sát xem các em học sinh có hiểu bài hay không. Nếu có một vấn đề các thầy cô đang giảng mà có vẻ các em không hiểu, các thầy cô có thể dừng lại và hỏi "Do you get it?" hoặc "Got it?", hay là "Do you get the point?". Khi hết một phần nào quan trọng trong bài giảng, các thầy cô cũng có thể tạm dừng để xem các em học sinh có câu hỏi nào không. Khi đó các thầy cô đơn giản là dừng lại và hỏi "Any questions?" hoặc đơn giản là "Questions?".

Khi học sinh đặt câu hỏi hoặc trao đổi với giáo viên, nếu câu hỏi là dài hoặc các em khó diễn đạt bằng tiếng Anh nên nói chậm, các thầy cô có thể khuyến khích các em tiếp tục bằng cách nói những từ như "Uh huh", "Hmm", "Ok", "I see". Nếu chưa hiểu các câu hỏi của các em thì có thể hỏi "Could you repeat that?".

Trước khi trả lời câu hỏi chúng ta nên nói "That's a good question!" hoặc "I get your point.". Việc làm này sẽ khiến học sinh thấy câu hỏi của mình được tôn trọng và sẽ khuyến khích các em hỏi thêm.

Khi các thầy cô đặt câu hỏi cho các em và các em đưa ra câu trả lời, hoặc khi các em đưa ra các nhận xét liên quan đến nội dung môn học, nếu đồng ý với câu trả lời của các em thì chúng ta có thể nói "I agree with you." hay "That's a good point", hay là "You're right.". Nếu không đồng ý với câu trả lời thì chúng ta có thể nói "I don't agree with that …", hoặc là "I disagree with you.", hay "I have a different idea/point of view/answer." và trình bày ý kiến của mình.

Đôi khi, chúng ta sẽ phải sử dụng những từ đệm vào các câu diễn đạt ở trên lớp (small words or interjection) để làm chậm lại tốc độ truyền đạt với mục đích làm cho học sinh chú ý tới vấn đề mới sắp trình bày. Ví dụ như:

- Well, … I'd like to say something here.
- Um, … can I add something to that?
- So, … could I say something here?
- Alright, … let's go to the next problem.

4. Một số kinh nghiệm chia sẻ khác

- Một trong những văn hóa của việc học tại Mỹ mà chúng ta nên học tập đó là sự giao tiếp giữa giáo viên và học sinh. Khác với cách dạy truyền thống một chiều xảy ra trong rất nhiều lớp học ở Việt Nam, chúng ta nên tổ chức lớp học một cách mở và bình đẳng hơn. Chúng ta có thể thống nhất với học sinh là có thể ngắt lời giáo viên để hỏi bất cứ những vấn đề gì chưa hiểu hoặc là hỏi sau mỗi tiết. Tôi thì thích cách đầu tiên hơn vì tôi sợ khi học sinh không hiểu một vấn đề gì hoặc không hiểu một thuật ngữ gì thì sẽ làm ảnh hưởng đến toàn bộ bài giảng. Vì vậy tôi cho phép học sinh ngắt lời tôi và hỏi các vấn đề. Việc này tất nhiên có ảnh hưởng đến bài giảng nhưng lợi ích của nó quan trọng hơn: học sinh hào hứng với bài giảng và không khí trong lớp học sôi nổi và khuyến khích học sinh giao tiếp với thầy giáo nhiều hơn.

- Khác với các môn học khác, trong giờ dạy lý thuyết môn Toán, phấn trắng và bảng đen vẫn là sự lựa chọn tốt nhất. Học sinh sẽ chỉ hiểu được những vấn đề khó trong lý thuyết Toán bằng cách thông qua các biến đổi toán học được trình bày từng bước trên bảng và khi viết chúng vào vở. Với những vấn đề quan trọng và khó, đôi khi việc giảng bằng tiếng Việt cũng không phải dễ dàng để giúp các em hiểu được mấu chốt vấn đề, chứ không nói gì đến việc giảng bằng tiếng Anh. Do vậy, nếu cần thiết các thầy cô nên chuyển sang giảng bằng tiếng Việt những phần này. Các thầy cô đừng do dự làm việc này, nhất là khi giảng bài mà quan sát thấy đa số học sinh của lớp có vẻ chưa nắm được vấn đề đang được giảng, bởi vì suy cho cùng thì chúng ta vẫn đặt mục tiêu giảng dạy nội dung Toán là quan trọng nhất.

- Để một thầy cô bắt đầu thực hiện giảng bài bằng tiếng Anh đạt được chất lượng đủ tốt thì thầy cô đó phải trải qua việc soạn bài và thực hiện giảng dạy ít nhất là một năm liên tục. Do đó, trong năm đầu tiên, các thầy cô sẽ cảm thấy một gánh nặng tâm lý và các thầy cô phải nỗ lực luyện tập nhiều. Áp lực đó sẽ là như nhau đối với mỗi một bài học mới. Tuy nhiên, khi giảng lại bài học đó lần thứ hai, hoặc lần thứ ba sau đó một thời gian, các thầy cô sẽ thấy nó trở nên dễ dàng hơn rất nhiều. Và sau một số lần, các thầy cô sẽ thấy mình có thể giảng bài đó một cách tự nhiên gần như là giảng bài bằng tiếng Việt.

- Các bước giảng bài bằng tiếng Anh (cho giờ dạy lý thuyết)
  Bước 1: Giới thiệu thuật ngữ bằng tiếng Anh trong bài học và cấu trúc tiếng anh thường được sử dụng thông qua hình ảnh và đoạn văn bản bằng tiếng Anh về vấn đề liên quan đến bài học, phần này thường nên cho làm việc nhóm 2 người để người học hỗ trợ nhau và tiết kiệm thời gian. Việc làm này sẽ giúp người học ghi nhớ lâu hơn so với việc ta giới thiệu thuật ngữ và nghĩa bằng tiếng việt ngay khi bắt đầu bài học.

  Bước 2: Giới thiệu các khái niệm và tính chất toán học. Việc này nên kếp hợp với hình ảnh nhiều nhất có thể để người học có thể hiểu vấn đề mà không cần phải dịch ra tiếng Việt. Nếu khả năng người học chưa thể thành thạo ngôn ngữ thì người dạy nên trú trọng vào hệ thống câu hỏi dẫn dắt để người học trả lời và tìm ra được câu trả lời. Qua việc đặt câu hỏi người học cũng sẽ có điểm tựa để đưa ra câu trả lời và qua đó người học học cả cách đặt câu hỏi.

Bước 3: Đưa ra các bài tập cơ bản về việc xác định các đối tượng trong định nghĩa, tính chất, chưa đòi hỏi phải lập luận nhiều. Yêu cầu người học đưa ra đáp án bằng các câu trả lời đầy đủ.

Bước 4: Đưa ra các bài tập nâng cao dần theo yếu kiến thức của việc kiểm tra và thi cử. Bắt đầu bằng các phiếu trả lời điền khuyết để người học làm quen với cách viết ngôn ngữ.

Bước 5: Giao bài tập về nhà và nhiệm vụ của buổi học sau.

Trong thực tế, người dạy cần linh hoạt tùy vào khả năng ngôn ngữ của học sinh và của chính người dạy để có sự phù hợp, không gây ra tình trạng nhàm chán.

5. Kết luận

Nói chung thì việc giảng bài bằng tiếng Anh cũng không có gì khác biệt mấy so với cách mà chúng ta đang giảng bài bằng tiếng Việt. Chúng ta chỉ cần thay đổi và luyện tập một chút là hoàn toàn có thể giảng bài tốt đáp ứng được các yêu cầu hiện nay. Chúng tôi hy vọng những kinh nghiệm cá nhân được trình bày ở trong báo cáo này sẽ giúp ích được cho các thầy cô.

Phụ lục

Trong một giờ giảng dạy bằng tiếng Anh, thông thường sẽ phải trải qua các hoạt động như yêu cầu mọi việc trên lớp, đặt câu hỏi, bắt đầu / kết thúc bài học, thực hiện các hoạt động trong sách giáo khoa và trên bảng, điều khiển lớp học, động viên và khuyến khích học sinh. Với mỗi hoạt động có thể dùng rất nhiều mẫu câu khác nhau, linh hoạt, tùy tình huống.

Ví dụ như câu mệnh lệnh:
- Close your books.
- You say it, Mai.
- Answer it, somebody.

- Don't be quiet now.
- Just sit down and be qiuet.
- I want you to try exercise 1.

Yêu cầu (tương tự câu mệnh lệnh nhưng dùng ngữ điệu thấp hơn):
- Come here, please.
- Would you like to write on the board?
- Can/Could you say it again?
- Do you mind repeating what you said?

Gợi ý và thuyết phục (Suggesting and persuading):
- Let's start now.
- What about if we translate these sentences?
- You can leave question 1 out.
- There is no need to translate everything.

Câu hỏi (Questions):
- Do you agree with A?
- Can you all see?
- Are you sure?
- Do you really think so?

Bắt đầu bài học (Beginning of the lesson):
- Hurry up so that I can start the lesson.
- Is everybody ready to start?
- I think we can start now.
- I'm waiting for you to be quiet.
- What's the day today / What day is it today?

Kết thúc bài học (End of lesson):
- It's almost time to stop.
- I make it almost time. We'll have to stop here.
- All right, that's all for day.
- We'll finish this next time.
- We'll continue working on this chapter next time.

- Please re-read this lesson for Monday's.
- You were supposed to do this exercise for homework.
- There will bw a test on this next Monday.
- Remember your homework.
- See you again on Monday.
- Up you get.
- Off / out you go.

Khi giáo viên gây ra sai sót trong lớp học hoặc có việc bận phải ra ngoài, có thể xin lỗi học sinh bằng cách:
- Mind out of the way.
- Could I get past?
- I'll be back in the moment/
- Would you excuse me for a while?
- I'm sorry, I didn't notice it.
- I've made a mistake on the board.

Cảnh báo học sinh khi các em gặp sai lầm (trả lời sai, thiếu tôn trọng giáo viên):
- Be careful / Look out / Watch out.
- Mind / watch the step.
- You will be in detention next week.
- I'll send you to see the headmaster .

Hoạt động trong sách giáo khoa:
- Give out the books, please.
- Open your books at page 10.
- Turn to page 10, please.
- Has everybody got a book? / Does everybody have a book?
- Books put (out with you books) / Books away (away with your books).
- Take out books and open them at page 10.
- Look at exercise 1 on page 10.
- Turn back to the page 10.
- Have a look at the dialog on page 10.
- Stop working now.

- Put your pens down.
- Let's read the text aloud.
- Do you understand everything?

Làm việc nhóm:
- Work in twos / pairs.
- Work together with your friend.
- I want you go form groups. 4 pupils in each group.
- Get into groups of 4.
- Discuss it with your neighbor.

Làm việc trên bảng:
- Come out to board, please.
- Come out and write the word on the board.
- Take a piece of chalk and write the sentence out.
- Are these sentences on the board right?
- Anything wrong with sentence one?
- Everyone, look at the board, please.

Trên đây là một số câu học sinh thường dùng trong giờ học, các thầy cô tham khảo thêm.

- Excuse me. May I come in?
- Can you help me do this exercise?
- Could you speak more slowly, please?
- Can you lend me a pen?
- Can you repeat that please? I didn't understand.
- Have you done your homework?
- Sorry. I don't understand that.
- How do you say 'mesa' in English?
- Sorry, I can't remember your name.

- How do you spell 'table'?
- Can I share your book with you?
- What's the difference between 'do' and 'did'?
- Where's Angela today?
- I'm sorry, I've left my book at home.
- She's absent.
- Excuse me. I'm sorry I'm late.
- What page is it on?
- Can I leave a bit early today, please?
- Can you pass me that piece of paper, please?
- Can you explain that again, please?
- Do we have to work in pairs?
- I didn't have time to do my homework. I'm sorry.
- Who's going to start?
- It's time to go.
- Whose turn is it?
- See you next lesson.
- It's my turn now.
- Have a nice weekend.
- Sorry, can you say that again'!
- The same to you. Bye.
- Excuse me, that's my book.
- Have you finished? What do we have to do now?

The sine rule and the cosine rule

Teacher: Ta Ngoc Tri, B.Sc. (Maths), M.Sc. (Maths), M.Sc. (Maths Edu.), Ph.D. (Maths)

Vocabulary

Sine rule, Cosine rule (Sine law, Cosine law; or The law of sines, The law of cosines in American English);

Solving a triangle.

Prior Knowledge

Pupils should be confident in applying sine, cosine and tangent to problems in right-angled triangles, as covered in the previous lessons.

Lesson Objective

The sine rule, The cosine rule;

Use the sine rule, the cosine rule to solve triangles;

Use the sine rule, the cosine rule to solve problems

Apply the sine and cosine rules in solving different kinds of maths exercises.

Number(s) of 45-minute period: 2

Material: Geometry Grade 10 Textbook (pp. 46-60), Geometry Grade 10 Advanced Textbook (pp. 53-67), University Entrance Maths Exams, Internet

Warming up

Let be given a right-angled (right) triangle ABC with $A=90^0$. Denote by a, b and c the respective sides opposite to angle A, B and C as usual.

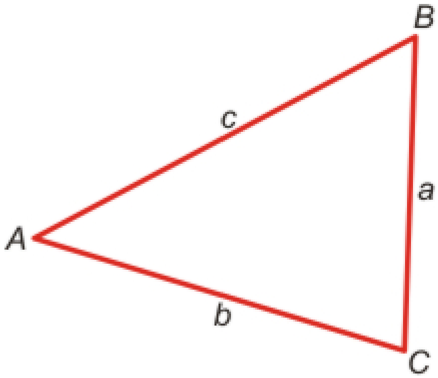
The trigonometric ratios of an angle are defined as

Sin A=?　　Tan A=?

Cos A=?   Cot A=?

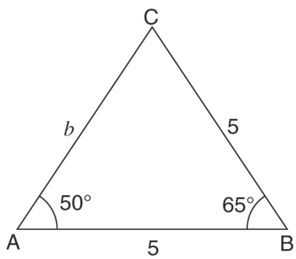
The Pythagoras' theorem is stated as $a^2 = b^2 + c^2$

Let be given a triangle ABC (oblique). Denote by a, b and c the lengths of three sides of Δ ABC, and by A, B and C the three interior angles of Δ ABC corresponding to a, b, and c, respectively. We have



Starter 1

Illustrate what is in effect the sine rule, from a specific example. Draw the triangle on the board. Ask pupils for ideas on how they might find the length of side *b*.



Start by asking why we cannot use sin, cos or tan in this case. (They can only be used in right-angled triangles.) Then suggest pupils consider what happens if we 'make' a right-angled triangle by dropping a perpendicular from vertex C. Now can pupils see how they might find the length of line AC?

Eventually this should lead to the appreciation that $b \sin 50 = 5 \sin 65$ and, therefore, that $\dfrac{b}{\sin 65} = \dfrac{5}{\sin 50}$.

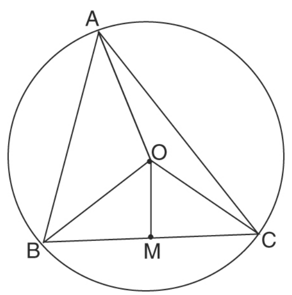
Point out that the equal ratios are the lengths of the sides multiplied by the sines of the opposite angles. Is this always true? Investigate by forming a general triangle and thus deriving the sine rule.

Handout 1 (proof for the sine rule)

The circumcircle is a triangle's circumscribed circle, the unique circle that passes through each of the triangle's three vertices. The centre O of the circumcircle is called the circumcentre, and the circle's radius R is called the circumradius. The complete sine rule is given by:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

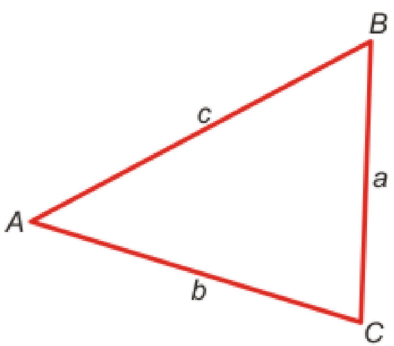
It can be proved as follows. Let O be the centre of the circumcircle of triangle ABC and let M be the midpoint of BC.



Then $\angle MOC = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2}(2\angle BAC) = \angle BAC$.

Therefore, $\sin A = \dfrac{MC}{OC} = \dfrac{\frac{a}{2}}{R}$ and so $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$. The complete sine rule then follows.

Handout



Given a triangle ABC.

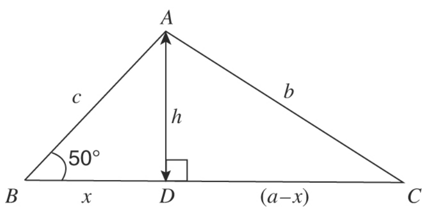
Then, we have the cosine rule as follows

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Proof. Consider the following triangle:



By Pythagoras' theorem we have $h^2 = c^2 - x^2$ and $h^2 = b^2 - (a - x)^2$.

Solving simultaneously we obtain $c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$.

Therefore $c^2 = b^2 - a^2 + 2ax$.

But $x = c \cos B$ and so $c^2 = b^2 - a^2 + 2ac \cos B$, or $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$.

From the symmetry of the triangle we can therefore deduce the three standard forms of the cosine rule:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Summary of activities

Teacher	Student
Warm up (see above)	Discuss with teachers
Starter 1 (see above)	Do with the teacher
Introduce the sine rule to students	Write the rule sine in the notebook
Explain and prove the rule	Work out the poof for the sine rule with the teacher
Introduce the cosine rule to students (Starter 2, in a handout)	Write the rule cosine in the notebook
Sketch some points about how to prove the rule	Note the ideas to prepare to work out the proof home

[1] Hanoi University of Technology
[2] International Mathematical Olympiads

Provide students with Worksheet 1(to solve triangles)	Work out the solutions and discuss with the teacher
Provide students with Worksheet 2 (to solve problem with the application of the cosine rule, one question in HUT[1] maths exam 2000).	Work out the solutions and discuss with the teacher
Give out the answer for the exercise in Worksheet 2 (in a separate paper)	Discuss the problem with friends and the teacher
Worksheet 3 (to solve problem with the application of the cosine rule, Problem 4 IMO[2] 1979).	
Summarise the lesson and provide students with homework	

Worksheet 1

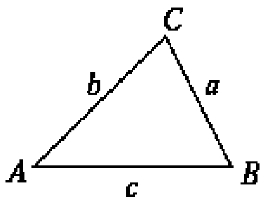
<u>Sine and Cosine Rule Questions</u>

In any triangle ABC

Area of triangle $= \frac{1}{2}ab \sin C$

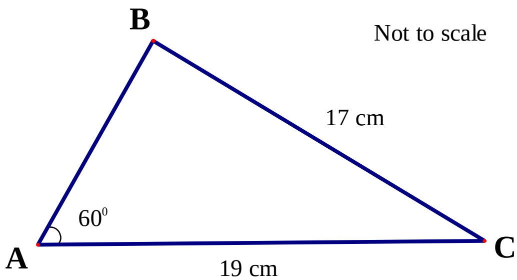
Sine rule $\quad \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

Cosine rule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$



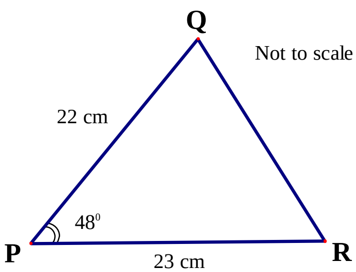
---

1. ABC is a triangle. $AC = 19$ cm, $BC = 17$ cm and angle $BAC = 60°$



Calculate the size of angle ABC.

2. PQR is a triangle. $PR = 23$ cm, $PQ = 22$ cm and angle $QPR = 48°$



Calculate the length of *QR*.

Give your answer to an appropriate degree of accuracy.

Worksheet 2:

Exercise (Question VI in HUT entrance Maths exam 1995)

Let be given an equilateral triangle ABC with its circumcircle centered at O. Take a point M on the small chord AB. Given MA=1, MB=2. Calculate MC=?

Solution.

Remark that angle $\angle AMB=120^0$. Using the cosine rule for the triangle AMB we have

$$AB^2= MA^2 + MB^2 -2\, MA\, MB \cos \angle AMB$$

$$= 1^2 + 2^2 - 2.\ 1.\ 2.\ \cos 120^0$$

$$= 7.$$

Denote MC=x, x>0. Obviously, $\angle AMC= 120^0$ the cosine rule once more time for the triangle AMC we get

$AC^2= MA^2 + MC^2 -2\, MA\, MC \cos \angle AMC$. Then,

$7 = 1^2 + x^2 - 2.1.x. \cos 60^0$.

Or, $x^2 - x - 6 = 0$ and we get $x = MC = 3$ since $x > 0$.

Worksheet 3

Exercise (Problem 4, IMO1979)

Given a plane ∏, a point P in the plane and a point Q not in the plane, find all points R in ∏ such that the ratio (QP + PR)/QR is a maximum.

Solution

Consider the points R on a circle center P. Let X be the foot of the perpendicular from Q to ∏. Assume P is distinct from X, then we minimise QR (and hence maximise (QP + PR)/QR) for points R on the circle by taking R on the line PX. Moreover, R must lie on the same side of P as X. Hence if we allow R to vary over k, the points maximising (QP + PR)/QR must lie on the ray PX. Take S on the line PX on the opposite side of P from X so that PS = PQ. Then for points R on the ray PX we have (QP + PR)/QR = SR/QR = sin RQS/sin QSR. But sin QSR is fixed for points on the ray, so we maximise the ratio by taking angle RQS = 90. Thus there is a single point maximising the ratio.

If P = X, then we still require angle RQS = 90, but R is no longer restricted to a line, so it can be anywhere on a circle center P.

Homework

A. Do all exercises in Geometry Grade 10 textbook (pp. 59-60)
B. Work out the worksheet below

1. Given an isosceles triangle ABC in which its side lengths a, b and c satisfying

$$\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}=a^2.$$

Prove that ABC is an equilateral triangle.

2. Assume that ΔABC with sides of a, b and c satisfying $a^4+b^4=c^4$. Prove that ΔABC is acute.

3. A triangle ABC has lengths of its sides given by $a=x^2+x+1$, $b=2x+1$ and $c=x^2-1$. Prove that ΔABC has one interior angle of 120^0.

4. Given ΔABC with CM as a median, $\angle ACM=\alpha$, $\angle BCM=\beta$. Prove that

a. $$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

b. Given α,β. Calculate A, B and C.

5. Solve the triangle ABC knowing that a=1, b=2 and $c=\sqrt{3}$.

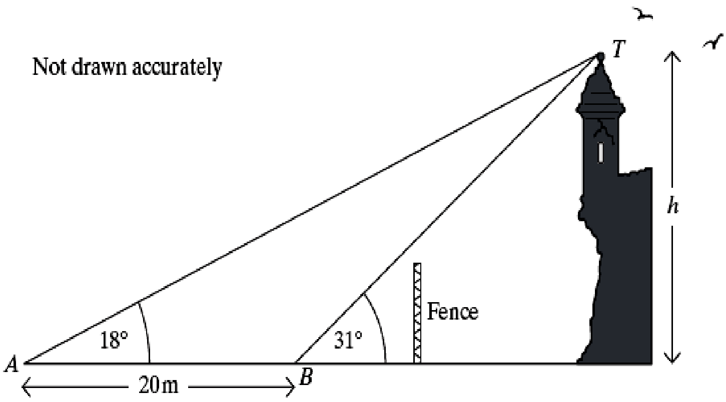
6. Given ΔABC with lengths of sides as a, b and c; area S. Its inscribed circle touches BC, CA and AB at A', B' and C', respectively. Assume that ΔA'B'C' has lengths of sides as a', b' and c'; area S'. Prove that

a. $$\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}=2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right)$$

b. $$\frac{S'}{S}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

7. A ruined tower is fenced off for safety reasons.

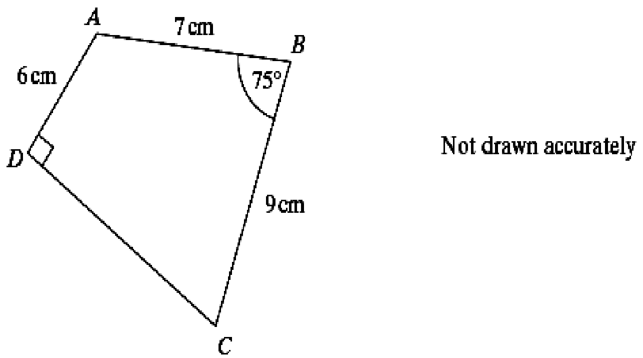
To find the height of the tower Rashid stands at a point *A* and measures the angle of elevation as 18°. He then walks 20 metres directly towards the base of the tower to point *B* where the angle of elevation is 31°.



Calculate the height, *h*, of the tower.

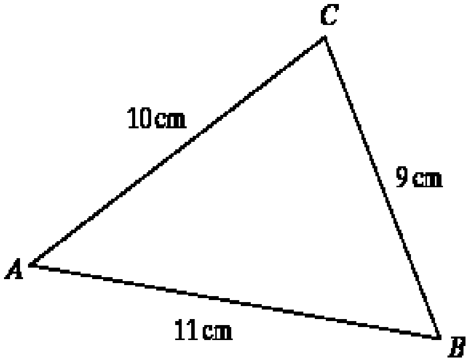
8. *ABCD* is a quadrilateral.

AB = 7 cm, *AD* = 6 cm and *BC* = 9 cm. Angle *ABC* = 75° and angle $\angle ADC$ = 90°



Calculate the perimeter of *ABCD*.

9. In triangle *ABC*, *AB* = 11 cm, *BC* = 9 cm and *CA* = 10 cm.



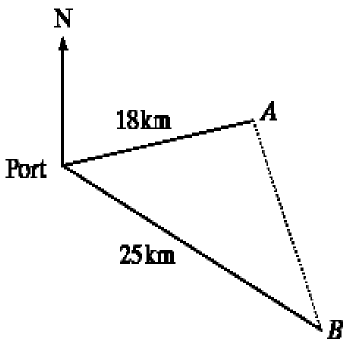
Not to scale

Find the area of triangle *ABC*.

10.Two ships, *A* and *B*, leave port at 13 00 hours.

Ship *A* travels at a constant speed of 18 km per hour on a bearing of 070°.

Ship *B* travels at a constant speed of 25 km per hour on a bearing of 152°.



Not drawn accurately

Calculate the distance between *A* and *B* at 14 00 hours.

Trig Derivative

Teacher: Ta Ngoc Tri, B.Sc. (Maths),
M.Sc. (Maths), M.Sc. (Maths Edu.), Ph.D.

Vocabulary: Derivative, trigonometric functions: sine, cosine, tangent and cotangent

1. Find the derivatives of four basic trigonometric functions
2. Differentiate functions which involve trigonometric functions
3. Can use the chain, the product and Quotient rules when using the trigonometric functions

Lesson Objectives

Number(s) of 45-minute period: 1

Materials: Algebra & Analysis Grade 11 Textbook (pp. 163-167), University entrance maths exams, Internet.

Prior Knowledge

A. Evaluate each of the following limits

1) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{6\theta}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(6x)}{x}$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{x}$ 4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

B. Given f(x)=x(x-1)(x-2)...(x-2013). Calcualte f'(0)=?

ANSWERS

1) $$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{6\theta}=\frac{1}{6}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{1}{6}(1)=\frac{1}{6}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(6x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin(6x)}{6x}=6\lim_{x\to 0}\frac{\sin(6x)}{6x}$$

$x\to 0 \qquad \theta\to 6(0)=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(6x)}{x}=6\lim_{x\to 0}\frac{\sin(6x)}{6x} \qquad \text{let } \theta=6x$$

$$=6\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta}$$

$$=6(1)$$

$$=6$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{\sin x}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{\sin x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.1=1.$$

$$4)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

LESSON PLAN:

***Introduction*:**

Basic trigonometric functions include sin(x), cos(x), tan(x) and cot x. Knowledge of differentiation from first principles is required, along with competence in the use of trigonometric identities and limits. All functions involve the arbitrary variable x, with all differentiation performed with respect to x. Knowing the derivatives of sin(x) and cos(x), one can easily compute the derivatives of the other circular trigonometric functions because they can all be expressed in terms of sine or cosine; the quotient rule is then implemented to differentiate this expression. Proofs of the derivatives of sin(x) and cos(x) are given in the proofs section; the results are quoted in order to give proofs of the derivatives of the other circular trigonometric functions

Main content

We've gotten this set of limit examples out of the way let's get back to the main point of this section, differentiating trig functions.

We'll start with finding the derivative of the sine function. To do this we will need to use the definition of the derivative. It's been a while since we've had to use this, but sometimes there just isn't anything we can do about it. Here is the definition of the derivative for the sine function.

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

Since we can't just plug in $h=0$ to evaluate the limit we will need to use the following trig formula on the first sine in the numerator.

$$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$$

Doing this gives us,

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x.$$

Differentiating cosine may be done in a similar fashion. However you may use the following trig formula $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$, then differentiate with the chain rule and the derivative of sine. Do it yourselves you should get,

$$(\cos x)' = -\sin x$$

With these two out of the way the remaining four are fairly simple to get. All the remaining four trig functions can be defined in terms of sine and cosine and these definitions, along with appropriate derivative rules, can be used to get their derivatives.

Let's take a look at tangent. Tangent is defined as,

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Now that we have the derivatives of sine and cosine all that we need to do is use the quotient rule on this. Let's do that.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(Recall that $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

The remaining three trig functions are also quotients involving sine and/or cosine and so can be differentiated in a similar manner. We'll leave the details to you. Here are the derivatives of all four of the trig functions.

Derivatives of the four trig functions:

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Conclusion: PRACTICE (Use worksheet)

Differentiate each of the following functions.

a. $\sin^6 x + \cos^6 x$

b. $\dfrac{1-\cos^2 x}{1+\sin x}$

c. $\tan^2 x - \cot^3 \dfrac{x}{2} + \sin x.\cos 3x$

HOMEWORK

Algebra & Analysis Grade 11 Textbook: Read texts and do all exercises (pp. 163-167); Additional Worksheet below.

Additional Worksheet

1. Given f(x)= $\frac{\sin^2 x}{x}, x \neq 0$ and f(0)=0. Calculate f'(0)=?

2. Let be given f(x)= $\frac{\log\cos x}{x}, x \neq 0$ and f(0)=0. Calculate f'(0)=?

3. Determine $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$ =?

LESSON PLAN

EQUATION OF CIRCLE

Prepared by: Nguyen Dac Thang, Math Teacher of Hanoi – Amsterdam High School

I. Lesson's objectives.

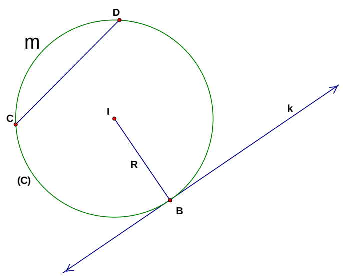
At the end of the lesson, the students will be able to:

- Recognize the equation of a circle (the standard form and the general form).
- Prove the equation of a circle.
- Find the equation of a circle with given conditions.
- Solve problems involving circles.

II.Subject Matter

- Reference: Geometry for High-school Textbook.
- Materials: Sheets of paper, Protractor, Puzzles.

III. Procedure

<table>
<tr><th>Time</th><th>Contents</th><th>Teacher and Students' activities</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. Introducing terms used in the lesson
(Hoạt động giới thiệu thuật ngữ sử dụng trong bài học).</td></tr>
<tr><td>5 mins</td><td>

(C): circle
I: center of the circle
B, C, D: points on the</td><td>T: Deliver the 1st worksheet to ask the students to fill in the name of objects in a given picture.

S: Work in pair to finish the task in 3 mins.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>circle

IB: radius of the circle (a line segment joining the center of the circle to any point on the circle itself; or the length of such a segment, which is half a diameter).

R: the length of the radius

k: tangent line of the circle (a straight line that touches the circle at a single point).

CD: chord (a line segment whose endpoints lie on the circle).

CmD: minor arc (connected part of the circle's circumference).

Line CD: Secant (an extended chord, a straight line cutting the circle at two points).</td><td>T: correct the answers.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Reading the passage to get acquainted with the language
(Hoạt động đọc giới thiệu ngôn ngữ sử dụng trong bài học).</td></tr>
<tr><td>5 min</td><td>Fill in the gaps using the</td><td>T: deliver the 2st</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>s</td><td>given words

(a word may be used one more time)

radius distance
tangent points

centre Common

A circle is the set of all …………(1) in a plane that are a given ……………(2) from a given point, the …………(3). The distance between any of the points and the centre is called the……………(4).

A……………(5) of a circle touches the circle at one point and the distance from the center of the circle to the tangent is equal to the radius of the circle.</td><td>worksheet to the students.

S: Work in pair to finish the task in 3 mins

T: correct the answer and take note some sentences that should learn by heart

“the distance from….to…..”

“to be equal to”</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Introduce the lesson
(Giới thiệu kiến thức bài học).</td></tr>
<tr><td>15 mins</td><td>Problem 1. In the coordinate plane, given a point I(a; b) and a positive real number R. On what conditions that</td><td>T: State problem

S: Find the solution to the problem</td></tr>
</table>

	the point M(x; y) is on the circle C(I; R) ? **Solution:** M is on the circle if and only if the distance from the point M to the point I is equal to R, that is $IM = R \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{IM}\right\| = R$ $\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$ $\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$ **I. Standard form of the equation of a circle** The circle with center I(a; b) and radius R is the set of all points (x; y) satisfying the equation $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$ **(1** The equation (1) is called the Standard form of the equation of a circle *Example 1*. Determine the coordinate of the center and the radius of a circle in the following cases: i. $(x-2)^2+(y+1)^2 = 3$	**Q:** What is the formulae to calculate the distance between two points? What is the coordinates of the vector IM? **T**. State the equation of a circle officially.

	ii. $x^2+(y+1)^2-4=0$ iii. $x^2+y^2-4x-2y+1=$ iv. $x^2+y^2-4x-2y+6$ Ans: i. I(2; - 1) ; R = $\sqrt{3}$ ii. I(0; - 1) ; R = 2. iii. Completing the square form of x and y, we obtain $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ Then I (2; 1) and R = 2. iv. $(x-2)^2+(y-1)^2=-1$, then this is not the equation of a circle. **Problem 2**. Given the equation $x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \quad (2)$	T. Deliver the 3rd worksheet. S. Finish the task individually. T. Correct the answer. Q. Convert the given equation to the standard form to identify the coordinates of the center and the radius in each cases. Q. Completing the squares and moving on the constant to the right.
	On what conditions does the equation (2) be the equation of a circle. In this case, determine the coordinates of the center and the formula to calculate the radius.	**S.** Convert the given equation to the standard form of equation. State the condition that the equation exist. Then,

	Solution: Write the left-hand side of the equation (2) in completed square form $(x-a)^2+(y-b)^2-a^2-b^2$ Moving on the constant to the right-hand side $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$ The equation (3) is in the standard form of a circle, the equation exits if and only if the right-hand side is positive, that is $a^2 + b^2 – c > 0$. In this case, the coordinates of the center are (a; b) and the radius is $\sqrt{a^2+b^2-c}$ **II. General equation of a circle** The equation $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ where $a^2+b^2-c>0$, is the general equation of a circle with center I(a; b) and the radius of the circle is R =	Identify the coordinates of the center and the length of the radius in this case. **T.** Correct the answer and state the general equation of a circle officially.

	$\sqrt{a^2+b^2-c}$	
4. Examples		
15 mins	***Example 1***. Given two points A(1; 2) and B(- 1; 4). Find the equation of the circle with the diameter AB. ***Ans:*** The center of the circle is the midpoint I of the segment AB, then the coordinates of I(0; 3) and the radius R = IA = $\sqrt{2}$. Hence, the equation of the circle with the diameter AB is $x^2 + (y-3)^2 = 3$ ***Example 2***. Given three points A(1;2); B(2;5); C(4;1). Find the equation of the circumcircle of the triangle ABC. ***Ans:*** $\overrightarrow{AB}\,(1;3)$; $\overrightarrow{BC}(2;\,-4)$; $\overrightarrow{AC}$ Notice that $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC} = 0$ then the triangle ABC is right triangle at A. Hence, the center of the circumcircle is the midpoint of the	**T.** Deliver the 4rd worksheet. **S.** Finish the task in 5 mins. **T.** Correct the answer. **Q**. What is the center of the circle? How to calculate the coordinates of the midpoint of a segment? Notice the character of the triangle? Locate the center of a right triangle.

	hypotenuse BC. So, the center I(3; 3) and the radius R = $\sqrt{5}$ and the equation of the circle is $$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 5$$ ***Example 3***. Find the equation of a circle which touches the x- and y-axes and passes through the point A(- 1; 3) ***Ans:*** Let I be the center of the circle with coordinates (a; b). The circle touches the x and y – axes that means d(I;Ox) = d(I; Oy) then |a| = |b| = R. Case 1: If a = b then we obtain the equation $$(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$$ The point A is on the circle then the coordinates satisfying the equation, then we have the equation $$(-1 - a)^2 + (3 - a)^2 = a^2$$ $$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 10 = 0$$ The equation has no roots in this case.	Under what condition that a line touches a circle?

	Case 2: If a = - b then the equation is $(x – a)^2 + (y + a)^2 = a^2$. The point A is on the circle then the coordinates satisfying the equation, we obtain the equation $(1 + a)^2 + (3 + a)^2 = a^2$ $\Leftrightarrow a^2 + 8a + 10 = 0.$ Solving this equation gives $a = - 4 \pm \sqrt{6}$. Therefore the solution is $(x + 4 + \sqrt{6})^2 + (y – 4 - \sqrt{6})^2 = (- 4 - \sqrt{6})^2$ $(x +4 - \sqrt{6})^2 + (y – 4 + \sqrt{6})^2 = (- 4 + \sqrt{6})^2$	
5. Summary the lesson		
4 mins	- Review the terms learned during the lesson through flashcards. - Summary the knowledge focus	
6. Homework		

1 mins	***Exercise 1:*** Find the equation of the circle (C) centered at I(1; 2) and tangent to the line (d) with the equation: $3x - 4y + 15 = 0$. ***Exercise 2:*** Find the equation of the circle (C) passing through three points A(- 2; 4); B(5; 5); C(6; - 2). ***Exercise 3:*** Given the circle (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ and the line (d): $x + 2y - 1 = 0$. Find the points of intersection of the line and the circle. ***Exercise 4:*** Let (C) be the circle with the center I on the line (d): $x + y - 1 = 0$. Given that the circle is tangent to the line (d’): $2x + y - 1 = 0$ and the distance from I to (d’) is 3. Find the equation of the circle.

LESSON PLAN

PARAMETRIC EQUATIONS OF A LINE

Prepared by: Nguyen Dac Thang, Math Teacher of Hanoi – Amsterdam High School

I. Lesson's objectives.

At the end of the lesson, the students will be able to:

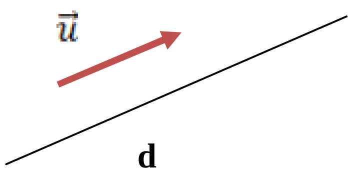
- Prove the parametric equations of a line.
- Identify the direction vector and the coordinates of points of a line with given equation.
- Find the parametric equations of a line with given conditions.
- Solve problems involving lines.

II. Subject Matter

- Reference: Geometry for High-school Textbook.
- Materials: Sheets of paper.

III. Procedure

T: teacher ; S: Student ; Q: questions; Ans: Answer ;

<table>
<tr><th>Time</th><th>Contents</th><th>Teacher and Students' activities</th></tr>
<tr><td colspan="3">7. Introduce the lesson
(Giới thiệu kiến thức bài học)</td></tr>
<tr><td>20 mins</td><td>I. Direction vector of a line

</td><td>T: State the definition of direction vector of a line.

Q: How many</td></tr>
</table>

	Definition: A non – zero vector $\vec{u}$ is a direction vector of a line *d* if the line containing *n* is parallel or coincident to *d*. **Notes:** - A given line has infinitely direction vectors which are collinear. (i.e: if $\vec{u}$ is a direction vector of a line d then k.$\vec{u}$ is also direction vector of the line (for any non – zero scalar k). - A non-zero vector $\vec{u}$ is a direction vector of infinitely parallel lines. - Given a point M and a direction vector $\vec{u}$, there is one and only one line passing through M and get $\vec{u}$ be direction vector. **Problem:** Given the line d passing through a point $M_o(x_o; y_o)$ and get a non-zero vector $\vec{u}$(a; b) be a direction vector. What is the condition for the point M(x; y) to lie on the line d? **Solution:** M $\in d$ iff $\overrightarrow{M_oM}$ and $\vec{u}$ are collinear, it means there exists a parameter t such that $\overrightarrow{M_oM} = t.\vec{u}$, then we have $(x - x_o; y - y_o) = t(a; b)$	direction vector does a line have? What is the relation between them? How many lines does a vector be direction vector of? Why? **S:** Answer all the questions. **T:** State the

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_o = at \\ y - y_o = bt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \end{cases}$$

II. Theorem

The point M(*x; y*) is on the line *d* if and only if there exists a number *t* such that

$$\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

The system above is called the parametric equations of the line d, and t is called the parameter.

Note:

- Each point on the line corresponds to exactly one value of t.
- By equating t values, we obtain the equation

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b}$$

We call this equation the Cartesian equation of the line.

- The gradient of the line : $\frac{b}{a}$

</td>
<td>

problem.

S: Find the solutions.

Q: What is the relation between $\overrightarrow{M_oM}$ and $\vec{u}$ if M lies on the line d?

Which vector equality can we deduce?

T: State the parametric equations of a line officially.

Q. How do we calculate the gradient of the line?

</td>
</tr>
</table>

8. Examples		
20 **mins**	***<u>Example 1</u>:*** Given a line *d* in the form of parametric equations $$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$ and a point M(- 3 ; 6) a) State the coordinates of a direction vector of *d* and two points on *d*. Explain? b) Find the parametric equations of the line d_1 passing through the point M and being parallel to the line *d*. c) Convert to Cartesian form. ***Ans:*** a) A direction vector of d is $\vec{u}$ (3; 5) To obtain the points on the line d, we substitute t by a real number. Let t = 1, we get the point (5; 1) Let t = 0, we get the point (2; - 4). b) Two parallel line have direction vectors in common, then a direction vector of d_1 is (3; 5). Because the line d_1 passes through the point M then the parametric equations of the line d_1 is	**T:** Deliver the worksheet containing with problems. **S**: Find the solution to the problem.

	$\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 6 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ c) The Cartesian form of the line $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5}$ ***Example 2***: Find the parametric equations of the line d passing through the points A(1; 2) and B(2; - 1). ***Ans:*** The line d passing through the points A and B then it has direction vector $\overrightarrow{AB}$(1; -3). Then the parametric equations of the line d is $\begin{cases} x = 1 + 1t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ ***Example 3:*** Given the line point A(1; 2) and the d: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Let H be the foot of the perpendicular from A to d. Find the coordinates of H. ***Ans:*** H is on the line d, then H(2 + 3t; 4 - t). Hence, $\overrightarrow{AH}(1+3t; 2-t)$. $\vec{u}(3; -1)$ is the direction vector of the line. H is the foot of the perpendicular from A then $\overrightarrow{AH}$ and $\vec{u}$ are perpendicular,	**T:** Is the parametric equations form of a line unique? Why? **Q:** What is the coordinates of the point H when H lies on the line d? What is the relation

<table>
<tr>
<td></td>
<td>hence
$\overrightarrow{AH}$.
$\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 3(1+3t)-(2-t)=0 \Leftrightarrow 10t+1=0 \Leftrightarrow t =$
Substituting $t = \frac{-1}{10}$ into the parametric equations we obtain the foot of the perpendicular $\left(\frac{17}{10};\frac{41}{10}\right)$
Note: AH is also the shortest distance from A to the line d.</td>
<td>between $\overrightarrow{AH}$ and $\vec{u}$?

What equation can we deduce?</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">9. Wrap up activities
Hoạt động tích hợp củng cố ngôn ngữ, thuật ngữ bài học.</td>
</tr>
<tr>
<td>4 mins</td>
<td colspan="2">Read the following passage and find out one of the application of parametric equation.

Typical, high school pre-calculus and algebra courses only discuss parametric equations lightly and focus on the fundamental functions (polynomials, exponentials, trig, etc.) and this is a perfectly reasonable approach. However, when it comes time to use our mathematical toolbox on real applied problems, parametric equations naturally arise. Particularly when the we encounter motion for which the location is a function of time. For many of these scenarios, it is easier and much more useful to have the coordinates x and y given as separate functions of time (and this will be even more useful as we go to 3 dimensions in Math 126). The basic facts we have so far (after our lecture on 10.1) are as follows:

1. If $x = x(t)$ and $y = y(t)$, then we can graph the parametric curve in the (x, y) plane by:

• Selecting various values of t and calculating x and y. Then plot these points (x, y) and indicate the direction of increasing time.

• Attempting to eliminate the parameter by either solving for t in one equation and using this to replace t in the other equation or using some identity (likely the trig identity $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$) to combine the equations and eliminate the parameter. If we in fact eliminate the parameter to get an equation in terms of x and y, then that equation represents the path of curve (but this equation doesn't contain any time information so we still have to go back to the parametric equations to plot some points and indicate direction).

http://www.math.washington.edu/~aloveles/Math124Winter2013/m124ParametricEquationsIntro.pdf</td>
</tr>
</table>

10. Homework	
1 mins	***Exercise 1:*** Find the parametric equations of the line which passing through (3; - 4) and is parallel to the line {x = 1 + 2t; y = 2 – t} ***Exercise 2:*** (k; 4) lies on the line with parametric equations {x = 1 – 2t; y = 1 + t}. Find k. ***Exercise 3:*** Given the line {x = 2 + t ; y = 1 – 2t} and the point A(1; 1). Prove that A doesn't lie on the line and find the coordinates of the foot of perpendicular of A on d. ***Exercise 4:*** Yacht A moves according to $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ Where the distance units are kilometers and the time units are hours. Yacht B moves according to $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -8 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ a. Find the initial position of each yacht. b. Show that the speed of each yacht is constant and state the speeds. c. If they start at 6:00am, find the time when the yachts are closest to each other. d. Prove that the paths of the yachts are right angles to each other.

LESSON PLAN

Tran Thanh Tuan – Hanoi University of Science

<table>
<tr><td colspan="2">Lesson Title :Geometric Sequences
Course: A-level Date: 07/2013
Lesson: 6
Textbook: Hugh Neil and Douglas Quadling, Advanced Mathematics-Core 3&4.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Process Standards:
6 Geometric Sequences or Geometric Progressions(G.P.)
6.1. Geometric sequences
6.2. Summing geometric series
6.3. Convergent geometric series
6.4. Using sigma notation</td></tr>
<tr><td colspan="2">Lesson Objective(s):
- Recognize geometric sequences and be able to do calculations on them.
- Know and be able to obtain the formula for the sum of a geometric series.
- Know the condition for a geometric series to converge, and how to find its limiting sum.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Language Objectives:
- Listen terms of geometric sequences and their definition.
- Use these terms in problems.
- Present solutions to get used to using new terms.</td></tr>
<tr><td>Skill Focus:
Solve problems relating G.P.</td><td>Vocabulary Focus:
Terms; Sequences; Series; G.P.; Common ratio; First term; Convergence.</td></tr>
</table>

PROCEDURE

Review: sequences, arithmetic sequences.

Outline of the lesson:

- Study two first sections of the topic.

- Learn to know about geometric series and summing geometric series through some examples.

- Practice doing problems.

Recap the lesson, hand out assignment, and talk briefly the content of the next.

6.1 Geometric sequences

In the last lecture, we studied arithmetic sequences, in which you get from one term to the next by adding a constant. A sequence in which you get from one term to the next by multiplying by a constant is called a **geometric sequence**.

Example 1

Show that the numbers 4, 12, 36, 108 form a geometric sequence. If the sequence is continued, find

(a) the next two terms, (b) the twentieth term.

Solution:

Since

$$12 = 3 \times 4, \quad 36 = 3 \times 12, \quad 108 = 3 \times 36,$$

there is a constant multiplying factor of 3. So the numbers form a geometric sequence.

(a) The next term is 3x108=324, and the term after that is 3x324=972.

(b) To get from the first term to the twentieth you have to multiply by 3 nineteen times. So the twentieth term is 4×3^{19}. Correct to 4 sifnificant figures, this is 4649 million.

Example 2

The first two terms of a geometric sequence are 4, 20 and the last term is 62500. How many terms are there altogether?

Solution:

To get from the first term to the second you must multiply by $\frac{20}{4} = 5$.

To get from the first term to the last you must multiply by $\frac{62500}{4} = 15625$, which is 5^6.

So, going one step at a time, you start at the first term and then multiply by 5 six times. This means that 62500 is the seventh term of the sequence.

A general definition for this kind of sequence is:

A **geometric sequence**, or **geometric progression**, is a sequence defined by $u_1 = a$ and $u_{i+1} = ru_i$, where $r \neq 0$ or 1, and $i = 1, 2, 3, \ldots$

The constant r is called the **common ratio** of the sequence.

You should notice two points about this definition. First, since the letter r is conventionally used for the common ratio, a different letter, i, is used for the suffixed.

Secondly, the ratios 0 and 1 are excluded. If you put $r = 0$ in the definition you get the sequence $a, 0, 0, 0, \ldots$; if you put $r = 1$ you get $a, a, a, a, \ldots$. Neither is very interesting, and some of the properties of geometric sequences breaks down if $r = 0$ or 1. However, r can be negative; in that case the terms are alternatively positive and negative.

It is easy to give a formula for the *i*th term. To get from u_1 to u_i you multiply by the common ratio $i-1$ times, so $u_i = r^{i-1} \times u_1$, which gives $u_i = ar^{i-1}$.

The *i*th term of a geometric sequence with first term a and common ratio r is ar^{i-1}.

Example 3

The first two terms of a geometric sequence are 10 and 11. Show that the first term greater than 1000 is the fiftieth.

Solution:

The common ratio is $11 \div 10 = 1.1$. The *i*th term of the sequence is therefore $10 \times 1.1^{i-1}$.

Each term of the sequence is greater than the preceding term. You therefore have to show that the 49th term is less than 1000, and that the 50th term is greater than 1000.

The 49th term is $10 \times 1.1^{49-1} = 10 \times 1.1^{48} = 970.17\ldots$.

The 50th term is $10 \times 1.1^{50-1} = 10 \times 1.1^{49} = 1067.18\ldots$.

So the first term greater than 1000 is the fiftieth.

Example 4

Show that there are two geometric sequences whose first term is 5 and whose fifth term is 80. For each of these sequences, find the tenth term.

Solution:

Since the first term is given, the sequence is determined by knowing the common ratio r. The fifth term is $5 \times r^{5-1} = 5 \times r^4$.

If $5 \times r^4 = 80, r^4 = 16,$ so $r = \pm 2$.

The two sequences are 5, 10, 20, 40, 80, …. and 5, -10, 20, -40, 80, ….

The tenth term is $5 \times r^{10-1} = 5 \times r^9$.

So when $r = 2$, the tenth term is $5 \times 2^9 = 5 \times 512 = 2560$; when $r = -2$, the tenth term is $5 \times (-2)^9 = 5 \times (-512) = -2560$.

Handout: Homework

(C2-6.1) Name:

Homework Questions – Geometric Sequences

1. For each of the following geometric sequences find the common ratio and the next two terms.

a) 3, 6, 12, …

b) 2, -6, 18, -54, …

c) 32, 16, 8, …

d) $x^2, x, 1, \ldots$

2. Find the expression for the ith term of each of the following geometric sequences

a) 2, 6, 18, …

b) 81, 27, 9, …

c) 1, -2, 4, …

d) $x, x^2, x^3, \ldots$

3. Find the number of terms in each of these geometric progressions.

a) 2, 4, 8, …, 2048

b) 5, -10, 20, …, -40960

c) 2, 6, 18, …, 1458

d) $x^{-6}, x^{-2}, x^2, \ldots, x^{42}$

4. Find the common ratio and the first term in the geometric progressions where

a) The 2^{nd} term is 4 and the 5^{th} term is 108

b) The 3^{rd} term is 6 and the 7^{th} term is 96

c) The 4^{th} term is 19683 and the 9^{th} term is 81

d) The 3^{rd} term is 8 and the 9^{th} term is 64

5^*. Different numbers x, y and z are the first three terms of a geometric progression with common ratio r, and also the first, second and fourth terms of an arithmetic progression.

a) Find the value of r.

b) Find which term of the arithmetic progression will next be equal to a term of the geometric progression.

6*. Different numbers x, y and z are the first three terms of a geometric progression with common ratio r, and also the first, second and fifth terms of an arithmetic progression.

a) Find the value of r.

b) Find which term of the arithmetic progression will next be equal to a term of the geometric progression.

LESSON PLAN

Tran Thanh Tuan – Hanoi University of Science

<table>
<tr><td colspan="2">

Lesson Title : **Application of Differentiation: Related Rates**

Course: A-level Date: 07/2013

Lesson:

References:

- A-level lecture notes.
- Calculus lecture notes (MIT).

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Process Standards: Connected Rates of Change

- Rates of Change, Chain Rule.
- Related Rates.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Lesson Objective(s):

- Review chain rule in taking derivative.
- Application of Differentiation: Solve problems in which there are two quantities whose rates of change are related.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Language Objectives:

- Review terms in differentiation. Learn new terms in related rates problems.
- Use these terms in problems.
- Present solutions to get used to using new terms.

</td></tr>
<tr><td>

Skill Focus:

- Chain rule
- Solving related rates problems.

</td><td>

Vocabulary Focus: Chain rule, rates of change, related rates.

</td></tr>
</table>

PROCEDURE

Review: chain rule, rates of change.

Outline of the lesson:

- Consider one or two introductory examples involving related rates.
- Learn how to solve this type of problems. Give the general strategy in solving related rates problems.
- Practice doing problems.

Recap the lesson and talk briefly the content of the next.

Connected Rates of Change: Use of the Chain Rule

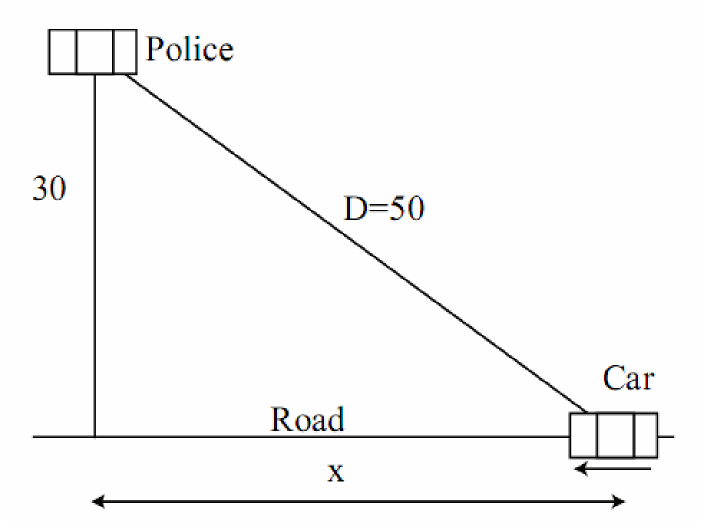
Consider one or two following introductory examples.

Introductory example 1

Police are 30 feet from the side of the road. Their radar sees your car approaching at 80 feet per second when your car is 50 feet away from the radar gun. The speed limit is 65 miles per hour (which translates to 95 feet per second). Are you speeding?

Solution:

First, draw a diagram of the setup.



Next, give the variables names. Let D be the distance between the police and the car and x be the distance from the car to the foot of the altitude from the police to the road. The important thing to figure out to solve this kind of problem is which variables are changing.

In this kind of problems, it is important to follow the following steps:

Step 1: first of all write down mathematically what information we are told and what we want to find out.

- We are **told** the **rate** at which your car is approaching to the police, i.e. we are **told** $\frac{dD}{dt}$.

Note that at $D = 50$, $\frac{dD}{dt} = D' = -80$. D' is negative because the car is moving in the $-x$ direction.

- We **want** to find the **rate** at which the car is moving on the road, i.e. we **want** $\frac{dx}{dt}$.

Step 2: We then use the chain rule to link what we are told with what we want:

Here: $$\underbrace{\frac{dD}{dt}}_{\text{told}} = \underbrace{\frac{dD}{dx}}_{\substack{\text{linking}\\ \text{term}}} \times \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\text{want}}$$

Step 3: Find an expression for the linking term

Notice that we can find an expression for the linking term $\frac{dD}{dx}$ by differentiating $D = \sqrt{30^2 + x^2}$, which is the Pythagorean theorem when in the form $30^2 + x^2 = D^2$.

We obtain $\frac{dD}{dx} = \frac{x}{\sqrt{30^2 + x^2}}$.

So our linking equation becomes: $\frac{dD}{dt} = \frac{x}{\sqrt{30^2 + x^2}} \times \frac{dx}{dt}$.

Step 4: substitute numerical values into the linking equation

We are told that $\frac{dD}{dt} =$-80 and that x = 40 (since $D = 50$). Therefore:

$$-80 = \frac{40}{50} \times \frac{dx}{dt}$$

i.e. $\frac{dx}{dt} = -\frac{80 \times 50}{40} = -100$ feet per second.

This exceeds the speed limit of 95 feet per second; you are, in fact, speeding and will get a ticket.

The second solution (using implicit differentiation)

The Pythagorean Theorem says

$30^2 + x^2 = D^2$.

Differentiate this equation with respect to time (implicit

differentiation):

$$\frac{d}{dt}\left(30^2 + x^2 = D^2\right) \Rightarrow 2xx' = 2DD' \Rightarrow x' = \frac{2DD'}{2x}.$$

Now, plug in the instantaneous numerical values:

$x' = -\dfrac{80 \times 50}{40} = -100$ feet per second.

Introductory example 2

In a timing device, sand falls through a small hole to form a conical heap. As the cone forms, the height, h cm, remains equal to the base radius, r cm, of the heap.

a) The volume of the sand after t minutes is V cm^3. Explain why $V = \frac{1}{3}\pi h^3$.

b) The sand falls through the hole at a rate of 3 cm^3 per minute. Find the rate at which the height of the heap is increasing at the instant when $h = 2$. Give your answer to 2 significant figures.

Solution:

a) Recall that the volume of a cone is $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Since we know here that $r = h$, the volume can be expressed as $V = \frac{1}{3}\pi h^2 h = \frac{1}{3}\pi h^3$.

b)

Step 1: first of all write down mathematically what information we are told and what we want to find out.

- We are **told** the **rate** at which sand falls through the hall, i.e. we are told $\frac{dV}{dt}$.

(note the clue is in the units **cm³ per minute**).

- We **want** to find the **rate** at which the **height** increases, i.e. we want $\frac{dh}{dt}$.

Step 2: We then use the chain rule to link what we are told with what we want:

Here: $$\underbrace{\frac{dV}{dt}}_{\text{told}} = \underbrace{\frac{dV}{dh}}_{\substack{\text{linking}\\\text{term}}} \times \underbrace{\frac{dh}{dt}}_{\text{want}}$$

Step 3: Find an expression for the linking term

Notice that we can find an expression for the linking term $\frac{dV}{dh}$ by differentiating $V = \frac{1}{3}\pi h^3$.

We get $\frac{dV}{dh} = \pi h^2$.

So our linking equation becomes: $$\frac{dV}{dt} = \pi h^2 \times \frac{dh}{dt}.$$

Step 4: substitute numerical values into the linking equation

We are told that $\frac{dV}{dt} = 3$ and that h = 2. Therefore:

$$3 = \pi \times 2^2 \times \frac{dh}{dt}$$

i.e. $\frac{dh}{dt} = \frac{3}{4\pi} = 0.24$ cm per minute (correct to specified accuracy)

Examination question 1

At a time t minutes, a circular puddle has radius r cm and area A cm^2.

a) Find $\frac{dA}{dr}$ in terms of r.

b) The radius is increasing at a rate of 3 cm per minute. Find the rate at which the area is increasing at the instant when the radius is 50cm.

Solution:

a) The formula for the area of a circle is ……………… . Therefore $\frac{dA}{dr} =$

b) Follow the steps given in the previous example.

Step 1: You are told …

You want to find …

(remember to look at the units for clues).

Step 2: The linking equation, using the chain rule is:

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{told}} = \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{linking term}} \times \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{want}}$$

Step 3: In part (a) we had an expression for $\frac{dA}{dr}$. Therefore $\frac{dr}{dA} =$ (the reciprocal)

Step 4: Substitute in the numerical values $\frac{dr}{dt} = 3$ and r = 50:

> **Further examination style question:**
>
> The volume of a spherical balloon is decreasing at a rate of 25cm^3/s.
>
> Find the rate at which the radius is decreasing at the instant when the radius of the balloon is 2cm. Give your answer correct to 2 significant figures.

The formula relating to volumes of spheres is: V =

Differentiate this:

Told the value of $\frac{d}{d}$, which is -25

Want to find $\frac{d}{d}$.

The linking equation is:

$$\underbrace{\qquad}_{\text{told}} = \underbrace{\qquad}_{\text{linking term}} \times \underbrace{\qquad}_{\text{want}}$$

The linking term is …

Substitute in gives:

LESSON PLAN

(by Chu Thu Hoàn- GV PT Chuyên ngữ, ĐHNN-ĐHQG HN)

Lesson Title: Permutations and Combinations

Course: Mathematics **Date:** 07/2013 **Lesson:** 6

Process Standards:

6.1. Permutations

6.2. Combinations

6.3. Examples

6.4. Exercises

Academic Standards:

Standard 1 – Counting Techniques

Students develop an understanding of combinatorial reasoning, using various types of diagrams and the fundamental counting principle to find numbers of outcomes and related probabilities. They also use simulations to solve counting and probability problems.

Performance Objectives:

After today's lesson the students will solve problems by applying permutations and combinations with 80% accuracy on the daily assessment homework assignment. Permutations and combinations will also be on a paper and pencil test that will be assessed at the end of the chapter. Students should also recognize when to use permutations or combinations instead of the other counting techniques when solving a problem.

Assessment:

When the students walk into the classroom there will be a daily assessment or homework assignment written on the board. This assignment will be due at the beginning of the next class. The goal of the daily assessment is to give extra practice and test the knowledge and understanding of the lesson of that day. In the homework assignment the students will be applying permutations and combinations to solve various problems. This will help give the teacher feedback to where the students are at. There middle of the chapter to help test the students overall knowledge of the lessons.

Advanced Preparation by Teacher:

The teacher should be prepared to teach the lesson and have all the accommodation ready for the gifted and talented students. The teacher should have the agenda, homework assignment, and bell ringer ready when students come to class. The teacher should already have the groups divided out on paper for when the teacher chooses groups. The teacher should have all the examples ready when students come to class, with appropriate solutions.

Essential Questions:

Some questions on the SAT begin: **“How many...”.**

Skill Focus:	**Vocabulary Focus:**
Use the Fundamental Counting principle permutations to count	Permutation, Combination, counting principle

Procedure:

Introduction:

When the students come to class the teacher should have already prepared a bell ringer activity that the students should begin when they arrive. The bell ringer should involve the pigeonhole principle since that is what the last lesson's assignment covered.

Bell Ringer:

A bowl contains ten red balls and ten blue balls. A woman selects balls at random without looking at them.

1. How many balls must she select to be sure of having at least three balls of the same color?
2. How many balls must she select to be sure of having at least three blue balls?

It is good to provide a little review before you start a new lesson. The agenda for the day should also be written on the board for the students when they come in. While the students are working on the bell ringer activity the teacher should use the time to take attendance and make any further preparations for the lesson. When the students have finished the bell ringer activity it is important for the teacher to go over that activity. Make sure that all of student are on the same page before you begin the new lesson. Now it is time to start today's lesson. The teacher should begin with an example on the board.

Example on Board

If the teacher wants to choose 5 students from the class today (lets say 20 students are in class today), how many different options would the teacher have for his/her decision?

(Note: it does matter the order or who gets picked)

The teacher should then have the students start writing down possible options, and have them try to figure out the answer on their own. The teacher knows that the answer is way too large for the students to be able to write down all the possibilities, but the teacher should let the students try anyway for about 2 to 3 minutes. After the time is up the teacher should see students who are frustrated, because they have realized how many possible solutions there are. The teacher should ask the students what the highest number they came up with was, and then the teacher should tell them the answer is 15.504. Teacher should explain to the students that in today's lesson they will learn a quick and easy way to find that answer.

Step by Step Procedure:

Teacher should begin by explaining that today's lesson will be over permutations and combinations. Then teacher should explain exactly what each one of those words means.

6.1 Permutations – what if you want to find the number of ways that you can take a group of objects from a total set? Activity – have the students put in the people in the first and 2^{nd} place race and see how many possibilities that they get. It is best to start with the question, how many ways can I award 1^{st} and 2^{nd} place to 4 people? The reaction that students may initially have is 4! Or 24. So, let them place the people and record the answers. They should get 12possibilities.

Ask the students to use the same pieces, but answer, what if there was 1^{st}, 2^{nd}, and 3^{rd} place to award for those 4 people? Now there are 24 possibilities.

What if there is only 1^{st} place? Now there are only 4 possibilities.

When you take sub-groups from an original group the possibilities change depending on the size of the sub-group. This does use the Fundamental Counting principle, but it extends it to something called a permutation. The formula for Permutation is defined to be when we have a total of n objects and we are taking a sub-group of r, $\frac{n!}{(n-r)!}$ or it is also written as ${}_nP_r$ or P(n;r). See if you can find it in their calculator or do the examples above using the formula, showing how factorial written out can cancel.

If there are 4 people and you need to pick a 1^{st}, and 2^{nd} place winner, how many ways that be done? N=4 and r=2 so $\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4\bullet 3\bullet 2\bullet 1}{2\bullet 1}=4\bullet 3=12$

Have the students calculate 4 people with 1^{st}, 2^{nd}, and 3^{rd} place winners, 4 people and 1^{st} place winner only, and 4 people and 1^{st}, 2^{nd}, 3^{rd}, and 4^{th}.

6.2 Combinations — Have students put the 4 people in teams of 2. Start with asking the question, how many ways can we take four people and put them in teams of 2? They many do a permutation and answer 12. Have them work the people and record the possibilities to see. Make sure to point out as they are working isn't a team of Shane and Carson the same thing as a team of Carson and Shane? With those same people, have them calculate a team of 1 and then a team of 3?
Have them compare their results to those when we did 1^{st}, 2^{nd}, and 3^{rd} place. Why is this different? They need to be guided to the fact that ORDER doesn't matter (within the sub-group) for these types of problems, where ORDER did matter for permutations and fundamental counting principle problems.

Combinations n is the total group and r is the number in the sub-group: $\frac{n!}{(n-r)!.r!}$

The other way it is written is C_n^r (or C(n,r)). See if students can find it on their calculator.

Now, do the calculations with the above finding a team problem using the formula. Focus on canceling out the factorials and doing order of operations properly.

A permutation is a set of distinct objects is am **ordered** arrangement of these objects. A combination is a set of **unordered** elements from the total set. The teacher should ask the students if they see the difference between the two definitions. The teacher should ask the student what they think it means, and how it affects the problem. The teacher should then give a simple example of a permutation problem followed by a simple example of combination problem (no need to solve yet).

6.3 Examples

Example 1: How many sets can you create from the set = (a, b, c, d) when each set has to have 2 elements in it?

The teacher should then explain the difference between the two problems and why the first is a permutation and the second is a combination. Once the teacher feels that the class understands the difference between the two, then it is time to move on to formulas. The formula for permutation is n! / (n-r)!, where n is the number of distinct elements and r is number of permutations in the set. The teacher should then go over some examples and teach the students how to apply the formula. Then the teacher should have the students do some examples by themselves at their desk.

Example 2

Suppose that there are eights runners in a race. The winner receives a gold medal the second-place finisher receives a silver medal, and the third-place finisher receives a bronze medal. How many different ways are there to award these medals, if all possible outcomes of the race can occur and there are no ties?

Solution: Since there are 8 runners and three medals P(8, 3) = 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3* 2 * 1 / 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 8 * 7 * 6 = 336

The teacher should make sure to write this whole solution out on the board and explain step by step what gets crossed off and why you can simplify.

Example 3

Suppose that a saleswoman has to visit eight different cities. She must begin her trip in a specified city, but she can visit the other seven cities in any order she wishes. How many possible orders can the saleswoman use when visiting the cities?

Solution: The first city is locked in but the order seven can be chosen however she wants them to be. Thus the answer is 7! = 5040

Example 4

How many permutations of the letters ABCDEFGH contain the string ABC?

Solution: Since we have a block of 3 that have to occur, the other six letters can be in any order, thus the answer is 6! = 720.

Now the teacher should do the same with combinations. The teacher should explain the combinations formula, which is: n! / r! (n-r)! where r is the number of combinations and n is the number of elements. The teacher should then go over examples as a class then have the students do one example by themselves.

Example 5

How many ways are there to select five players from a 10-member tennis team to make a trip to a match at another school?

Solution:

Using the formula you can set it up C(10, 5) = 10! / 5! *5! = 252

Example 6:

How many ways are there to select a first prize winner, second-prize winner, and a third-prize winner from five different people who have entered a contest?

Example 7

A group of 30 people have been trained as astronauts to go on the first mission to Mars. How many ways are there to select a crew of six people to go on this mission (assuming that all crew members have the same job)?

Solution:
Using the formula C(30,6)=30!/6! * 24! = 593,775

Example 8

How many bit strings of length n contain exactly r 1s?
Solution:
The positions of r 1s in a bit string of length n form an r-combination of the set (1,2,3,...,n). Hence, there are C(n,r) bit strings of length n that contain exactly r 1s.

Now the teacher should divide the class into six groups of 3 or 4. Then the teacher should explain to the groups that he/she will give the groups examples and they have to solve the problem, however they are going to have to determine whether they have to use permutations or combinations.

Examples 9

1) How many ways are there to select a committee to develop a discrete mathematics course at a school if the committee is to consist of three faculty members from the mathematics department and four from computer science department, if there are nine faculty members of mathematics department and 11 of the computer science

department?
2) How many ways are there for eight men and five women to stand in a lne so that not two women stand next to each other? (Hint: First position the men and then consider possible positions for the women.)
3) In how many different orders can five runners finish a race if no ties are allowed?

The teacher should then go over those problems with the class as a whole and answer in questions they might have. Now the teacher needs to try and incorporate all the other counting methods into today's lesson. Then the teacher should have the each group go to the board and teach the class how to solve their problem. The group will first have to decide which counting technique to use to solve their given problem.

Examples 10

1) How many license plates can be made using either three digits followed by three letters or three letters followed by three digits? (uses the product rule)

2) How many bit strings of length four do not have two consecutive 1s? (uses the three diagrams).

3) Show that if there are 30 students in a class, then at least two have last names that begin with the same letter. (uses the pigeonhole principle)
4) How many permutations of the letters ABCDEFG contain

A) the string of BCD

B) the string of CFGA

C) the string BA and GF

5) How many ways are there to seat six people around a circular table, where seatings are considered to be the same if they can be obtained from each other by rotating the table? (uses combinations)

When a group is done with their specific problem they should check in with the teacher to make sure it is correct, then put it on the board and wait for everyone else to be done.

When everyone is done, then one by one each group should teach the class how to solve their problem and why they used the counting principle that they did.

Closure: The teacher should close by talking real briefly about each one of the counting techniques, and explain when to use the correct ones. The teacher should then have the student restate the formulas that the lesson covered today. Then the students should go back to their seats and make sure everything is ready for the next class. The students should begin their homework until the bell rings.

6.4 Homework:

1) **Arrangements of Letters/People**

Some questions will involve restrictions. The most typical restrictions are:

(a) some letters/people must be placed somewhere or together

(b) some letters/people cannot be placed somewhere or together

Exercise 1:

Find the number of different arrangements of the 10 letters of the word INCREDIBLE in which

(i) all the vowels must be together

(ii) none of the vowels are adjacent

Solution:

(i) There are two methods to approach the problem.

Method 1:

First, consider the consonants: N,C,R,D,B and L
Number of ways to arrange the consonants = 6!
Next, consider the vowels. Since they must be together, they will occupy exactly one slot in between the consonants (or at the two ends):

___N___C___R___D___B___L___

The spaces indicate the possible positions that the vowels can occupy

There are 7 choices

The vowels are: I, I, E and E

There are $\frac{4!}{2!2!}$ ways of arranging these among themselves in the slot.

Now put it all together.

♦ number of arrangements = $6! \times 7 \times \frac{4!}{2!2!} = 30\ 240$

Method 2:

A commonly taught way is to think of the 4 vowels as a bundled unit. The consonants are each of unit.

First, there are 7 units altogether, and 7! Ways to arrange these units (6 consonants and 1 bundled unit).

Next, the number of permutations to arrange vowels within their unit $= \frac{4!}{2!2!}$

♦ number of arrangements = $7! \times \frac{4!}{2!2!} = 30\ 240$

Notice that the approach is different but the answer is the

(ii) Is this complementary case to (i)? No! The complementary case to (i) includes those cases where only 2 or 3 vowels are together. However, what we want here is **none of the vowels are adjacent**.

Recall from (i) Method 1

First, consider the consonants: N, C, R, D, B and L Number of ways to arrange consonants = 6!

Next, consider the vowels. As they must be **separate**, they will occupy exactly **four** slots in between the consonants (or at the two ends):

(iii) ___N___C___R___D___B___L___

There are ${}^7C_4$ choices.

The vowels are: I, I, E and E

There are $\frac{4!}{2!2!}$ ways of arranging these among themselves in the four slots.

Now put it all together.

♦ number of arrangements = $6! \times {}^7C_4 \times \frac{4!}{2!2!} = 151\ 200$

Side-by-side comparison between (i) and (ii):

(i) All the vowels must be together	(ii) None of the vowels are adjacent
First, consider the consonants: N, C, R, D, B and L. Number of ways to arrange consonants =6! Next, consider the vowels. As they must be **together**, they can occupy exactly **one** slot in between the consonants (or at the two ends): ___N___C___R___D___B__ L___ There are 7 choices. The vowels are: I, I, E and E. There are $\frac{4!}{2!2!}$ ways of arranging these among themselves in the slot. ♦ number of arrangements $= 6! \times 7 \times \frac{4!}{2!2!} = 30\ 240$	First, consider the consonants: N, C, R, D, B and L. Number of ways to arrange consonants = 6! Next, consider the vowels. As they must be **separate**, they can occupy exactly **four** slots in between the consonants (or at the two ends): ___N___C___R___D___B___L__ There are ${}^{7}C_{4}$ choices. The vowels are: I, I, E and E There are $\frac{4!}{2!2!}$ ways of arranging these among themselves in the four slots. ♦ number of arrangements $= 6! \times {}^{7}C_{4} \times \frac{4!}{2!2!} = 151\ 200$

2. Forming a Committee/Delegation

Again we will be given constraints similar to the earlier section (arrangements of letter/people), for example, two particular objects must (not) be selected.

However, when forming a committee, these **order** in which the members are picked **does not matter.**

Only the final combination of the committee matters.

Exercise 2

Find the number of ways to divide 12 people into
(i) two groups consisting of 7 and 5 people,
(ii) two groups consisting of 6 people each,
(iii) three groups consisting of 4 people each,
(iv) three groups consisting of 4, 4 and 3 people with 1 person excluded.

Solution

(i) Number of ways = ${}^{12}C_7 \times {}^{5}C_5 = 792$

We can just think of it as ${}^{12}C_7$, since the other 5 people must be in the other group, i.e. they have no choice

(ii) Think of the two group of 6 as 'identical objects'. When dealing identical objects, divide by x!, where x is the number of identical objects.

Hence, number of ways = $\dfrac{{}^{12}C_6 \times {}^{6}C_6}{2!} = 462$

Use the same method as (ii).

Take note

Number of ways = ${}^{12}C_6 \times {}^{6}C_6 = 924$?

No! We are double counting in this case. Why? Suppose the people are labeled A1 to A12. We could choose A1 to A6 in one group; A7 to A12 must automatically in the other group. Or we could choose A7 to A12; then A1 to A6 must automatically in the other group. In either case, the end result is the same!

(iii) Number of ways = $\dfrac{{}^{12}C_4 \times {}^{8}C_4 \times {}^{4}C_4}{3!}$ = 5775

(iv) Note that the question is the same as asking 'four groups consisting of 4, 4, 3 and 1 people'.

Number of ways = $\dfrac{{}^{12}C_4 \times {}^{8}C_4 \times {}^{4}C_3 \times {}^{1}C_1}{2!}$ = 69 300

Divide by 2! As the two groups of 4 are considerd as identical

Exercise 3

A committee of 6 is to be formed from 6 women and 5 men. Find the number of ways in which the committee can be chosen
(i) if it comprises at most 2 women,

(ii) if it comprises fewer than 4 women.

Solution

(i) Number of ways to choose a committee which comprises 2 women = ${}^{6}C_2 \times {}^{5}C_4$ = 75

Number of ways to choose a committee which comprises 1 woman = ${}^{6}C_1 \times {}^{5}C_5$ = 6

Number of ways to choose a committee which comprises no women = 0 (impossible!)

Total number of ways = 75 + 6 = 81

Take note: **Contrast with Example 2**

Although there are two groups of 3 in this, we do not treat them as identical objects and divide by 2!, unlike in Example 2. This is because one group consist of men and the other consist of women.

Method 1:

Number of ways to choose a committee which comprises 3 men $= {}^{6}C_{3} \times {}^{5}C_{3} = 200$

Number of ways to choose a committee which comprises 2 men $= {}^{5}C_{2} \times {}^{6}C_{4} = 150$

Number of ways to choose a committee which comprises 1 man $= {}^{5}C_{1} \times {}^{6}C_{5} = 30$

Number of ways to choose a committee which comprises no men $= {}^{6}C_{6} = 1$

Total number of ways = 200 + 150 + 30 + 1 = 381

Method 2:

This is the same as (Recognise that (ii) is the complementary case to (i)):

Number of ways = Number of ways without restriction – Number of ways in (i)

$$= {}^{11}C_{6} - 81 = 381$$

3. Code Words

Code words is a combination of the previous two sections with both permutations and combinations involved. Typically, we first find the number of ways to select the letters, then multiply with the number of ways to permute the chosen letters.

Exercise 4

Find the number of four-letter code words that can be formed from the word MANSION

(i) using both Ns,

(ii) using at most one N.

Solution

(i) We must two other letters, from MASIO, to arrange with the two Ns.

There are ${}^5C_2$ choices.

The four letters (two Ns and two other letters) can be permuted in $\frac{4!}{2!}$ ways.

♦ number of code words = ${}^5C_2 \times \frac{4!}{2!}$ = 120

Take note

Is this the complementary case to (i)?

Yes! If we can find the total number of four-letter code words without restriction, we can subtract the answer in (i) from it to get the answer.

Unfortunately, in this case we are not able to find the total number of four-letter code words easily.

Number of four-letter code words with exactly one N = ${}^5C_3 \times 4!$ = 240

Number of four-letter code words with no N = ${}^5C_4 \times 4!$ = 120

Now add up the cases.

♦ number of code words = 240 + 120 =360

Note that in both cases, all four letters will be different, so we need not divide by any identical objects in this

4. Numbers and their Factors

These questions typically require finding the number of factors of a given integer.

Exercise 5

The prime factors of 543 312 are 2, 3, 7 and 11. Excluding 1 and 543 312, how many positive factors of 543 312 are there?

Solution

$543\ 312 = 2^4 \times 3^2 \times 7^3 \times 11^1$

The positive factors of 543 312 are of the form $2^p \times 3^q \times 7^r \times 11^s$, where p = 0, 1, 2, 3 or 4;

q = 0, 1 or 2;

r = 0, 1, 2 or 3;

s = 0 or 1.

For example, $2^1 \times 3^0 \times 7^2 \times 11^1 = 1078$ is a factor of 543 312.

Thus, we have 5 choices for p, 3 choices for q, 4 choices for r and 2 choices for s.

Number of factors = 5 × 3 × 4 × 2 = 120

Take note

Failure to consider all possibilities/leave out some possibilities: Some people would stop here. Is this the final answer?

Remember that the factors 1 and 543 312 must be excluded.

Therefore, there are 120 – 2 = 118 such factors.

5. Circular Permutations

A distinct difference between seating people on a straight bench and seating them at a circular table is that each person has two 'neighbors' in the latter situation. Also, in a circle, as long as each person retains the same neighbors, they can be rotated round the circle without causing any difference.

In general, the number of ways to arrange n distinct objects in a circular manner is $(n-1)!$.

Exercise 6

At a carnival, 3 boys and 6 girls are to be seated round a carousel with 9 seats.

Assuming each child occupies exactly 1 seat, in how many ways can this be done

(i) if the 3 boys must seat together,

(ii) if 2 particular girls cannot sit together?

Solution

(i) Treat the three boy as a bundled unit.
Thus there are 7 units altogether (6 girls and 1 bundled unit).
Number of permutations for these 7 units = $(7 - 1)! = 720$
Number of permutations for the 3 boys = $3! = 6$
Total number of ways = $720 \times 6 = 4320$

(ii) Number of ways without restriction = $(9 - 1)! = 40\,320$
Number of ways that the two girls can sit together
$= (8 - 1)! \times 2! = 10\,080$
Total number of ways = $40\,320 - 10\,080 = 30\,240$

The calculation follows the same concept as in (i).

Exercise 7

Same question as above, except that the seats on the carousel are now numbered.

Solution

Note that there are now 9 distinct seats, thus we multiply the answer in Example 6(i) and 6(ii) by 9.

(i) Number of ways = 4320 × 9 = 38 880

(ii) Number of ways = 30 240 × 9 = 272 160

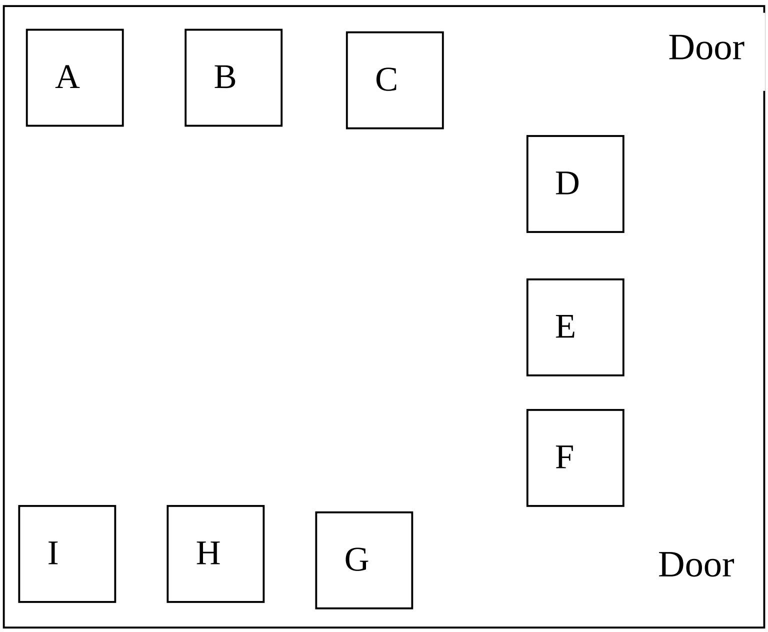
6. More Complicated Permutations

Sometimes, objects may be arranged in a manner that is neither linear nor circular. In such situations, we would need to make sure that all possibilities in each case are considered.

Exercise 8

A room has 2 doors at the corners. There are 9 fixed chairs labeled A, B, C,…, I in the room, lined up against the walls (see diagram).

9 girls are to be seated in the room, each on a chair



(i) In how many ways can this be done?

(ii) Next, find the number of ways in which they can be seated

(a) if 2 particular girls cannot be seated on any of the 4 chairs next to a doors,

(b) if 2 particular girls cannot be seated next to each other against the same wall.

Solution

(i) Number of ways without restriction = 9! = 362 880

(ii) (a) The 2 girls can only be seated on the chair labelled A, B, E, H and I.

Number of ways to arrange these girls = ${}^{5}C_{2} \times 2! = 20$

(Or, number of ways to arrange these girls = ${}^{5}P_{2} = 20$)

Recall that ${}^{n}C_{r} \times r! = {}^{n}P_{r}$

Number of ways to arrange the remaining girls = 7!

Total number of ways = 20 × 7! = 100 800

Take note Taking the wrong complement

Did you consider using Complementary Principle in (ii) (a)? Did you realize that the complementary case is not 'the 2 girls are seated on the 4 chairs next to a door'? Instead, it includes the cases 'exactly 1 girl is seated next to a door' and 'both girls are seated next to a door'. Thus, the complementary case is more complicated than the original!

(b) Number of ways for the 2 girls to sit next to each other = 3 × 2 × 2! × 7! = 60 480

3 walls to choose from

2 ways to place 2 girls against the chosen wall

Number of permutations for the 2 girls

Number of permutations for the remaining 7 girls

Number of acceptable ways = 9! – 60 480 = 302 400

Take note

Notice that this time the complementary case is less complicated, so it provides a shortcut for us to calculate the answer! You may wish to attempt calculating it directly to appreciate that you have to be very careful when using the direct method for this question.

Self-Reflection: After the lesson has been taught the teacher should reflect on how successful the lesson was? Are there any ways to improve the lesson? Did the students enjoy the lesson? Did the students learn the standards? Did it work in the time that it was supposed to? Would you teach this lesson again?

.

PERMUTATIONS AND COMBINATIONS

Bell Ringer:

A bowl contains ten red balls and ten blue balls. A woman selects balls at random without looking at them.

5. How many balls must she select to be sure of having at least three balls of the same color?
6. How many balls must she select to be sure of having at least three blue balls?

Example on Board

If the teacher wants to choose 5 students from the class today (lets say 20 students are in class today), how many different options would the teacher have for his/her decision?

(Note: it does matter the order or who gets picked)

Example 1:

How many sets can you create from the set = (a, b, c, d) when each set has to have 2 elements in it?

Example 2

Suppose that there are eights runners in a race. The winner receives a gold medal the second-place finisher receives a silver medal, and the third-place finisher receives a bronze medal. How many different ways are there to award these medals, if all possible outcomes of the race can occur and there are no ties?

Example 3

Suppose that a saleswoman has to visit eight different cities. She must begin her trip in a specified city, but she can visit the other seven cities in any order she wishes. How many possible orders can the saleswoman use when visiting the cities?

Example 4

How many permutations of the letters ABCDEFGH contain the string ABC?

Example 5

How many ways are there to select five players from a 10-member tennis team to make a trip to a match at another school?

Example 6:

How many ways are there to select a first prize winner, second-prize winner, and a third-prize winner from five different people who have entered a contest?

Example 7

A group of 30 people have been trained as astronauts to go on the first mission to Mars. How many ways are there to select a crew of six people to go on this mission (assuming that all crew members have the same job)?

Example 8 for students to do at their desks

How many bit strings of length n contain exactly r 1s?

Examples 9

1) How many ways are there to select a committee to develop a discrete mathematics course at a school if the committee is to consist of three faculty members from the mathematics department and four from computer science department, if there are nine faculty members of mathematics department and 11 of the computer science department?

2) How many ways are there for eight men and five women to stand in a lne so that not two women stand next to each other? (Hint: First position the men and then consider possible positions for the women.)

3) In how many different orders can five runners finish a race if no ties are allowed?

The teacher should then go over those problems with the class as a whole and answer in questions they might have. Now the teacher needs to try and incorporate all the other counting methods into today's lesson. Then the teacher should have the each group go to the board and teach the class how to solve their problem. The group will first have to decide which counting technique to use to solve their given problem.

Examples 10

1) How many license plates can be made using either three digits followed by three letters or three letters followed by three digits? (uses the product rule)

2) How many bit strings of length four do not have two consecutive 1s? (uses the three diagrams)
3) Show that if there are 30 students in a class, then at least two have last names that begin with the same letter. (uses the pigeonhole principle)

4) How many permutations of the letters ABCDEFG contain

A) the string of BCD

B) the string of CFGA

C) the string BA and GF

5) How many ways are there to seat six people around a circular table, where seatings are considered to be the same if they can be obtained from each other by rotating the table? (uses combinations)

EXERCISES

Exercise 1:

Find the number of different arrangements of the 10 letters of the word INCREDIBLE in which

(iii) all the vowels must be together

(iv) none of the vowels are adjacent

Exercise 2

Find the number of ways to divide 12 people into
(i) two groups consisting of 7 and 5 people,
(ii) two groups consisting of 6 people each,
(iii) three groups consisting of 4 people each,
(iv) three groups consisting of 4, 4 and 3 people with 1 person excluded.

Exercise 3

A committee of 6 is to be formed from 6 women and 5 men. Find the number of ways in which the committee can be chosen
(i) if it comprises at most 2 women,
(ii) if it comprises fewer than 4 women.

Exercise 4

Find the number of four-letter code words that can be formed from the word MANSION

(i) using both Ns,

(ii) using at most one N.

Exercise 5

The prime factors of 543 312 are 2, 3, 7 and 11. Excluding 1 and 543 312, how many positive factors of 543 312 are there?

Exercise 6

At a carnival, 3 boys and 6 girls are to be seated round a carousel with 9 seats.

Assuming each child occupies exactly 1 seat, in how many ways can this be done

(i) if the 3 boys must seat together,

(ii) if 2 particular girls cannot sit together?

Exercise 7

Same question as above, except that the seats on the carousel are now numbered.

Exercise 8

A room has 2 doors at the corners. There are 9 fixed chairs labeled A, B, C,…, I in the room, lined up against the walls (see diagram). 9 girls are to be seated in the room, each on a chair

(iii) In how many ways can this be done?

(iv) Next, find the number of ways in which they can be seated
(a) if 2 particular girls cannot be seated on any of the 4 chairs next to a doors,
(b) if 2 particular girls cannot be seated next to each other against the same wall.