Nội dung ôn tập Toán cao cấp 3

1. Trình bày khái niệm đại số và σ-đại số, kiểm tra xem một lớp tập hợp có là đại số hoặc σ-đại số không?

Bài tập

(a) Phát biểu định nghĩa đại số và σ-đại số.

(b) Cho không gian đo được $(X, \mathscr{F})$ và một tập $B \in \mathscr{F}$ bất kỳ. Lớp $\mathscr{A}$ được định nghĩa như sau:

$$\mathscr{A} = \{A \in \mathscr{F} : A \supset B \text{ hoặc } X \setminus B \supset A\}.$$

Hãy chứng minh $\mathscr{A}$ là σ-đại số.

(c) Cho $\mathscr{B}$ là σ-đại số trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $(a, b) \in \mathscr{B}$ với mọi $a < b \in \mathbb{R}$. Chứng minh $[a, b); (a, b] \in \mathscr{B}$ với mọi $a < b \in \mathbb{R}$.

2. Định nghĩa về độ đo, chứng minh các tính chất của độ đo.

Bài tập

(a) Phát biểu khái niệm độ đo trên một không gian đo được $(X, \mathscr{F})$.

(b) Cho không gian độ đo $(X, \mathscr{F}, \mu)$, khi đó ta có:

i. Với mọi họ đếm được $A_n \in \mathscr{F}(n = 1, 2, \dots)$ (không cần rời nhau) ta có

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

ii. Với mọi họ đếm được $A_n \in \mathscr{F}(n = 1, 2, \dots)$ (không cần rời nhau) ta có

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \mu(A_n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

iii. Nếu dãy $A_n \in \mathscr{F}$ $(n = 1, 2, \dots)$ là đơn điệu tăng tức $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ thì

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

3. Hàm đo được và các phép toán bảo toàn tính đo được. Chứng minh một hàm số là đo được.

Bài tập

(a) Phát biểu khái niệm hàm đo được.

(b) Nếu f là một hàm số đo được trong không gian $(X, \mathscr{F})$ thì hàm số

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \leq 1 \\ 1 & \text{nếu } f(x) > 1. \end{cases}$$

có đo được trên X không? Tại sao?

4. Tính tích phân Lebesgue.

Bài tập

(a) Tính $f(x) = \int\limits_{[0,10]} (\sqrt{x}) dm$.

(b) Tính $f(x) = \int\limits_{[0,2]} (2x) dm$.

(c) Tính $f(x) = \int\limits_{[0,2\pi]} (\sin x) dm$.

5. Tính tích phân Stieljes và tích phân Lebesgue bằng tích phân Stieltjes.

Bài tập

(a) Cho hàm số sau xác định trên $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ vô tỉ}, x \geq 1/4 \\ x, & x \text{ vô tỉ}, x \leq 1/4 \\ 10, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tính tích phân Lebesgue $\int\limits_{[0,1]} f(x) dm$.

(b) Cho hàm số sau xác định trên $\mathbb{R}$:

$$H(t) = \begin{cases} \frac{4}{t^2} & \text{nếu } t \leq -2, \\ t + 3 & \text{nếu } -2 < t \leq 2, \\ 6 - e^{2-t} & \text{nếu } t > 2, \end{cases}$$

hãy tính tích phân Lebesgue $\int\limits_X f d\mu$ với hàm f đo được trên $(X, \mathscr{F}, \mu)$ có $H(t)$ là hàm phân phối.

6. Định nghĩa và các ví dụ về không gian metric, sự hội tụ trong không gian metric.

Bài tập

(a) Phát biểu định nghĩa về metric.
(b) Cho một ví dụ về metric trong không gian $\mathbb{R}^3$ và giải thích.

7. Tập đóng và tập mở trong không gian metric.

Bài tập

(a) Chứng minh hình vuông đơn vị $(0, 1) \times (0, 1)$ là tập mở trong không gian $(\mathbb{R}^2, d_2)$.
(b) Chứng minh tập $\{(x, y) : x > 0, y > 3x\}$ là tập mở trong không gian $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

8. Khái niệm về không gian đủ.

Bài tập

Chứng minh trong không gian $\mathbb{R}$, $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ là một metric và không gian metric này là không đầy đủ.

9. Hàm liên tục trên không gian metric, tính chất của hàm liên tục trong không gian metric compact.

Bài tập

Chứng minh tập hợp $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x + 5y \leq 20; x \geq 0; y \geq 0\}$ là tập compact trong $(\mathbb{R}^2, d_2)$.