Bài toán: Cho A là một ma trận vuông cấp n, và $A^2 = E$. Chứng minh rằng A chéo hoá được.

Nếu gọi $T: F^n \to F^n$ với F là một trường nào đó. Giả sử $[T]_{B'} = A$, với B' là một cơ sở nào đó của F^n. Ta có:

$$T^2 = I \quad (I : V \to V \text{ sao cho } I\alpha = \alpha \quad \forall \alpha \in V)$$

Để chứng minh A chéo hoá được, ta chỉ cần chứng minh T chéo hoá được.

Trước hết, ta chứng minh rằng T nếu có một trị riêng λ, thì $\lambda = 1$ hoặc $\lambda = -1$.

Thực vậy, giả sử $\exists \lambda$ và $\exists v \neq 0$ sao cho:

$$T v = \lambda v$$

$$\Rightarrow T(Tv) = T(\lambda v)$$

$$\Rightarrow v = \lambda T(v) \quad (\text{vì } T^2 = I)$$

$$\Rightarrow v = \lambda . \lambda v$$

$$\Rightarrow \lambda^2 v - v = 0$$

$$\Rightarrow v(\lambda^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \quad (v \neq 0)$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \text{ hoặc } \lambda = -1$$

Giả sử không gian các vectors riêng tương ứng với trị riêng $\lambda = 1$ có cơ sở là $\{v_1, \dots, v_k\}$. Ta có

$$Tv_1 = v_1, \; Tv_2 = v_2, \dots, Tv_k = v_k$$

Lưu ý rằng $k \leq n$.

Ta có thể bổ xung vào $\{v_1, \dots, v_k\}$ để được một cơ sở của V là $B = \{v_1, \dots, v_k, \underline{v_{k+1}, \dots, v_n}\}$.

Gọi $U : V \longrightarrow V$ và $U = T - I$

Ta sẽ chứng minh rằng, $\forall \alpha \in Range(U)$, ta có $T\alpha = -\alpha$

Thật vậy: vì $\alpha \in Range(U) \Rightarrow \exists \beta \in V$ sao cho

$$\alpha = U(\beta)$$

$$\Rightarrow \alpha = T\beta - \beta$$

$$\Rightarrow T\alpha = T(T\beta - \beta)$$

$$= T^2\beta - T\beta$$

$$= \beta - T\beta \quad (\text{do } T^2 = I)$$

$$= -(T\beta - \beta)$$

$$\Rightarrow \boxed{T\alpha = -\alpha} \quad (*)$$

Kế đến, ta sẽ chứng minh rằng $\{U(v_{k+1}), \dots, U(v_n)\}$ độc lập tuyến tính.

Giả sử $c_{k+1} U(v_{k+1}) + \cdots + c_n U(v_n) = 0$

$\Rightarrow U(c_{k+1} v_{k+1} + \cdots + c_n v_n) = 0$

$\Rightarrow T(c_{k+1} v_{k+1} + \cdots + c_n v_n) - (c_{k+1} v_{k+1} + \cdots + c_n v_n) = 0$

$\Rightarrow T(c_{k+1} v_{k+1} + \cdots + c_n v_n) = c_{k+1} v_{k+1} + \cdots + c_n v_n$

$\Rightarrow c_{k+1} v_{k+1} + \cdots + c_n v_n \in \text{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$

$\Rightarrow \exists c_1, \ldots, c_n \in F$ sao cho

$c_{k+1} v_{k+1} + \cdots + c_n v_n = c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k$

$\Rightarrow c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k - c_{k+1} v_{k+1} - \cdots - c_n v_n = 0$

Do $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ là một cơ sở của V

$\Rightarrow c_1 = \cdots = c_k = c_{k+1} = \cdots = c_n = 0$

$\Rightarrow \{U(v_{k+1}), \ldots, U(v_n)\}$ là độc lập tuyến tính.

Gọi $w_{k+1} = U(v_{k+1}), \ldots, w_n = U(v_n)$. Ta sẽ chứng minh rằng $B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_n\}$ là một cơ sở cho V.

Giả sử $c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k + c_{k+1} w_{k+1} + \cdots + c_n w_n = 0$ (1)

$\Rightarrow T(c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k + c_{k+1} w_{k+1} + \cdots + c_n w_n) = 0$

$\Rightarrow c_1 T v_1 + \cdots + c_k T v_k + c_{k+1} T w_{k+1} + \cdots + c_n T w_n = 0$

$\Rightarrow c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k - c_{k+1} w_{k+1} - \cdots - c_n w_n = 0$ (2)

Ở đây chú ý rằng ta có (2) là vì

$$w_j = U(v_j) \in \mathrm{Range}(U) \quad \text{với } j = k+1 \cdots n$$

Do đó, theo (*) ta có $T(w_j) = -w_j$

Lấy (1) trừ (2), ta có:

$$2\left(c_{k+1} w_{k+1} + \cdots + c_n w_n\right) = 0$$

Do $\{w_{k+1}, \ldots, w_n\} = \{U(v_{k+1}), \ldots, U(v_n)\}$ là độc lập tuyến tính. Ta có:

$$c_{k+1} = \cdots = c_n = 0$$

$\Rightarrow$ (1) thành: $c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k = 0$

$$\Rightarrow c_1 = \cdots = c_k = 0$$

Vậy B_1 là độc lập tuyến tính.

Do $|B_1| = n \Rightarrow B_1$ là một cơ sở cho V.

Ta có:

$$T(v_1) = v_1;\ T(v_2) = v_2;\ \ldots;\ T(v_k) = v_k$$

và $T(w_{k+1}) = -w_{k+1};\ \ldots;\ T(w_n) = -w_n$

Do đó: $[T]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & -1 & \\ 0 & & & & & & \ddots \; -1 \end{pmatrix}$

...

Do đó, ma trận chéo của A là $[T]_{B_1}$.