

DIEN DAN BAT DANG THUC VIET NAM

VietNam Inequality Mathematic Forum

★★★★★

www.vimf.co.cc

Tác Giả Bài Viết:

Admin

★★★

Bài viết này (cùng với file đính kèm) được tạo ra vì mục đích giáo dục. Không được sử dụng bản ebook này dưới bất kỳ mục đích thương mại nào, trừ khi được sự đồng ý của tác giả. Mọi chi tiết xin liên hệ: www.vimf.co.cc

KỸ THUẬT CỘNG MẪU SỐ ENGEL CỦA BẤT ĐẲNG THỨC CHEBYCHEV

Như các bạn đã biết Bất đẳng thức Chebychev là một công cụ mạnh để giải quyết một lớp các bất đẳng thức. Trước khi đến với bài viết này tôi xin nhắc lại một chút về bất đẳng thức này

I/ Bất đẳng thức Chebychev cổ điển và Chebychev dạng Engel

1a. Bất đẳng thức Chebychev trên 2 dãy đơn điệu cùng chiều:

Cho 2 dãy hữu hạn các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$, khi đó

Nếu có $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$ thì ta có

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$

Bất đẳng thức Chebychev suy rộng:

Nếu $\begin{cases} a_1 \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \dots \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \\ b_1 \geq \frac{b_1 + b_2}{2} \geq \dots \geq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \leq \dots \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \\ b_1 \leq \frac{b_1 + b_2}{2} \leq \dots \leq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \end{cases}$ thì

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

1b. Bất đẳng thức Chebychev trên 2 dãy đơn điệu ngược chiều:

Cho 2 dãy hữu hạn các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$, khi đó

Nếu có $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$ thì ta có

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$

Bất đẳng thức Chebychev suy rộng:

Nếu $\begin{cases} a_1 \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \dots \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \\ b_1 \leq \frac{b_1 + b_2}{2} \leq \dots \leq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \leq \dots \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \\ b_1 \geq \frac{b_1 + b_2}{2} \geq \dots \geq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \end{cases}$ thì

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

Việc chứng minh các bất đẳng thức trên là khá đơn giản. Các bạn có thể tham khảo từ nhiều nguồn tài liệu khác nhau.

Bây giờ trở lại với chủ đề chính, nếu ta thay dãy $b_1, b_2, \dots, b_n$ bởi dãy $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$ thì khi đó

2a. Nếu có $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \end{cases}$ thì ta có

$$n \left(\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \right) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

2b. Nếu có $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \end{cases}$ thì ta có

$$n \left(\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \right) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

Tuy nhiên trong một số trường hợp, ta không thể đánh giá theo 2 dãy này. Khi sso ta có một cách khác phức, đó là:

3a. Nếu có $\begin{cases} \frac{a_1}{x_1} \geq \frac{a_2}{x_2} \geq \dots \geq \frac{a_n}{x_n} \\ x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \frac{a_1}{x_1} \leq \frac{a_2}{x_2} \leq \dots \leq \frac{a_n}{x_n} \\ x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \end{cases}$ thì ta có

$$\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \leq \frac{n(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

Chứng minh. theo 1a, ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \right) (x_1 + x_2 + \dots + x_n) &\leq n \left(\frac{a_1}{x_1} x_1 + \frac{a_2}{x_2} x_2 + \dots + \frac{a_n}{x_n} x_n \right) \\ &= n(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \end{aligned}$$

Do đó

$$\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \leq \frac{n(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

3b. Nếu có $\begin{cases} \frac{a_1}{x_1} \leq \frac{a_2}{x_2} \leq \dots \leq \frac{a_n}{x_n} \\ x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \frac{a_1}{x_1} \geq \frac{a_2}{x_2} \geq \dots \geq \frac{a_n}{x_n} \\ x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \end{cases}$ thì ta có

$$\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \geq \frac{n(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

Chứng minh. theo 1b, ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \right) (x_1 + x_2 + \dots + x_n) &\geq n \left(\frac{a_1}{x_1} x_1 + \frac{a_2}{x_2} x_2 + \dots + \frac{a_n}{x_n} x_n \right) \\ &= n(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \end{aligned}$$

Do đó

$$\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \geq \frac{n(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

Mặc dù 2 bất đẳng thức này được phát biểu đơn giản và được suy ra từ bất đẳng thức Chebychev cổ điển. Tuy nhiên trong một số trường hợp, việc đánh giá theo 2a và 2b không mấy hiệu quả. Vì thế, 3a và 3b (kết hợp với việc thêm biến thích hợp lại trở nên hiệu quả đối với các bất đẳng thức đối xứng 3 biến có chứa phân thức. Để làm rõ điều này chúng ta cũng xét đến các bài toán sau:

II/ Áp dụng vào giải toán.

Bài toán 1. Cho các số thực dương a, b, c sao cho

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \geq 1$$

Chứng minh rằng $a + b + c \geq ab + bc + ca$

Italia 2007

Lời giải. Ta có

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} = \frac{a}{a+ab+ac} + \frac{b}{b+bc+ba} + \frac{c}{c+ca+cb}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$ thì $a + ab + ac \geq b + bc + ca \geq c + ca + cb$ và

$$\frac{a}{a+ab+ac} \geq \frac{b}{b+bc+ba} \geq \frac{c}{c+ca+cb} \Leftrightarrow \frac{1}{1+a+b} \geq \frac{1}{1+b+c} \geq \frac{1}{1+c+a}$$

$$\Leftrightarrow b+c \leq c+a \leq a+b$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng.

Từ đó theo 3a thì

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} = \frac{a}{a+ab+ac} + \frac{b}{b+bc+ba} + \frac{c}{c+ca+cb}$$

$$\leq \frac{3(a+b+c)}{a+b+c+2(ab+bc+ca)}$$

Kết hợp với giả thiết ta suy ra

$$\frac{3(a+b+c)}{a+b+c+2(ab+bc+ca)} \geq 1 \Rightarrow a+b+c \geq ab+bc+ca$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 2. Cho tam giác nhọn ABC . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+\tan A + \tan B} + \frac{1}{1+\tan B + \tan C} + \frac{1}{1+\tan C + \tan A} \leq \frac{3}{1+2\sqrt{3}}$$

VIF

Lời giải. Theo như đánh giá của bài toán 1 thì

$$\frac{1}{1+\tan A + \tan B} + \frac{1}{1+\tan B + \tan C} + \frac{1}{1+\tan C + \tan A}$$

$$\leq \frac{3(\tan A + \tan B + \tan C)}{\tan A + \tan B + \tan C + 2(\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A)}$$

Từ bất đẳng thức $ab + bc + ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)}$ và đẳng thức $\sum \tan A = \prod \tan A$ ta có

$$\frac{3(\tan A + \tan B + \tan C)}{\tan A + \tan B + \tan C + 2(\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A)}$$

$$= \frac{3}{1 + \frac{2(\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A)}{\tan A + \tan B + \tan C}}$$

$$\leq \frac{3}{1 + 2 \frac{\sqrt{3 \prod \tan A} (\sum \tan A)}{\sum \tan A}} = \frac{3}{1 + 2 \sqrt{\frac{3 \prod \tan A}{\sum \tan A}}} = \frac{3}{1 + 2\sqrt{3}}$$

Vậy, ta có điều phải chứng minh. đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều

Bài toán 3. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab + \frac{9}{4}}{ab + a + b} + \frac{bc + \frac{9}{4}}{bc + b + c} + \frac{ca + \frac{9}{4}}{ca + c + a} \geq \frac{13}{4}$$

VIF

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$.

Ta có $(a + 1)(b - c) \geq 0$ nên $ab + a + b \geq ac + a + c$, tương tự ta suy ra $ab + a + b \geq ac + a + c \geq bc + b + c$

Lại có

$$\frac{ab + \frac{9}{4}}{ab + a + b} \leq \frac{ca + \frac{9}{4}}{ca + c + a} \Leftrightarrow (b - c)(3 - a) \left(a + \frac{3}{4} \right) \geq 0$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng

Tương tự ta suy ra

$$\frac{ab + \frac{9}{4}}{ab + a + b} \leq \frac{ca + \frac{9}{4}}{ca + c + a} \leq \frac{bc + \frac{9}{4}}{bc + b + c}$$

Từ đó theo 3b thì

$$\begin{aligned} \frac{ab + \frac{9}{4}}{ab + a + b} + \frac{bc + \frac{9}{4}}{bc + b + c} + \frac{ca + \frac{9}{4}}{ca + c + a} &\geq \frac{3 \left(ab + bc + ca + \frac{27}{4} \right)}{ab + bc + ca + 2(a + b + c)} \\ &= \frac{3(\sum ab + 9)}{\sum ab + 6} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{3(\sum ab + 9)}{\sum ab + 6} \geq \frac{13}{4} \Leftrightarrow \sum ab \leq 3$$

Bất đẳng thức trên đúng do $ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$

Vậy, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 4. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a + b}{1 + ab} + \frac{b + c}{1 + bc} + \frac{c + a}{1 + ca} \leq \frac{9}{2(a + b + c)}$$

Lời giải.

Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum \left(3 - \frac{2(a + b)(a + b + c)}{a^2 + b^2 + c^2 + ab} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sum \frac{a^2 + b^2 + 3c^2 - ab - 2ac - 2bc}{1 + ab} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow 1 + ab \geq 1 + ac \geq 1 + bc$

Ta tiếp tục thiết lập

$$\frac{a^2 + b^2 + 3c^2 - ab - 2ac - 2bc}{1 + ab} \leq \frac{a^2 + c^2 + 3b^2 - ac - 2ab - 2bc}{1 + ac}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2(b^2 - c^2) - a(b - c) + a^3(b - c) - abc(b - c) + 3a(b^3 - c^3) - 2a^2(b^2 - c^2) \\
&\geq 0 \\
&\Leftrightarrow (b - c)(2b + 2c - a - a^3 - abc + 3ab^2 + 3abc + 3ac^2 - 2a^2b \\
&\quad - 2a^2c) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (b - c)(2b(1 - a^2) + 2c(1 - a^2) + 2abc + a^3 - a(a^2 + b^2 + c^2) \\
&\quad + 3ab^2 + 3ac^2) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (b - c)(2(b + c)(b^2 + c^2) + 2abc + 2ab^2 + 2ac^2) \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng. Thiết lập tương tự ta suy ra

$$\begin{aligned}
\frac{a^2 + b^2 + 3c^2 - ab - 2ac - 2bc}{1 + ab} &\leq \frac{a^2 + c^2 + 3b^2 - ac - 2ab - 2bc}{1 + ac} \\
&\leq \frac{(b^2 + c^2 + 3a^2 - bc - 2ab - 2ca)}{1 + bc}
\end{aligned}$$

Từ đó theo 3b ta có

$$\begin{aligned}
\sum \frac{a^2 + b^2 + 3c^2 - ab - 2ac - 2bc}{1 + ab} &\geq \frac{3\sum(a^2 + b^2 + 3c^2 - ab - 2ac - 2bc)}{3 + \sum ab} \\
&= \frac{12(\sum a^2 - \sum ab)}{3 + \sum ab} \geq 0
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Nhận xét. Nếu ta muốn đánh giá theo kiểu *Chebychev cổ điển*, tức là thiết lập thêm

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 + 3c^2 - ab - 2ac - 2bc &\leq a^2 + c^2 + 3b^2 - ac - 2ab - 2bc \\
&\Leftrightarrow (b - c)(2b + 2c - a) \geq 0
\end{aligned}$$

Điều này thật khó giải quyết bởi $2b + 2c - a$ là âm hay dương?

Bài toán. Cho các số thực x, y, z sao cho $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{y}{y^2 + 1} + \frac{z}{z^2 + 1} \leq \frac{9}{10}$$

Poland 1992

Lời giải. Ta có

$$\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{y}{y^2 + 1} + \frac{z}{z^2 + 1} \leq \frac{|x|}{x^2 + 1} + \frac{|y|}{y^2 + 1} + \frac{|z|}{z^2 + 1}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $x, y, z > 0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z$ thì $x^2 + 1 \geq y^2 + 1 \geq z^2 + 1$

Tiếp tục ta có

$$\frac{x}{x^2 + 1} \geq \frac{y}{y^2 + 1} \Leftrightarrow (x - y)(1 - xy) \geq 0$$

Do $1 = x + y + z \geq x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy < 1$ nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng

Tương tự ta suy ra

$$\frac{x}{x^2 + 1} \geq \frac{y}{y^2 + 1} \geq \frac{z}{z^2 + 1}$$

Từ đó theo 3a ta có

$$\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{y}{y^2 + 1} + \frac{z}{z^2 + 1} \leq \frac{3(x + y + z)}{x^2 + y^2 + z^2 + 3} \leq \frac{3}{\frac{1}{3}(x + y + z)^2 + 3} = \frac{9}{10}$$

Vậy, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài toán. Cho các số thực dương a, b, c sao cho

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} \geq 1$$

Chứng minh rằng $a + b + c \geq 3abc$

VIF

Lời giải. Ta có

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} = \frac{a}{a+2abc} + \frac{b}{b+2abc} + \frac{c}{c+2abc}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$ thì $a+2abc \geq b+2abc \geq c+2abc$ và

$$\frac{a}{a+2abc} \geq \frac{b}{b+2abc} \geq \frac{c}{c+2abc} \Leftrightarrow \frac{1}{1+2ab} \geq \frac{1}{1+2ca} \geq \frac{1}{1+2bc} \Leftrightarrow ab \geq ac \geq bc$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng với $a \geq b \geq c$

Từ đó theo 3a, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} &= \frac{a}{a+2abc} + \frac{b}{b+2abc} + \frac{c}{c+2abc} \\ &\leq \frac{3(a+b+c)}{a+b+c+6abc} \end{aligned}$$

Kết hợp với giả thiết suy ra

$$\frac{3(a+b+c)}{a+b+c+6abc} \geq 1 \Rightarrow a+b+c \geq 3abc$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

III/ Bài tập áp dụng.

Bài toán 1. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a + b + c = 1$. Chứng minh

$$\frac{a + \frac{2}{3}}{2a + a^2 + 2bc} + \frac{b + \frac{2}{3}}{2b + b^2 + 2ca} + \frac{c + \frac{2}{3}}{2c + c^2 + 2ab} \geq 3$$

Bài toán 2. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh

$$\sum \frac{a}{\sqrt{3+a^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+1}$$

Bài toán 3. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh

$$\sum \frac{a}{5+a^2} \leq \frac{1}{2}$$

Bài toán 4. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\sum \frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}} \leq 3$$