

Các bổ đề hình học

I. CÁC BỔ ĐỀ VỚI CÁC YẾU TỐ ĐẶC BIỆT CỦA TAM GIÁC:

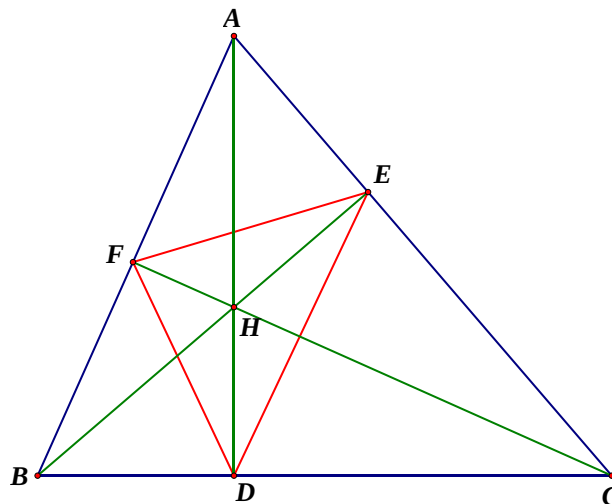
1. Nếu 1 tam giác vuông có một cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền hoặc một cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân $\frac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc cạnh huyền bằng một cạnh góc vuông nhân $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ thì tam giác vuông ấy có 1 góc bằng 30° và 1 góc bằng 60° .

2. Cho $\triangle ABC$ nhọn, 3 đường cao AD , BE , CF đồng quy tại H .

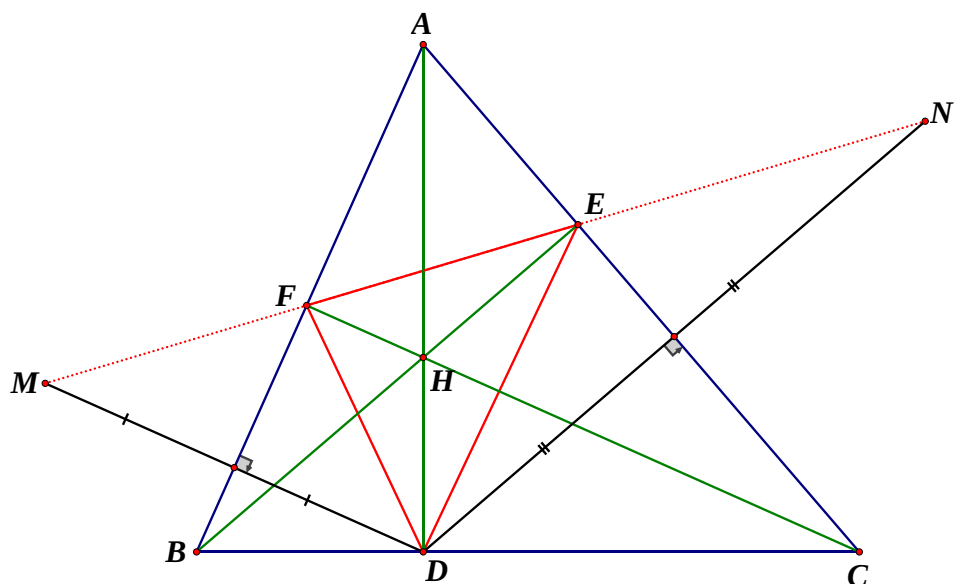
2.1. H là giao điểm 3 đường phân giác của $\triangle DEF$.

2.2. Trong các tam giác mà các đỉnh lần lượt thuộc cạnh của $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ có chu vi bé nhất. (Định lý Fagnano).

2.3. Vị trí của A , H đổi nhau nếu $\hat{A} > 90^\circ$. Khi đó A là giao điểm 3 đường phân giác của $\triangle DEF$.



3. Cho tam giác ABC có các đường cao AD , BE , CF . Nếu M , N lần lượt là đối xứng của D qua AB , AC thì M , N , F thẳng hàng.



4. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM:

$$4.1. \begin{cases} AM > \frac{BC}{2} \Leftrightarrow \hat{A} < 90^\circ \\ AM < \frac{BC}{2} \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ \\ AM = \frac{BC}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ \end{cases}$$

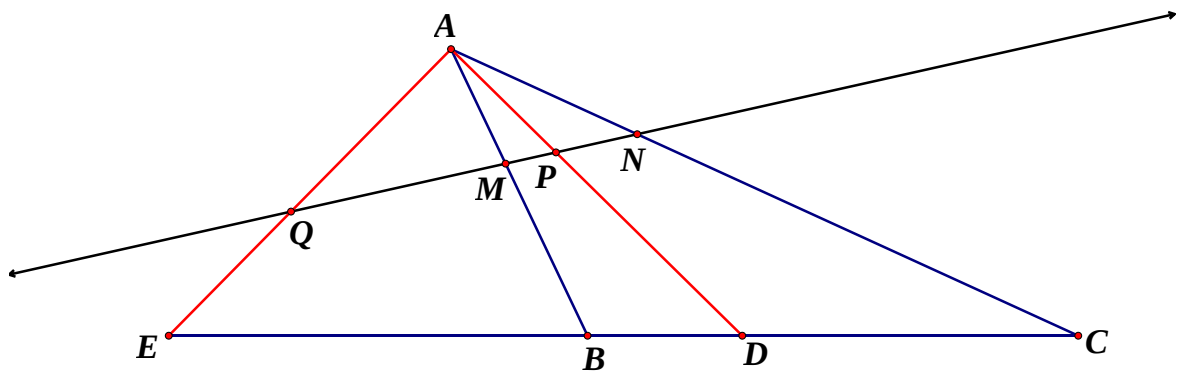
$$4.2. \begin{cases} AB < AC \Leftrightarrow \widehat{MAB} > \widehat{MAC} \\ AB < AC \Leftrightarrow \widehat{AMB} < \widehat{AMC} \end{cases}$$

4.3. Nếu $E \in AB, F \in AC, EF \parallel BC$ thì AM qua trung điểm N của EF.

5. Cho tam giác ABC. Lấy D nằm giữa B và C, E nằm trên đường thẳng BC nhưng không nằm giữa B, C.

- Nếu $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ thì AD là đường phân giác trong của tam giác ABC.
- Nếu $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$ thì AE là đường phân giác ngoài của tam giác ABC.
- Nếu AD, AE lần lượt là đường phân giác trong và phân giác ngoài, m là đường thẳng bất kì không qua A cắt AB, AC, AD, AE lần lượt tại M, N, P, Q thì

$$\frac{PM}{PN} = \frac{QM}{QN}; \frac{MP}{MQ} = \frac{NP}{NQ}$$



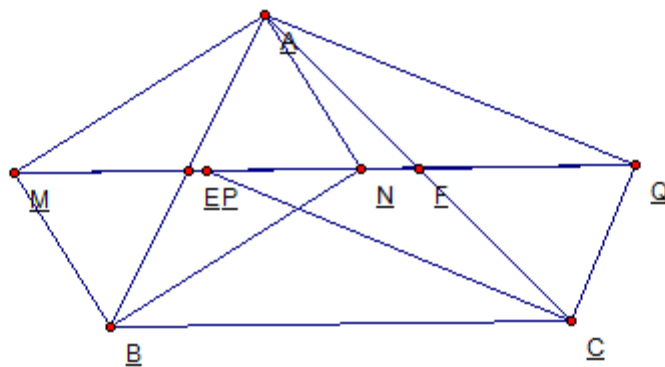
6. Cho tam giác ABC nội tiếp $(O; R)$ có H là trực tâm, G là trọng tâm. M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

- $AH = 2OM$; $BH = 2ON$; $CH = 2OP$
- H, G, O thẳng hàng và $GH = 2GO$

7. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

- O nằm trong tam giác $\Leftrightarrow \Delta ABC$ nhọn
- O nằm trong góc BAC và nằm ngoài tam giác $\Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$

8. Cho tam giác ABC. E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC. M, N là hình chiếu của A lên các phân giác ngoài và trong tại đỉnh B. P, Q là hình chiếu của A lên các phân giác trong và ngoài tại đỉnh C. Ta có M, N, P, Q, E, F thẳng hàng.



10. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P là các tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác, I là tâm đường tròn nội tiếp.

- I là trực tâm tam giác MNP
- $(I; r), (M; r_m), (N; r_n), (P; r_p)$ lần lượt là các đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của tam giác ABC. D, E, F là các tiếp điểm của I với BC, CA, AB. H, J, K là các tiếp điểm của (M) với BC, AB, AC. Ta có

$$\begin{cases} 2AE = 2AF = AB + AC - BC \\ 2AJ = 2AK = AB + AC + BC \end{cases}$$

■ **Hệ quả 1:** Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH và r, r_1, r_2 là bán kính các đường tròn nội tiếp $\triangle ABC, \triangle HAB, \triangle HAC$. R, R_1, R_2 lần lượt là bán kính các đường tròn bàng tiếp trong góc vuông của các tam giác ABC, ABH, ACH. Ta có:

- $r_1 + r_2 + r = AH$.
- $R + R_1 + R_2 = AB + BC + CA + AH$

■ **Hệ quả 2:** Nếu tam giác ABC vuông ở A có BC cố định thì:

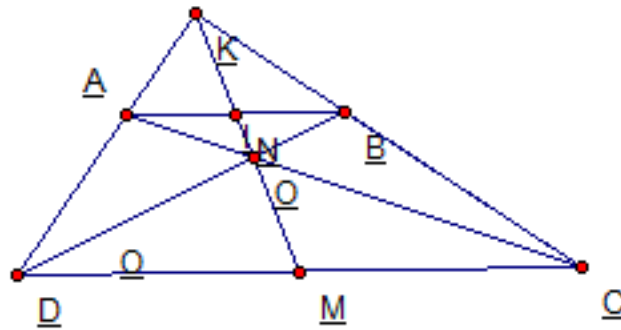
- $\max(r + r_1 + r_2) = \frac{BC}{2} \Leftrightarrow AB = AC$
- $\max(R_1 + R_2 + R) = \frac{BC(3+2\sqrt{2})}{2} \Leftrightarrow AB = AC$

II. CÁC BỔ ĐỀ VỀ TỨ GIÁC:

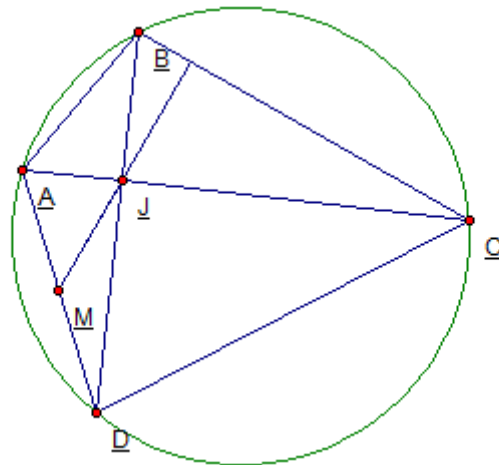
1. Trung điểm các cạnh của 1 tứ giác là các đỉnh của 1 hình bình hành hoặc trung điểm 2 cạnh đối và 2 đường chéo là 4 đỉnh của 1 hình bình hành. (nếu chúng không thẳng hàng).

2. Nếu tứ giác có 2 cạnh đối bằng nhau thì trung điểm 2 cạnh còn lại và trung điểm 2 đường chéo là 4 đỉnh của 1 hình thoi.

3. Trong hình thang có 2 cạnh bên không song song, giao điểm 2 đường thẳng chứa 2 cạnh bên, giao điểm 2 đường chéo và trung điểm 2 đáy cùng nằm trên 1 đường thẳng.



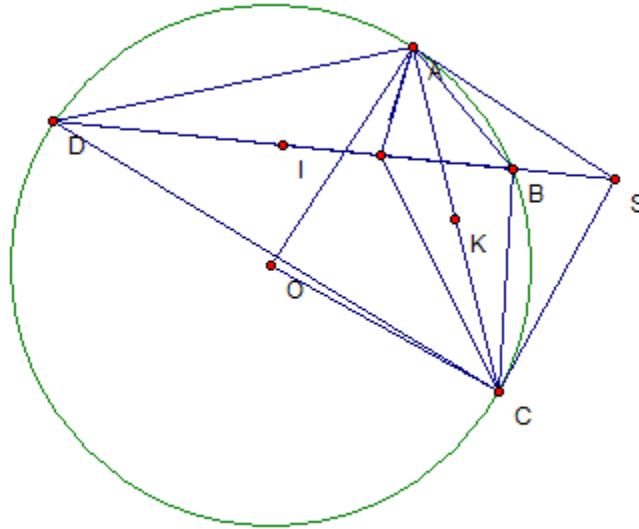
4. Trong tứ giác lồi, tích độ dài 2 đường chéo bé hơn hoặc bằng tổng các tích 2 cạnh đối (bất đẳng thức Ptolemy). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ Tứ giác nội tiếp
5. Trong tứ giác lồi, tổng độ dài 2 đường chéo bé hơn chu vi và lớn hơn nửa chu vi tứ giác ấy.
6. Trong tứ giác lồi, tổng độ dài 2 cạnh đối lớn hơn hoặc bằng 2 lần đoạn thẳng nối trung điểm 2 cạnh còn lại. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ 2 cạnh đối ấy song song.
7. Nếu 1 tứ giác nội tiếp và có 2 đường chéo vuông góc tại J thì 1 đường thẳng qua J sẽ vuông góc với 1 cạnh khi và chỉ khi đường thẳng ấy qua trung điểm cạnh đối diện (định lý Brahma Gupta)



8. Tứ giác điều hoà: Tứ giác nội tiếp có tích các cặp cạnh đối bằng nhau gọi là tứ giác điều hoà.

8.1. Cho tứ giác ABCD nội tiếp.

- Đường phân giác của 2 góc $\widehat{BAD}$; $\widehat{CAD}$ đi qua 1 điểm trên BD $\Leftrightarrow AB.CD = AD.BC$
- Hệ quả: Nếu phân giác các góc $\widehat{BAD}$; $\widehat{CAD}$ đi qua 1 điểm trên BD thì phân giác các góc $\widehat{ABD}$, $\widehat{ACD}$ đi qua 1 điểm trên AC.



8.2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O) có đường chéo AC không đi qua tâm O.

- Tiếp tuyến với (O) tại A, C và BD đồng quy $\Leftrightarrow AB.CD = AD.BC$
- Hệ quả: Nếu AC, BD không qua tâm O thì tiếp tuyến với (O) tại A, C và BD đồng quy $\Leftrightarrow$ tiếp tuyến với (O) tại B, D và AC đồng quy

8.3. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của D trên AB, BC, CA. Ta có M là trung điểm của PN $\Leftrightarrow AB.CD = AD.BC$

8.4. Gọi K là trung điểm của AC.

- AC là phân giác góc $\widehat{BKD}$ $\Leftrightarrow AB.CD = AD.BC$
- Hệ quả: I là trung điểm của BD. AC là phân giác góc $\widehat{BKD}$ $\Leftrightarrow$ BD là phân giác góc $\widehat{AIC}$.

8.5. I là trung điểm của đường chéo BD. AC, AM đối xứng nhau qua phân giác của góc $\widehat{BAD}$ $\Leftrightarrow AB.CD = AD.BC$

III. CÁC BỔ ĐỀ VỀ ĐƯỜNG TRÒN

1. Cho (O;R) và điểm M không thuộc đường tròn. Qua M vẽ đường thẳng cắt (O) tại 2 điểm A, B. Khi đó tích MA.MB không phụ thuộc vị trí cát tuyến MAB.

- M ở trong (O;R): $MA \cdot MB = R^2 - OM^2$
- M ở ngoài (O;R): $MA \cdot MB = OM^2 - R^2 = MT^2$ (MT là tiếp tuyến tới (O)).

2. Hệ quả:

2.1. Cho tứ giác ABCD có 2 đường chéo cắt nhau tại N. AB, CD cắt nhau tại M.

a) Nếu $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ hoặc $NA \cdot NC = NB \cdot ND$ thì ABCD nội tiếp.

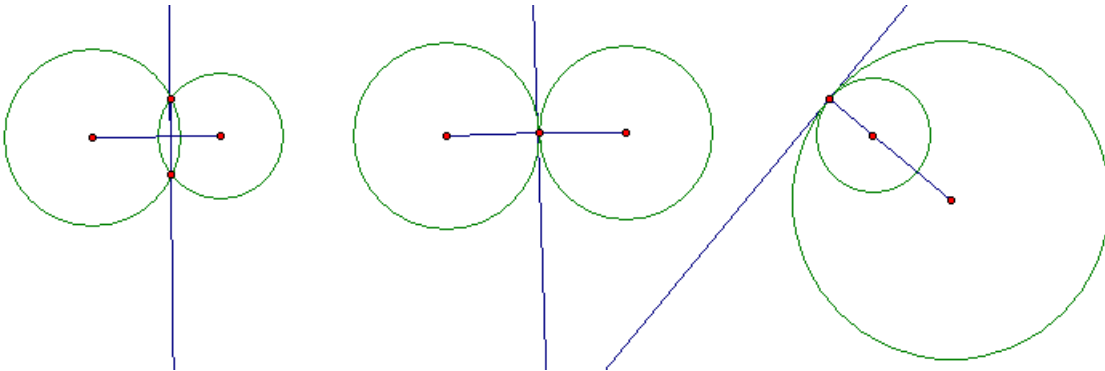
b) Nếu ABCD nội tiếp thì $MA \cdot MB = MC \cdot MD$; $NB \cdot ND = NA \cdot NC$.

2.2. Cho tam giác ABC. Nếu M thuộc tia đối của tia BC mà $MB \cdot MC = MA^2$ thì MA là tiếp tuyến đường tròn (ABC).

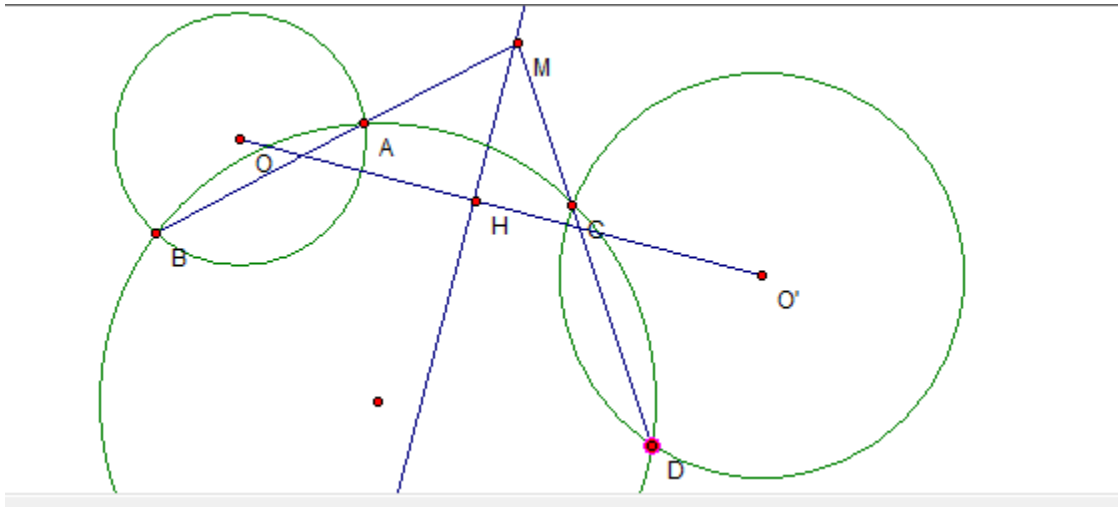
3. Trục đẳng phương:

- Trục đẳng phương của 2 đường tròn (O;R) và (O';R') là tập hợp những điểm có cùng phương tích với 2 đường tròn ấy:

$$H = \{M / OM^2 - R^2 = O'M^2 - R'^2\}$$
- Trục đẳng phương của 2 đường tròn là 1 đường thẳng vuông góc với đường thẳng qua 2 tâm.
- Nếu (O), (O') cắt nhau tại A, B thì đường thẳng AB là trục đẳng phương của (O) và (O')
- Nếu (O), (O') tiếp xúc nhau thì trục đẳng phương là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn.



- Nếu (O), (O') không có điểm chung, vẽ (I) cắt (O) tại A, B; cắt (O') tại C, D và AB, CD cắt nhau ở M. Đường thẳng qua M vuông góc với đường nối tâm OO' là trục đẳng phương của (O) và (O').



4. Cho $(O; R)$ và $(O'; R')$ ($R \geq R'$). Đặt $OO' = d$. Gọi m là trục đẳng phương của (O) và (O') . m cắt OO' tại H .

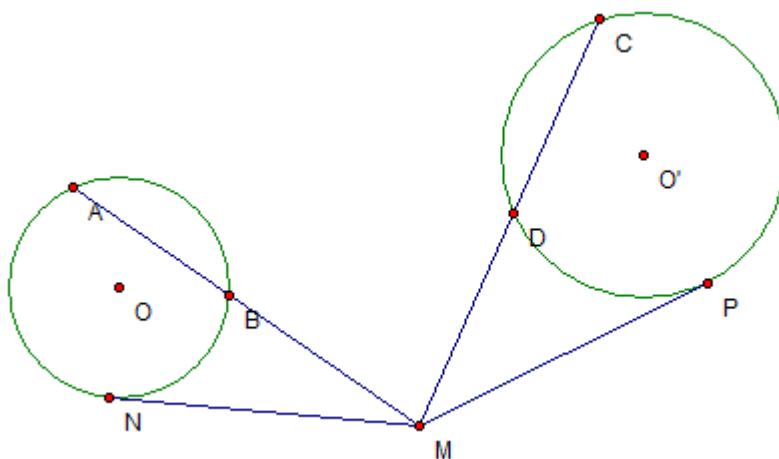
$$4.1 \ R \geq R' \Leftrightarrow OH \geq O'H$$

$$4.2. OH = \frac{1}{2d}(d^2 + R^2 - R'^2)$$

5. Trục đẳng phương đi qua trung điểm các đoạn tiếp tuyến chung của 2 đường tròn (suy ra có thể vẽ trục đẳng phương bằng cách nối trung điểm các đoạn tiếp tuyến chung của 2 đường tròn)

■ Hệ quả: Nếu xem 1 điểm là đường tròn có bán kính là 0, ta có trục đẳng phương của $(O; R)$ và đường tròn điểm A là đường thẳng qua trung điểm 2 tiếp tuyến AB, AC của (O) .

6. Cho $(O; R)$ và $(O'; R')$ có trục đẳng phương m . Nếu từ 1 điểm M vẽ tiếp tuyến MN , cát tuyến MAB tới (O) , tiếp tuyến MP , cát tuyến MCD tới (O') thì tam giác MNP cân tại M và A, B, C, D cùng thuộc 1 đường tròn.



7. Tâm đẳng phương: Cho $(O_1; R_1); (O_2; R_2); (O_3; R_3)$. Gọi m_1, m_2, m_3 lần lượt là trục đẳng phương của 3 cặp đường tròn trên.

- Nếu O_1, O_2, O_3 thẳng hàng thì $m_1 \parallel m_2 \parallel m_3$.
- Nếu O_1, O_2, O_3 không thẳng hàng thì m_1, m_2, m_3 đồng quy tại 1 điểm P. P gọi là tâm đẳng phương và có cùng phương tích với 3 đường tròn trên.

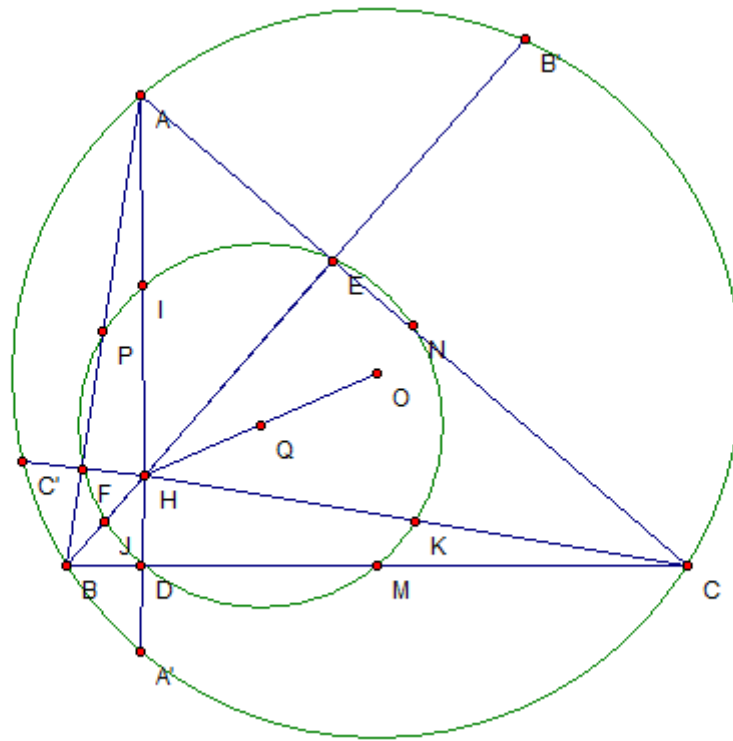
8. Tiếp tuyến của đường tròn: Cho A nằm ngoài $(O; R)$. Vẽ tiếp tuyến AB, AC tới (O) (A, B là tiếp điểm). Lấy M trên đoạn AB, N trên đoạn AC.

- ΔABC đều $\Leftrightarrow OA = 2R \Leftrightarrow AB = R\sqrt{3}$
- $ABOC$ là hình vuông $\Leftrightarrow OA = R\sqrt{2} \Leftrightarrow AB = R$
- OA cắt (O) tại I, K ($AI < AK$) thì I, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp ΔABC .
- MN là tiếp tuyến của $(O) \Leftrightarrow MN = MB + NC \Leftrightarrow AM + MN + AN = 2AB \Leftrightarrow \widehat{MON} = \widehat{BOC} \cdot \frac{1}{2}$
- Nếu MN tiếp xúc (O) tại I: $P_{\Delta AMN} \min \Leftrightarrow S_{\Delta AMN} \max \Leftrightarrow I$ là điểm chính giữa cung BC.

9. Đường tròn ngoại tiếp: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp $(O; R)$. 3 đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. I, J, K lần lượt là trung điểm của HA, HB, HC. M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

- 9 điểm D, E, F, I, J, K, M, N, P thuộc đường tròn $(Q; \frac{R}{2})$ (đường tròn Euler, tâm Q là trung điểm của OH).
- Các điểm A', B', C' đối xứng H qua BC, CA, AB thuộc (O) .

Các tính chất trên vẫn đúng khi $\widehat{BAC} \geq 90^\circ$.



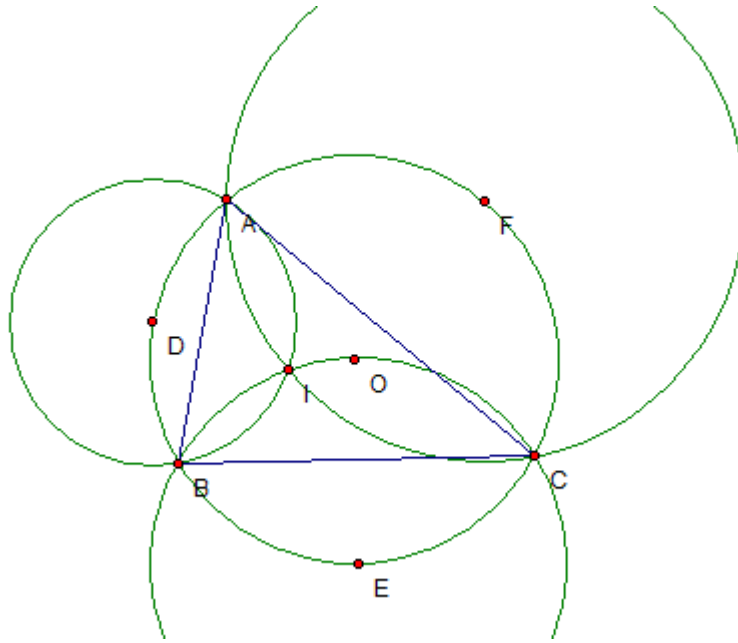
■ Cần phân 9 điểm trên thành 3 nhóm:

- Nhóm trung điểm các cạnh của tam giác.
- Nhóm các chân đường cao
- Nhóm trung điểm các đoạn nối trực tâm với các đỉnh.

Trong thực tế ít khi đề bài yêu cầu chứng minh cả 9 điểm thuộc đường tròn (vì dài nhưng ... dễ!). Đôi khi chọn mỗi nhóm 1 điểm và đổi cách phát biểu, tự nhiên ta thấy lạ và khó. VD:

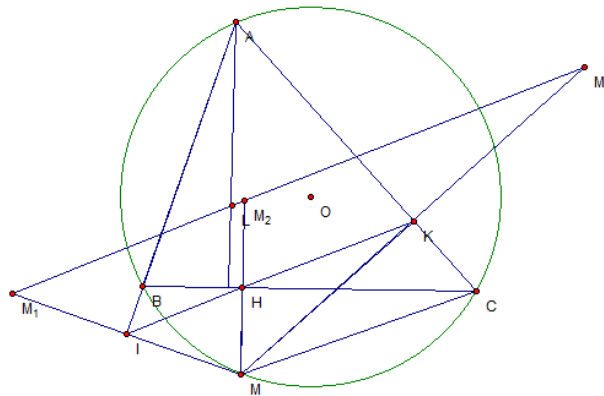
- Chứng minh JFKN nội tiếp
- Cho B, C cố định. A di động sao cho $\widehat{BAC} > 90^\circ$. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác JFN luôn đi qua 1 điểm cố định.

10. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). D, E, F lần lượt là điểm chính giữa các cung $\widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{AB}$ nhỏ. Ta có các đường tròn tâm D qua A, B; tâm E qua B, C; tâm F qua C, A đồng quy tại tâm tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



11. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). M là điểm bất kì trên (O) (M không trùng A, B, C). Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của M lên BC, CA, AB. M_1, M_2, M_3 lần lượt đối xứng với M qua AB, BC, CA. L là trực tâm tam giác ABC.

- H, I, K thẳng hàng (đường thẳng Simpson).
- M_1, M_2, M_3, L thẳng hàng. (đường thẳng Steiner)



12. Cho tam giác ABC nội tiếp (O):

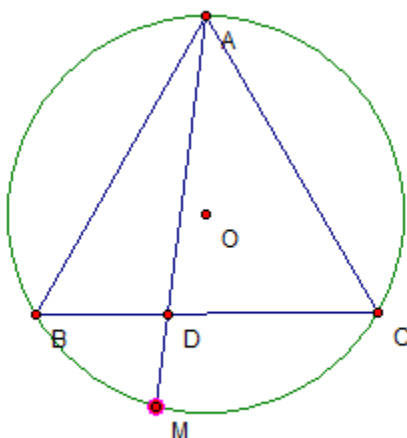
- A, C cố định, B di động trên cung $\widehat{AC}$ thì chu vi và diện tích tam giác ABC lớn nhất $\Leftrightarrow$ B là điểm chính giữa cung $\widehat{AC}$.
- Suy ra: Tứ giác lồi ABCD nội tiếp (O) có đường chéo AC cố định có chu vi và diện tích lớn nhất $\Leftrightarrow$ B, D là các điểm chính giữa 2 cung $\widehat{AC}$.
- Trong các tam giác nội tiếp (O), tam giác đều có chu vi và diện tích lớn nhất.
- Trong các tứ giác lồi nội tiếp (O), hình vuông có chu vi và diện tích lớn nhất.

13. Cho tam giác ABC đều nội tiếp (O; R). $M \in \widehat{BC}$, AM cắt BC tại D.

- $MB + MC = MA$
- $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} = \frac{1}{MD}$

14. Tổng quát hơn:

- Cho tam giác ABC cân ở A, nội tiếp (O;R) và $\widehat{BC} \geq 120^\circ$. AM cắt BC ở D thì:
 - a) $MB + MC \geq MA$
 - b) $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \geq \frac{1}{MD}$
- Cho tam giác ABC cân ở A, nội tiếp (O;R) và $\widehat{BC} \leq 120^\circ$. AM cắt BC ở D thì:
 - a) $MB + MC \leq MA$
 - b) $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \leq \frac{1}{MD}$



15. Các cung đặc biệt và độ dài dây tính theo R:

Số đo cung $\widehat{BC}$	Độ dài dây BC
180°	$BC = 2R$
150°	$BC = \frac{R(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2}$
120°	$BC = R\sqrt{3}$
90°	$BC = R\sqrt{2}$
60°	$BC = R$
30°	$BC = \frac{R(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2}$

16. Đường tròn nội tiếp:

16.1. Tứ giác ABCD ngoại tiếp (O) $\Leftrightarrow AB + CD = AD + BC$

16.2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O; R) và có đường tròn nội tiếp (I; r). Gọi M, N, P lần lượt là điểm chính giữa các cung $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, $\widehat{AB}$. Ta có:

- M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC
- Tâm các đường tròn ngoại tiếp (AIB), (BIC), (CIA) thuộc (O)
- $OI = \sqrt{R(R - 2r)}$
- $R \geq 2r$

