TRƯỜNG THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC

Đề chính thức
(Đề thi gồm 01 trang)

KỲ THI THỬ ĐẠI HỌC LẦN 1 NĂM HỌC 2013-2014

Môn: Toán 12. Khối A, A1, B.

Thời gian làm bài: 180 phút (Không kể thời gian giao đề)

A.PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (8,0 *điểm*)

Câu 1. ***(2,5 điểm).*** Cho hàm số $y = mx^3 - (2m+1)x^2 + m + 1 \ \ (Cm)$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.
2) Tìm tất cả các giá trị của tham số $m \neq 0$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị tại giao điểm của nó với trục tung tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Câu 2. ***(1,25 điểm)*** **.** Giải phương trình:

$$3\left(1-\sqrt{3}\right)\cos 2x + 3\left(1+\sqrt{3}\right)\sin 2x = 8\left(\sin x + \cos x\right)\left(\sqrt{3}\sin^3 x + \cos^3 x\right) - 3 - 3\sqrt{3}.$$

Câu 3. ***(1,25 điểm)*** **.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{x}{y} \\ \sqrt{5y-1} - x\sqrt{y} = 1 \end{cases} \quad \left(x, y \in \mathbb{R}\right).$

Câu 4. ***(1,0 điểm).*** Tính giới hạn : $L = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x+6} - \sqrt[4]{7x+2}}{x-2}$

Câu 5. ***(1,0 điểm).*** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông với cạnh $2a$, mặt bên $\left(SAB\right)$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ và $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$.

Hãy tính thể tích của hình chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB theo a.

Câu 6. **(*1,0 điểm).*** Xét các số thực dương a, b, c thoả mãn $ab + bc + ca = 7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{8a^4+1}{a^2} + \dfrac{108b^5+1}{b^2} + \dfrac{16c^6+1}{c^2}$

B. PHẦN RIÊNG (2,0 *điểm*). *Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2)*

1.Theo chương trình Chuẩn

Câu 7A. ***(1,0 điểm)*** . Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có $A\left(2;0\right)$, $B\left(3;0\right)$ và diện tích bằng 4. Biết rằng giao điểm của hai đường chéo AC và BD nằm trên đường thẳng $y = x$, hãy tìm toạ độ của các đỉnh C, D.

Câu 8A ***(1,0điểm).*** Tính tổng : $S_1 = 1^2.C_{2013}^1 + 2^2.C_{2013}^2 + 3^2.C_{2013}^3 + \cdots + 2013^2.C_{2013}^{2013}$

2.Theo chương trình nâng cao.

Câu 7B ***(2,0 điểm)*** .Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đường cao kẻ từ B và phân giác trong kẻ từ A lần lượt có phương trình : $3x + 4y + 10 = 0$ và $x - y + 1 = 0$. Biết rằng điểm $M\left(0; 2\right)$ nằm trên đường thẳng AB và $MC = \sqrt{2}$, tìm toạ độ các đỉnh của tam giác.

Câu 8 B ***(1,0 điểm).*** Tính tổng : $S_2 = \dfrac{C_{2013}^0}{1} + \dfrac{C_{2013}^1}{2} + \dfrac{C_{2013}^2}{3} + \cdots + \dfrac{C_{2013}^{2013}}{2014}$

---------- **HẾT** ----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

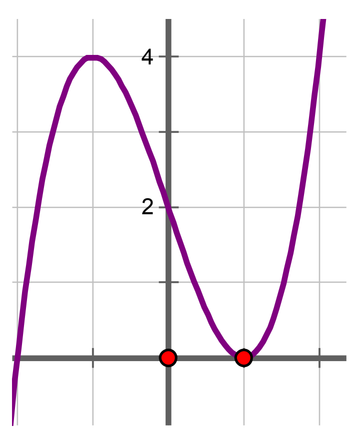
Họ và tên thí sinh:……………………………………; Số báo danh:………………………

SỞ GD-ĐT VĨNH PHÚC
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

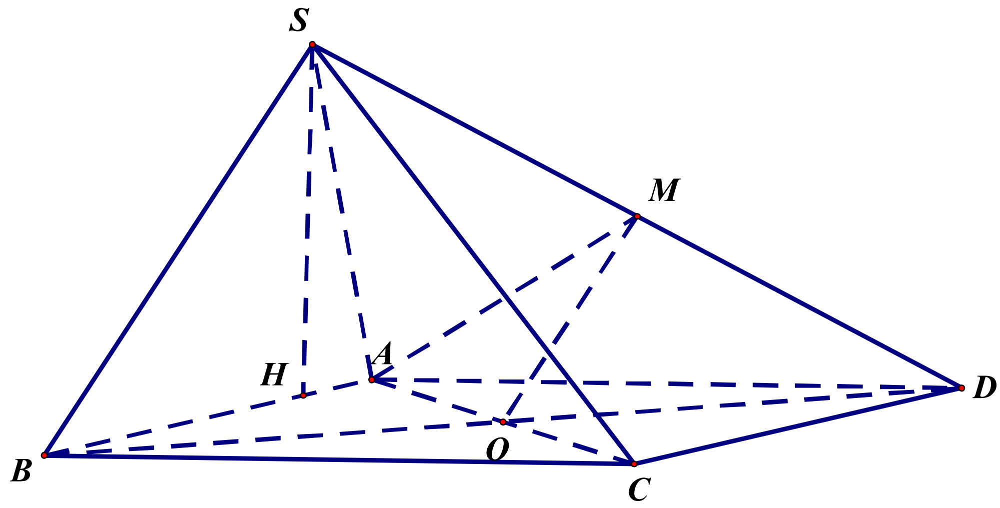
THI KHSCL LẦN I NĂM HỌC 2013 – 2014
HƯỚNG DẪN CHẤM TOÁN 12 A,B,A1

Hướng dẫn chung.

- Mỗi một bài toán có thể có nhiều cách giải, trong HDC này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Học sinh có thể giải theo nhiều cách khác nhau, nếu đủ ý và cho kết quả đúng, giám khảo vẫn cho điểm tối đa của phần đó.
- Câu (Hình học không gian), nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình chính của bài toán, thì không cho điểm; câu (Hình học giải tích) không nhất thiết phải vẽ hình.
- Điểm toàn bài chấm chi tiết đến 0.25, không làm tròn.
- HDC này có **04** trang.

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1	1. Khi $m=1: y = x^3 - 3x + 2$ + TXĐ: $\mathbb{R}$ + Sự biến thiên: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1),\ y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$	**0.25**
	$y' > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$ suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1),(1;+\infty)$; $y' < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ suy ra hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$. Hàm số đạt cực đại tại $x=-1, y_{cd} = y(-1) = 4;$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1, y_{ct} = y(1) = 0.$	**0.25**
	$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = -\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = +\infty$ $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & -1 & & 1 & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline y & & & 4 & & & & +\infty \\ & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\ & -\infty & & & & 0 & & \end{array}$	**0.25**
	+ Đồ thị - Giao Ox: $(-2;0),(1;0)$; - Giao Oy: $(0;2)$; - Điểm uốn: $I(0;2)$ suy ra đồ thị tự xứng qua $I(0;2)$ 	**0. 50**
	2. Đồ thị $(C_m): y = mx^3 - (2m+1)x + m + 1$ cắt trục tung tại $M(0;m+1)$.	**0.25**

	$y' = 3mx^2 - (2m+1) \Rightarrow y'(0) = -(2m+1)$	
	Từ đó, khi $m \neq 0$, tiếp tuyến t_m của (C_m) tại M có phương trình $y = -(2m+1)x + m + 1$	**0.25**
	Do (t_m) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4 nên ta có hệ $\begin{cases} m \neq -\dfrac{1}{2} \\ \lvert m+1\rvert \cdot \left\lvert \dfrac{m+1}{2m+1} \right\rvert = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \dfrac{1}{2} \\ (m+1)^2 = 8\lvert 2m+1\rvert \end{cases}$	**0. 50**
	Giải hệ, thu được $m = 7 \pm \sqrt{56}$ và $-9 \pm \sqrt{72}$. Đối chiếu điều kiện và kết luận	**0.25**
2	+ Để ý rằng $\sin 2x + 1 = (\sin x + \cos x)^2; \sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$ và $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ nên phương trình được viết về dạng $(\sin x + \cos x)(\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x) = 0$	**0. 5**
	+ Giải phương trình $\sin x + \cos x = 0$ ta được họ nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	**0.25**
	+ Giải phương trình $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 0$ ta được họ nghiệm $x = \dfrac{\pi}{6} + \ell\pi, \ell \in \mathbb{Z}$	**0.25**
	+ Kết luận nghiệm	**0.25**
3	Điều kiện $x \neq 0, y \geq \dfrac{1}{5}$ Từ phương trình thứ nhất của hệ suy ra hoặc $y = x^2$ hoặc $xy = -1$	**0.25**
	+ Nếu $xy = -1$ thì $x < 0 < y$ và phương trình thứ hai trở thành $\sqrt{5y-1} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 1$ Phương trình này tương đương với $\sqrt{5y^2 - y} = \sqrt{y} - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ 2\sqrt{y} = 1 - 2y - 5y^2 \end{cases}$ Do $y \geq 1$ nên hệ phương trình này vô nghiệm.	**0. 5**
	+ Nếu $y = x^2$, thay vào phương trình thứ hai, ta được $\sqrt{5x^2 - 1} = 1 + x\lvert x\rvert$. Giải phương trình, được $(x; y) = (1;1), (\sqrt{2}; 2), (-\sqrt{7-\sqrt{41}}; 7 - \sqrt{41})$ Kết luận nghiệm…	**0.5**
4	$L = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\left(\sqrt[3]{x+6} - 2\right) - \left(\sqrt[4]{7x+2} - 2\right)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{x-2} - \dfrac{\sqrt[4]{7x+2} - 2}{x-2}\right)$	**0.25**
	$L = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+6-8}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4\right)} - \dfrac{7x+2-16}{(x-2)\left(\sqrt[4]{7x+2} + 2\right)\left(\sqrt{7x+2} + 4\right)}\right)$	**0.25**
	$L = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4\right)} - \dfrac{7}{\left(\sqrt[4]{7x+2} + 2\right)\left(\sqrt{7x+2} + 4\right)}\right) = \dfrac{1}{12} - \dfrac{7}{32} = -\dfrac{13}{96}$	**0.5**

5		
	+ Từ giả thiết suy ra tam giác SAB vuông tại S và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (H là hình chiếu của A trên AB). Từ đó, do $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot AB \cdot AD = \frac{2a^3}{\sqrt{3}}$ (đ.v.t.t)	**0.25**
	+ Do $ABCD$ là hình vuông, nên $S_{ABC} = S_{ADC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ suy ra $$V_{S.ABC} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{\sqrt{3}} \text{ (đ.v.t.t)}$$ Mà $V_{S.ABC} = \frac{1}{6} \cdot AC \cdot SB \cdot d(AC;SB) \cdot \sin\left(\widehat{AC;SB}\right)$ nên $$d(AC;SB) = \frac{2a^3\sqrt{3}}{AC \cdot SB \cdot \sin\left(\widehat{AC;SB}\right)}$$	**0.25**
	+ Gọi O,M theo thứ tự là trung điểm AC, SD. Khi đó $\left(\widehat{AC;SB}\right) = \left(\widehat{OA;OM}\right)$ Áp dụng định lý cô-sin cho tam giác AOM tính được $\cos\widehat{AOM} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ suy ra $\sin\left(\widehat{AC;SB}\right) = \sin\widehat{AOM} = \frac{\sqrt{10}}{4}$	**0.25**
	Vậy $d(AC;SB) = \cdots = \frac{2a}{\sqrt{5}}$ (đ.v.đ.d)	**0.25**
Chú ý: Với bài toán này (phần tính khoảng cách), có nhiều cách giải, chẳng hạn học sinh có thể sử dụng vectơ, tọa độ hay dựng đoạn vuông góc chung. Nếu cách giải đúng và cho kết quả đúng, giám khảo vẫn cho điểm tối đa của phần đó. Cách giải trong bài toán này sử dụng kết quả của Bài tập 6 (tr. 26) SGK Hình học 12 (CCT)		
6	Viết lại giả thiết về dạng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 7$	**0.25**
	Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $$A = 8a^2 + \frac{1}{2a^2} \geq 4, "=" \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$ $$B = 54b^3 + 54b^3 + \frac{2}{9b^2} + \frac{2}{9b^2} + \frac{2}{9b^2} \geq 10, "=" \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}$$ $$C = 16c^4 + \frac{1}{4c^2} + \frac{1}{4c^2} \geq 3, "=" \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$	**0.5**

	Từ đó, với $D=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{3b^2}+\frac{1}{2c^2}$, theo bất đẳng thức Cauchy – Bunhiacopsky - Schwarz, thì $P=A+B+C+D\ge 4+10+3+\frac{1}{2+3+2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=24,"="\Leftrightarrow a=c=\frac{1}{2},b=\frac{1}{3}$ KL …	**0.25**
7a	Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành, thế thì $I(a;a)$ với a là số thực nào đó. Suy ra $C(2a-2;2a),D(2a-3;2a)$.	**0.25**
	Từ đó, do diện tích của hình bình hành bằng 4 nên $\|2a\|=4\Leftrightarrow a=\pm 2$.	**0.25**
	Với $a=2:C(2;4),D(1;4)$; với $a=-2:C(-6;-4),D(-7;-4)$	**0.25**
	Kết luận	**0.25**
8a	Tính tổng : $S_1=1^2.C_{2013}^1+2^2.C_{2013}^2+3^2.C_{2013}^3+\cdots+2013^2.C_{2013}^{2013}$ Số hạng tổng quát của tổng là $a_k=k^2C_{2013}^k=k.(k-1+1)C_{2013}^k\quad\forall k=1,2,...,2013$	**0.25**
	$a_k=k.(k-1)C_{2013}^k+kC_{2013}^k=k.(k-1)\frac{2013!}{k!(2013-k)!}+k.\frac{2013!}{k!(2013-k)!}\forall k=1,2,...,2013$	**0.25**
	$a_k=2012\cdot 2013C_{2011}^{k-2}+2013C_{2012}^{k-1}\ \ \forall k=1,2,...,2013$	**0.25**
	$S_1=2012\cdot 2013\left(C_{2011}^0+C_{2011}^1+\cdots+C_{2011}^{2011}\right)+2013\left(C_{2012}^0+C_{2012}^1+\cdots+C_{2012}^{2012}\right)$ $S_1=2012\cdot 2013\cdot(1+1)^{2011}+2013\cdot(1+1)^{2012}=2012\cdot 2013\cdot 2^{2011}+2013\cdot 2^{2012}=2013\cdot 2014\cdot 2^{2011}$	**0.25**
7b	$h_b:3x+4y+10=0,\ell_a:x-y+1=0$ + Do $M(0;2)\in(AB)$ nên điểm $N(1;1)$ đối xứng với M qua ℓ_a nằm trên AC.	**0.25**
	+ Suy ra A là giao điểm của đường thẳng d qua N, vuông góc với h_b và đường thẳng ℓ_a. Từ đó $A(4;5)$.	**0.25**
	+ B là giao điểm của đường thẳng AM với h_b. Từ đó $B\left(-3;-\frac{1}{4}\right)$	**0.25**
	+ Do $MC=\sqrt{2}$ nên C là giao điểm của đường tròn tâm M bán kính $\sqrt{2}$ với đường thẳng d. Suy ra $C(1;1)$ hoặc $C\left(\frac{33}{25};\frac{31}{25}\right)$	**0.25**
8b	Tính tổng : $S_2=\frac{C_{2013}^0}{1}+\frac{C_{2013}^1}{2}+\frac{C_{2013}^2}{3}+\cdots+\frac{C_{2013}^{2013}}{2014}$ Số hạng tổng quát của tổng là $a_k=\frac{C_{2013}^k}{k+1}\quad\forall\ k=0,1,2,...,2013$	**0.25**
	$a_k=\frac{C_{2013}^k}{k+1}=\frac{2013!}{(k+1)\cdot k!(2013-k)!}=\frac{1}{2014}\cdot\frac{2014!}{(k+1)!(2013-k)!}\quad\forall\ k=0,1,2,...,2013$	**0.25**
	Vậy ta được $a_k=\frac{C_{2014}^{k+1}}{2014}\quad\forall\ k=0,1,2,...,2013$	**0.25**
	$S_2=\frac{1}{2014}\cdot\left(C_{2014}^1+C_{2014}^2+\cdots+C_{2014}^{2014}\right)=\frac{1}{2014}\cdot\left[(1+1)^{2014}-C_{2014}^0\right]=\frac{2^{2014}-1}{2014}$	**0.25**