

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
b) Gọi d là đường thẳng đi qua $A(2;4)$ và có hệ số góc là k . Tìm k để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tam giác OBC cân tại O (với O là gốc tọa độ).

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình: $\cot x = \frac{2}{\sin 2x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Câu 3 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 2y^3 = x + 4y \\ 13x^2 - 41xy + 21y^2 = -9 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 4 (1,0 điểm). Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+4) \sin \frac{3}{x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt[3]{3x-5} - 1}{x-2}.$

Câu 5 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A; $AB = AC = a$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB , hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) trùng với điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMC . Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) .

Câu 6 (1,0 điểm). Cho $x; y; z$ là các số thực dương thay đổi sao cho $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz.$$

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc phần B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$. Các đỉnh B và D lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1: x + y - 8 = 0$ và $d_2: x - 2y + 3 = 0$. Đường thẳng AC có phương trình là $x + 7y - 31 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi $ABCD$ biết diện tích hình thoi $ABCD$ bằng 75 và điểm A có hoành độ âm.

Câu 8a (1,0 điểm). Cho $a = 5^{\log_5 \sqrt[3]{9^{x-1}+7}}$ và $b = 5^{-\frac{1}{5} \log_5 (3^{x-1}+1)}$. Tìm các số thực x biết rằng số hạng chứa a^3 trong khai triển Niu-tơn của $(a+b)^8$ là 224.

Câu 9a (1,0 điểm). Tìm các số thực m để bất phương trình $4^{x^2-2x} + m \cdot 2^{x^2-2x+1} + m \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 2]$.

A. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7b (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $C(4;3)$; đường phân giác trong và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác lần lượt có phương trình là $x + 2y - 5 = 0$ và $4x + 13y - 10 = 0$. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác ABC .

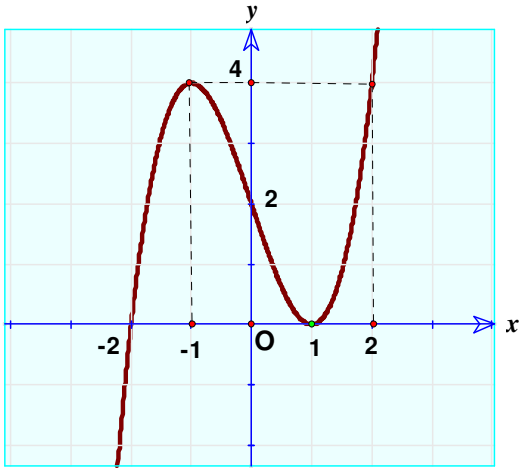
Câu 8b (1,0 điểm). Chứng minh rằng: $1^2 C_{2013}^1 + 2^2 C_{2013}^2 + \dots + 2012^2 C_{2013}^{2012} + 2013^2 C_{2013}^{2013} = 2013 \times 2014 \times 2^{2011}.$

Câu 9b (1,0 điểm). Tìm các số thực m để phương trình $m\sqrt{2x^2+9} = x+m$ có đúng một nghiệm thực.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Câu	Đáp án	Điểm																
1a	• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ • Sự biến thiên: - Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.	0,25																
	Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. - Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{\text{CD}} = 4$; đạt cực tiểu tại $x = 1$, $y_{\text{CT}} = 0$. - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.	0,25																
	- Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>4</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	y'	$+$	0	$-$	0	$+$	y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	0,25
	x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$													
y'	$+$	0	$-$	0	$+$													
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$														
• Đồ thị: 	0,25																	
1b	Đường thẳng d qua $A(2; 4)$ với hệ số góc k có phương trình là: $y = kx - 2k + 4$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d : $x^3 - 3x + 2 = kx - 2k + 4$ $\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x - k + 1) = 0$ $\Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x^2 + 2x - k + 1 = 0$ (*)	0,25																
	d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - (1 - k) > 0 \\ 9 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k \neq 9 \end{cases}$ (**)	0,25																
	O, B, C không thẳng hàng $\Leftrightarrow O \notin d \Leftrightarrow k \neq 2$. (***)																	
	Theo định lý Vi-ét: $\begin{cases} x_B + x_C = -2 \\ x_B x_C = 1 - k \end{cases}$. Ta có $y_B - y_C = (kx_B - 2k + 4) - (kx_C - 2k + 4) = k(x_B - x_C)$ và $y_B + y_C = (kx_B - 2k + 4) + (kx_C - 2k + 4) = k(x_B + x_C) - 4k + 8 = -6k + 8$. Tam giác OBC cân tại $O \Leftrightarrow OB = OC \Leftrightarrow x_B^2 + y_B^2 = x_C^2 + y_C^2$ $\Leftrightarrow (x_B + x_C)(x_B - x_C) = (y_C - y_B)(y_C + y_B) \Leftrightarrow -2(x_B - x_C) = -k(x_B - x_C)(-6k + 8)$	0,25																

	$\Leftrightarrow -2 = -k(-6k+8) \quad (\text{vì } x_B \neq x_C)$ $\Leftrightarrow 3k^2 - 4k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \text{ hoặc } k = \frac{1}{3} \quad (\text{thỏa } (**) \text{ và } (***)).$	0,25
2	Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$ Phương trình đã cho tương đương với: $\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$ $\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin x \cos 2x \Leftrightarrow \sin x \cos 2x = \sin^2 x \Leftrightarrow \sin x (\cos 2x - \sin x) = 0$ $\Leftrightarrow \cos 2x - \sin x = 0 \quad (\text{vì } \sin x \neq 0)$ $\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ (không thỏa mãn điều kiện). $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$ (thỏa mãn điều kiện).	0,25
		0,25
		0,25
3	$\begin{cases} x^3 - 2y^3 = x + 4y & (1) \\ 13x^2 - 41xy + 21y^2 = -9 & (2) \end{cases}$ Nhân vế trái (1) với vế phải (2) và vế phải (1) với vế trái (2), ta được phương trình: $-9(x^3 - 2y^3) = (x + 4y)(13x^2 - 41xy + 21y^2) \Leftrightarrow 22x^3 + 11x^2y - 143xy^2 + 66y^3 = 0$ $\Leftrightarrow (2x - y)(x - 2y)(x + 3y) = 0 \Leftrightarrow y = 2x \text{ hoặc } x = 2y \text{ hoặc } x = -3y.$ Thay $y = 2x$ vào (1), ta được: $(1) \Leftrightarrow 15x^3 + 9x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, lúc đó $y = 0$. Thử lại $x = y = 0$ không phải nghiệm của hệ đã cho. Thay $x = -3y$ vào (1), ta được: $(1) \Leftrightarrow 29y^3 + y = 0 \Leftrightarrow y = 0$, lúc đó $x = 0$. Thử lại $x = y = 0$ không phải nghiệm của hệ đã cho. Thay $x = 2y$ vào (1), ta được: $(1) \Leftrightarrow y^3 - y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ hoặc } y = \pm 1.$ $y = 0$ thì $x = 0$, thử lại không phải nghiệm của hệ đã cho. $y = 1$ thì $x = 2$, thử lại thỏa mãn hệ đã cho. $y = -1$ thì $x = -2$, thử lại thỏa mãn hệ đã cho. Vậy hệ có hai nghiệm là $(x; y) = (2; 1)$ và $(x; y) = (-2; -1).$	0,25
		0,25
		0,25
4	a/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+4) \sin \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3(x+4)}{x} \cdot \frac{\sin \frac{3}{x}}{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \left(1 + \frac{4}{x}\right) \cdot \frac{\sin \frac{3}{x}}{\frac{3}{x}}$ Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \left(1 + \frac{4}{x}\right) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$ nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{3}{x}}{\frac{3}{x}} = 1$. Suy ra $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+4) \sin \frac{3}{x} = 3.$ b/ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt[3]{3x-5} - 1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\sqrt{2x-3} \cdot \frac{\sqrt[3]{3x-5} - 1}{x-2} + \frac{\sqrt{2x-3} - 1}{x-2} \right]$	0,25
		0,25

	Từ bảng biến thiên suy ra $f(z) \geq \frac{52}{27}$ www.MATHVN.com Từ (1) và (2) ta có $F \geq \frac{52}{27}$. Vậy $F_{\min} = \frac{52}{27}$ đạt được khi $x = y = z = \frac{2}{3}$.	0,25
7a	$B \in d_1 \Leftrightarrow B(b; 8-b)$ và $D \in d_2 \Leftrightarrow D(2d-3; d)$. Suy ra $\overline{BD} = (-b+2d-3; d+b-8)$. I là trung điểm của BD nên $I\left(\frac{b+2d-3}{2}; \frac{d-b+8}{2}\right)$.	0,25
	Theo tính chất hình thoi: $\begin{cases} BD \perp AC \\ I \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_{AC}} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ I \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b-13d+13=0 \\ 2b-3d+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ d=1 \end{cases}$. Vậy $B(0;8), D(-1;1), I\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$.	0,25
	Ta có $A \in AC \Leftrightarrow A(-7a+31; a)$. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \Rightarrow AC = \frac{2S}{BD} = 15\sqrt{2} \Rightarrow IA = \frac{AC}{2} = \frac{15}{\sqrt{2}}$.	0,25
	Ta có $IA = \frac{15}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left(-7a + \frac{63}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{15}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow a=3$ hoặc $a=6$. Suy ra $A(10;3)$ hoặc $A(-11;6)$. Do $x_A < 0$ nên $A(-11;6)$, từ đó $C(10;3)$.	0,25
8a	Ta có $a = (9^{x-1} + 7)^{\frac{1}{3}}; b = (3^{x-1} + 1)^{-\frac{1}{5}}$.	0,25
	Số hạng chứa a^3 trong khai triển Niu-tơn của $(a+b)^8$ là: $C_8^5 \left[(9^{x-1} + 7)^{\frac{1}{3}} \right]^3 \cdot \left[(3^{x-1} + 1)^{-\frac{1}{5}} \right]^5 = 56(9^{x-1} + 7)(3^{x-1} + 1)^{-1}$.	0,25
	Theo giả thiết, ta có: $56(9^{x-1} + 7)(3^{x-1} + 1)^{-1} = 224 \Leftrightarrow (3^{x-1})^2 - 4 \cdot 3^{x-1} + 3 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x-1} = 1 \\ 3^{x-1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.	0,25
9a	Đặt $t = 2^{x^2-2x}$. Vì $0 \leq x \leq 2$ nên $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.	0,25
	Bất phương trình đã cho trở thành: $t^2 + 2mt + m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{-t^2}{2t+1} = f(t)$ với $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.	0,25
	Ta có $f'(t) = \frac{-2t^2 - 2t}{(2t+1)^2} < 0, \forall t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$, hơn nữa $f(t)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ nên suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.	0,25
	Do đó $m \leq f(t), \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Leftrightarrow m \leq \min_{t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]} f(t) \Leftrightarrow m \leq f(1) \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{3}$.	0,25
7b	Gọi AD là phân giác trong và AM là trung tuyến. Tọa độ của A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 4x+13y-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=-2 \end{cases}$. Vậy $A(9; -2)$. Từ đó phương trình AC là: $x+y-7=0$.	0,25
	Gọi C' là điểm đối xứng của C qua đường phân giác trong AD thì C' thuộc AB. Đường thẳng CC' qua $C(4;3)$ và vuông góc với AD nên có phương trình: $2x-y-5=0$.	0,25

	Gọi H là giao điểm của CC' và AD thì $H(3;1)$. Từ đó $C'(2;-1)$. Suy ra phương trình AB là $x + 7y + 5 = 0$.	0,25													
	Đường thẳng MH qua $H(3;1)$ và song song với AB nên có phương trình $x + 7y - 10 = 0$. Vì M là giao điểm của MH và AM nên $M(-4;2)$. Suy ra phương trình BC là $x - 8y + 20 = 0$. Thử lại ta thấy các điểm B, C nằm về hai phía của đường thẳng AD nên AD là đường phân giác trong của tam giác ABC. Vậy $AC : x + y - 7 = 0; AB : x + 7y + 5 = 0$ và $BC : x - 8y + 20 = 0$.	0,25													
8b	Ta có $(1 + x)^{2013} = C_{2013}^0 + C_{2013}^1 x + C_{2013}^2 x^2 + \dots + C_{2013}^{2012} x^{2012} + C_{2013}^{2013} x^{2013}$.	0,25													
	Lấy đạo hàm 2 vế, ta được: $2013(1 + x)^{2012} = C_{2013}^1 + 2C_{2013}^2 x + \dots + 2012C_{2013}^{2012} x^{2011} + 2013C_{2013}^{2013} x^{2012} \quad (1)$	0,25													
	Nhân 2 vế của 1 với x , ta được: $2013x(1 + x)^{2012} = C_{2013}^1 x + 2C_{2013}^2 x^2 + \dots + 2012C_{2013}^{2012} x^{2012} + 2013C_{2013}^{2013} x^{2013}$ Lấy đạo hàm 2 vế, ta được: $2013(1 + x)^{2011} (2013x + 1) = C_{2013}^1 + 2^2 C_{2013}^2 x + \dots + 2012^2 C_{2013}^{2012} x^{2011} + 2013^2 C_{2013}^{2013} x^{2012}.$	0,25													
	Cho $x = 1$, ta được $1^2 C_{2013}^1 + 2^2 C_{2013}^2 + \dots + 2012^2 C_{2013}^{2012} + 2013^2 C_{2013}^{2013} = 2013 \times 2014 \times 2^{2011}$ (đpcm).	0,25													
9b	Ta có phương trình đã cho tương đương với: $\frac{x}{\sqrt{2x^2 + 9} - 1} = m$	0,25													
	Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 9} - 1}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.														
	$f'(x) = \frac{2(36 - x^2)}{\sqrt{2x^2 + 9} (9 + \sqrt{2x^2 + 9}) (\sqrt{2x^2 + 9} - 1)^2}.$														
	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 6; f(6) = \frac{3}{4}; f(-6) = -\frac{3}{4}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$	0,25													
	Bảng biến thiên:	0,25													
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-6</td><td>6</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\frac{1}{\sqrt{2}}$</td><td>$-\frac{3}{4}$</td><td>$\frac{3}{4}$</td><td>$\frac{1}{\sqrt{2}}$</td></tr></table>	x		$-\infty$	-6	6	$+\infty$	$f'(x)$	-	0	+	0	$f(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
x	$-\infty$	-6	6	$+\infty$											
$f'(x)$	-	0	+	0											
$f(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$											
	Dựa vào bảng biến thiên, ta có:	0,25													
Phương trình đã cho có đúng một nghiệm khi và chỉ khi $m = \pm \frac{3}{4}$ hoặc $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq m \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$															

HẾT