

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7.0 điểm).

Câu 1 (2.0 điểm). Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$ (C)

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
- Lập phương trình của parabol (P) có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$), biết rằng parabol (P) đi qua các điểm $M(x_i; y_i)$ thuộc đồ thị (C) có tọa độ là các số nguyên với hoành độ $x_i > -4$.

Câu 2 (1.0 điểm). Giải phương trình $\frac{4\cos^2 \frac{x}{2} + 2\cos^2(\frac{7\pi}{4} - x) - \sqrt{3}\cos(2x - 3\pi) - 3}{1 - 2\sin x} = 0$

Câu 3 (1.0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

Câu 4 (1.0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x \cdot \sqrt{x} + x}{(x+1)e^x} dx$.

Câu 5 (1.0 điểm). Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm cạnh $C'A'$, I là giao điểm của các đường thẳng AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối $IABC$ và khoảng cách từ A tới mặt phẳng (IBC) .

Câu 6 (1.0 điểm). Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + 1 = z \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x^3 y^3}{(x + yz)(y + zx)(z + xy)^2}$

PHẦN RIÊNG (3.0 điểm). Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc phần B.

A. Theo chương trình nâng cao.

Câu 7a (1.0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trực tâm $H(5;5)$, phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là $x + y - 8 = 0$. Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua hai điểm $M(7;3), N(4;2)$. Tính diện tích tam giác ABC .

Câu 8a (1.0 điểm). Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$, với trọng tâm G của tứ diện thuộc mặt phẳng $(\beta): y - 3z = 0$, đỉnh A thuộc mặt phẳng $(\alpha): y - z = 0$, các đỉnh $B(-1;0;2)$, $C(-1;1;0)$, $D(2;1;-2)$ và thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $\frac{5}{6}$. Tìm tọa độ đỉnh A .

Câu 9a (1,0 điểm). Trong một hộp gồm có 8 viên bi xanh và 6 viên bi trắng, chọn ngẫu nhiên 5 viên bi. Tính xác suất để 5 viên bi được chọn có cả bi xanh và bi trắng.

B. Theo chương trình chuẩn.

Câu 7b (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 6. Phương trình đường thẳng chứa đường chéo BD là $2x + y = 11$, đường thẳng AB đi qua $M(4;2)$, đường thẳng BC đi qua $N(8;4)$. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh hình chữ nhật, biết các điểm B, D đều có hoành độ lớn hơn 4.

Câu 8b (1.0 điểm). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;0)$, $B(2;1;2)$ và mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A vuông góc với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (Q) là lớn nhất.

Câu 9b (1.0 điểm). Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $\frac{iz - (1+3i)\bar{z}}{1+i} = |z|^2$.

Câu	ý	Nội dung	Điểm												
1	a (1điểm)	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1} (C)$ • Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. • Sự biến thiên: - Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$; tiệm cận ngang $y = 2$. $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty$; tiệm cận đứng $x = -1$. - Chiều biến thiên: $y' = \frac{5}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$. - Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. • Bảng biến thiên: <table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>y'</td><td></td><td>+</td><td>+</td></tr> <tr> <td>y</td><td>2</td><td>$+\infty$</td><td>2</td></tr> </table> • Đồ thị hàm số:	x	$-\infty$	-1	$+\infty$	y'		+	+	y	2	$+\infty$	2	0,25 0,25 0,25 0,25
x	$-\infty$	-1	$+\infty$												
y'		+	+												
y	2	$+\infty$	2												
	b (1điểm)	$y = \frac{2x-3}{x+1} (C)$ Ta có: $y = \frac{2x-3}{x+1} = 2 - \frac{5}{x+1}$, để y nguyên thì 5 phải chia hết cho $x+1$, tức $x+1$ phải là ước của 5, suy ra: $x+1 \in \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow x \in \{0; -2; 4; -6\}$ Do đó các điểm $M(x_i; y_i)$ thuộc đồ thị (C) có tọa độ là các số nguyên với $x_i > -4$ là: $M_1(0; -3); M_2(-2; 7); M_3(4; 1)$. Từ điều kiện parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$, đi qua các điểm $M_1; M_2; M_3$ ta có hệ phương trình:	0,25 0,25 0,25												

4	1 điểm	Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x \cdot \sqrt{x} + x}{(x+1) \cdot e^x} dx$ Ta có : $I = \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{e^x} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx}_{I_2}$ *) Tính $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{e^x} dx$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$ Khi đó : $I_1 = (-xe^{-x}) \Big _0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} - e^{-x} \Big _0^1 = 1 - \frac{2}{e}$. *) Tính $I_2 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$ Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$ Đổi cận : với $x = 0$ thì $t = 0$. với $x = 1$ thì $t = 1$. Khi đó : $I_2 = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt = \int_0^1 (2 - \frac{2}{t^2 + 1}) dt = 2t \Big _0^1 - 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} = 2 - 2I_3$ *) Tính $I_3 = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1}$; Bằng cách đặt $t = \tan u$. Từ đó tính được $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 u} \frac{du}{\tan^2 u + 1} = \frac{\pi}{4}$ Kết quả : $I = 3 - \frac{2}{e} - \frac{\pi}{2}$	0,25 0,25 0,25 0,25
5	1 điểm	Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, với $AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm cạnh $C'A'$, I là giao điểm của các đường thẳng AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối $IABC$ và khoảng cách từ A tới mặt phẳng (IBC).	

		Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của I trên AC, A'C'. Khi đó do $(ABC) \perp (ACC'A')$ nên $IH \perp (ABC)$. Từ đó $V_{I.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot IH$ (1) Do $ACC'A'$ là hình chữ nhật nên $AC = \sqrt{A'C^2 - AA'^2} = a\sqrt{5}$. Do tam giác ABC vuông tại B nên $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$. Suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = a^2$. (2) Theo định lý Thalet, ta có $\frac{IH}{IK} = \frac{AC}{A'M} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{IH}{KH} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{2}{3} HK = \frac{4}{3} a$ (3) Từ (1), (2), (3) suy ra $V_{I.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot IH = \frac{4}{9} a^3$. Từ (3) và theo định lý Thales, ta được $IC = \frac{2}{3} A'C$. Suy ra $S_{\Delta BIC} = \frac{2}{3} S_{\Delta BA'C}$. Do $ABB'A'$ là hình chữ nhật nên $BA' = \sqrt{BA^2 + BB'^2} = a\sqrt{5}$. Do $BC \perp BA$, $BC \perp BB'$ nên $BC \perp (BAA'B') \Rightarrow BC \perp BA'$. Suy ra $S_{\Delta BA'C} = \frac{1}{2} BC \cdot BA' = a^2 \sqrt{5}$. Từ đó $S_{\Delta BIC} = \frac{2}{3} S_{\Delta BA'C} = \frac{2\sqrt{5}a^2}{3}$. Từ đó, do $V_{I.ABC} = V_{A.IBC}$. Suy ra $d(A, (IBC)) = \frac{3V_{I.ABC}}{S_{IBC}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.	0,25
6	(1điểm)	Câu 6 (1.0 điểm). Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + 1 = z \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{x^3 y^3}{(x + yz)(y + zx)(z + xy)^2}$ ----- Ta có: $x + yz = yz + z - y - 1 = (y + 1)(z - 1).$ $y + zx = zx - x + z - 1 = (x + 1)(z - 1)$ $z + xy = x + y + 1 + xy = (x + 1)(y + 1)$ $z - 1 = x + y$ Khi đó: $P = \frac{x^3 y^3}{(x + yz)(y + zx)(z + xy)^2} = \frac{x^3 y^3}{(z - 1)^2 (x + 1)^3 (y + 1)^3} = \frac{x^3 y^3}{(x + y)^2 (x + 1)^3 (y + 1)^3}$ Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy$ $x + 1 = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}} \Rightarrow (x + 1)^3 \geq \frac{27}{4} x^2$ $y + 1 = \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{y^2}{4}} \Rightarrow (y + 1)^3 \geq \frac{27}{4} y^2$	0,25
			0,25

		Suy ra: $P = \frac{x^3 y^3}{(x+y)^2 (x+1)^3 (y+1)^3} \leq \frac{x^3 y^3}{4xy \cdot \frac{27}{4} x^2 \cdot \frac{27}{4} y^2} = \frac{4}{729}$	0,25
		Vậy GTLN của $P = \frac{4}{729}$; đạt được khi $\begin{cases} x = y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$	0,25
7a	1 điểm	Câu 7a (1.0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(5;5)$, phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là $x + y - 8 = 0$. Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua hai điểm $M(7;3), N(4;2)$. Tính diện tích tam giác ABC.	
		Gọi H' là điểm đối xứng với H qua BC. Phương trình HH': $x - y = 0$. Khi đó, giao điểm của HH' và BC là $I(4;4)$. Suy ra tọa độ điểm $H'(3;3)$. Chứng minh được H' nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi Pt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 (a^2 + b^2 - c > 0)$ Do M, N, H' thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên ta có $\begin{cases} 7^2 + 3^2 + 14a + 6b + c = 0 \\ 3^2 + 3^2 + 6a + 6b + c = 0 \\ 4^2 + 2^2 + 8a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = -4 \\ c = 36 \end{cases}$ Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 36 = 0 (C)$ Vì $A = HH' \cap (C) \Rightarrow A(6;6)$ (vì $A \neq H'$) $\{B; C\} = BC \cap (C) \Rightarrow$ Tọa độ B, C là nghiệm của phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 8y + 36 = 0 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow BC = 3\sqrt{2}$ Diện tích tam giác ABC là	0,25
			0,25

		$S_{ABC} = \frac{1}{2} d(A, BC) \cdot BC = \frac{1}{2} \frac{ 6+6-8 }{\sqrt{2}} \cdot 3\sqrt{2} = 6 \text{ (đvdt)}$	0,25
8a	1 điểm	Câu 8a (1,0 điểm). Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$, với trọng tâm G của tứ diện thuộc mặt phẳng $(\beta): y - 3z = 0$, đỉnh A thuộc mặt phẳng $(\alpha): y - z = 0$, các đỉnh $B(-1;0;2)$, $C(-1;1;0)$, $D(2;1;-2)$ và thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $\frac{5}{6}$. Tìm tọa độ đỉnh A. Gọi $G(x_G; y_G; z_G)$, $A(x_A; y_A; z_A) \Rightarrow \begin{cases} 4x_G = x_A \\ 4y_G = y_A + 2 \\ 4z_G = z_A \end{cases}$ Từ $G \in (\beta), A \in (\alpha) \Rightarrow \begin{cases} y_A = 1 \\ z_A = 1 \end{cases} \Rightarrow A(x_A; 1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (x_A + 1; 1; -1)$. Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{6} [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] \cdot \overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC} = (0; 1; -2)$, $\overrightarrow{BD} = (3; 1; -4)$. Suy ra $[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (-2; -6; -3) \Rightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] \cdot \overrightarrow{BA} = -2x_A - 5 \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} -2x_A - 5$. Vậy $\frac{1}{6} -2x_A - 5 = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 2x_A + 5 = \pm 5 \Rightarrow x_A = 0$, hoặc $x_A = -5$. Với $x_A = 0 \Rightarrow A(0; 1; 1)$, với $x_A = -5 \Rightarrow A(-5; 1; 1)$.	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
9a	1 điểm	Câu 9a (1,0 điểm). Trong một hộp gồm có 8 viên bi xanh và 6 viên bi trắng, chọn ngẫu nhiên 5 viên bi. Tính xác suất để 5 viên bi được chọn có cả bi xanh và bi trắng. Số cách chọn ra 5 viên bi từ 14 viên bi là $C_{14}^5 = 2002$ (cách), suy ra, không gian mẫu là $\Omega = 2002$. Gọi A là biến cố trong 5 viên bi được chọn có cả bi xanh và bi trắng. Ta có $\Omega_A = C_8^1 C_6^4 + C_8^2 C_6^3 + C_8^3 C_6^2 + C_8^4 C_6^1 = 1940$. Vậy $P(A) = \frac{ \Omega_A }{ \Omega } = \frac{1940}{2002} = \frac{970}{1001} \approx 0,969030969$	0,25 0,5 0,25
7b	1 điểm	Câu 7b (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 6. Phương trình đường thẳng chứa đường chéo BD là $2x + y = 11$, đường thẳng AB đi qua $M(4; 2)$, đường thẳng BC đi qua $N(8; 4)$. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh hình chữ nhật, biết các điểm B, D đều có hoành độ lớn hơn 4. $B \in BD \Rightarrow B(t; 11 - 2t) \Rightarrow \overrightarrow{MB} = (t - 4; 9 - 2t)$, $\overrightarrow{NB} = (t - 8; 7 - 2t)$ $\Rightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{NB} = 0$ $\Leftrightarrow (t - 4)(t - 8) + (9 - 2t)(7 - 2t) = 0 \Leftrightarrow 5t^2 - 44t + 95 = 0 \Leftrightarrow t = 5$, hoặc $t = 19/5$. Với $t = 19/5 \Rightarrow B(19/5; 17/5)$ loại vì $x_B < 4$. Với $t = 5 \Rightarrow B(5; 1)$.	0,25

		Suy ra đường thẳng AB là đường thẳng BM: $\frac{x-5}{4-5} = \frac{y-1}{2-1} \Leftrightarrow x+y-6=0$. Đường thẳng BC là đường thẳng BN: $\frac{x-5}{8-5} = \frac{y-1}{4-1} \Leftrightarrow x-y-4=0$. Vì $D \in BD \Rightarrow D(s; 11-2s)$, ta có $d(D, AB) = \frac{ s+11-2s-6 }{\sqrt{2}} = \frac{ 5-s }{\sqrt{2}}, d(D, BC) = \frac{ s-11+2s-4 }{\sqrt{2}} = \frac{ 3s-15 }{\sqrt{2}}.$ Mà $S_{(ABCD)} = 6 \Leftrightarrow d(D, AB) \cdot d(D, BC) = 6 \Leftrightarrow \frac{ 5-s }{\sqrt{2}} \cdot \frac{ 3s-15 }{\sqrt{2}} = 6$ $\Leftrightarrow 5-s ^2 = 4 \Leftrightarrow s=7, \text{ hoặc } s=3 < 4 \text{ (loại)}$ Với $s=7$, suy $D(7; -3)$, Khi đó AD: $x-y-10=0$, DC: $x+y-4=0$.	0,25 0,25 0,25
8b		Câu 8b (1.0 điểm). Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 0)$, $B(2; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P): x-y+2z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A vuông góc với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (Q) là lớn nhất. ----- Phương trình mp(Q) đi qua A có dạng $a(x-1)+b(y+1)+cz=0 \quad (a^2+b^2+c^2 \neq 0).$ Mặt phẳng (P), (Q) có một vtpt lần lượt là $\vec{n}_p = (1; -1; 2)$, $\vec{n}_Q = (a, b, c)$. Vì $(Q) \perp (P)$, nên $\vec{n}_Q \cdot \vec{n}_p = 0 \Leftrightarrow a-b+2c=0 \Leftrightarrow a=b-2c$ $\Rightarrow (Q): (b-2c)(x-1)+b(y+1)+cz=0.$ Ta có $d(B, (Q)) = \frac{ 3b }{\sqrt{(b-2c)^2+b^2+c^2}}.$ Nếu $b=0$, thì $d(B, (Q))=0$. Nếu $b \neq 0$, thì $d(B, (Q)) = \frac{3}{\sqrt{(1-2t)^2+1+t^2}} = \frac{3}{\sqrt{5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{6}{5}}} \leq \frac{\sqrt{30}}{2}, \left(t=\frac{c}{b}\right).$ Dấu bằng khi và chỉ khi $t = \frac{c}{b} = \frac{2}{5}$, chọn $c=2$, thì $b=5$ và $a=1$. Vậy $(Q): (x-1)+5(y+1)+2z=0 \Leftrightarrow x+5y+2z+4=0$.	0,25 0,25 0,25 0,25
9b		Câu 9b (1.0 điểm). Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện $\frac{iz-(1+3i)\bar{z}}{1+i} = z ^2$. ----- Gọi $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Ta có: $\frac{iz-(1+3i)\bar{z}}{1+i} = z ^2 \Leftrightarrow \frac{-a-4b+(b-2a)i}{1+i} = a^2+b^2$ $\Leftrightarrow \frac{[a-4b+(b-2a)i](1-i)}{2} = a^2+b^2 \Leftrightarrow -3a-3b+(5b-a)i = 2(a^2+b^2)$	0,25 0,25

		$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a - 3b = 2(a^2 + b^2) \\ 5b - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26b^2 + 9b = 0 \\ a = 5b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0 \quad \text{hay} \quad a = -\frac{45}{26}; b = -\frac{9}{26}$ Vậy có 2 số phức cần tìm: $z = 0$ và $z = -\frac{45}{26} - \frac{9}{26}i$	0,25 0,25
--	--	--	--------------

Lưu ý: Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tương đương với biểu điểm chấm.