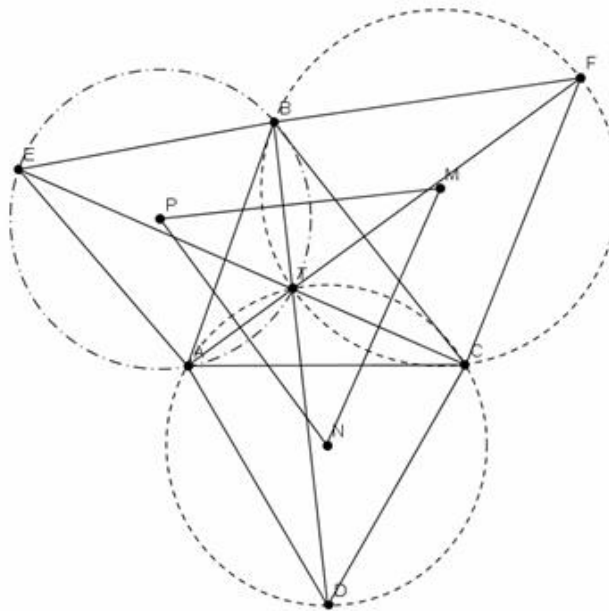


Bài viết nhỏ về điểm Fermat - Torricelli trong tam giác

Đỗ Quang Long - Nguyễn Minh Tuấn

Điểm Torricelli hay còn gọi là điểm Fermat là điểm mà tổng khoảng cách từ điểm đó tới 3 cạnh là nhỏ nhất.

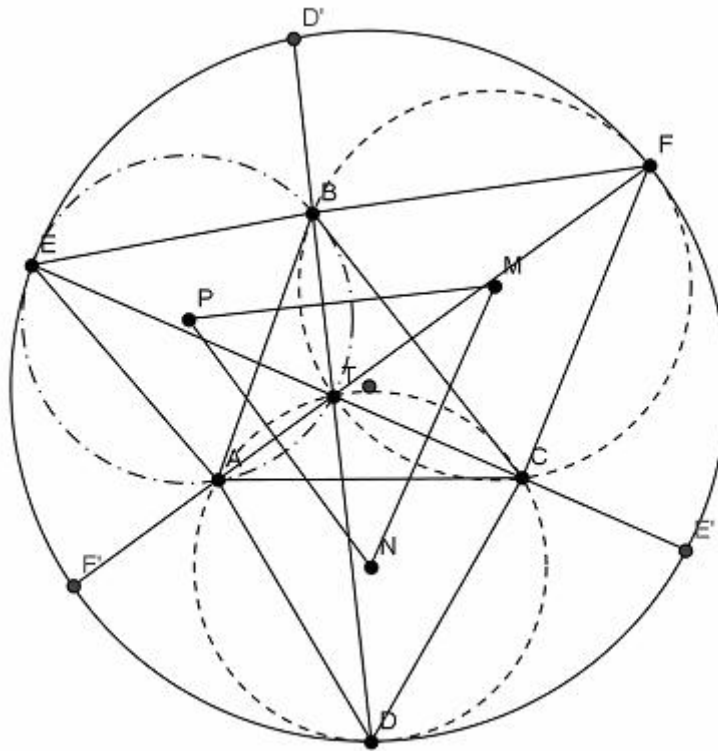
Điểm này là duy nhất, nó nhìn các cạnh của tam giác dưới góc 120° , có mối liên hệ trực tiếp với bài toán Napoleon.



Trên hình vẽ là tam giác ABC, dựng ra phía ngoài các tam giác đều ACD, BCF, BDA. Thì BD, CE, AE đồng quy tại T là điểm Fermat của tam giác ABC.

Trên hình vẽ ta thấy 1 số tính chất rất đẹp như :

1. Tam giác PMN đều (Định lý Napoleon) (M, N, P là tâm các tam giác đều)
2. $BD = CE = AF$; AM, BN, CP đồng quy (tại điểm Napoleon)
3. Tam giác ABC và tam giác DEF cùng trọng tâm....

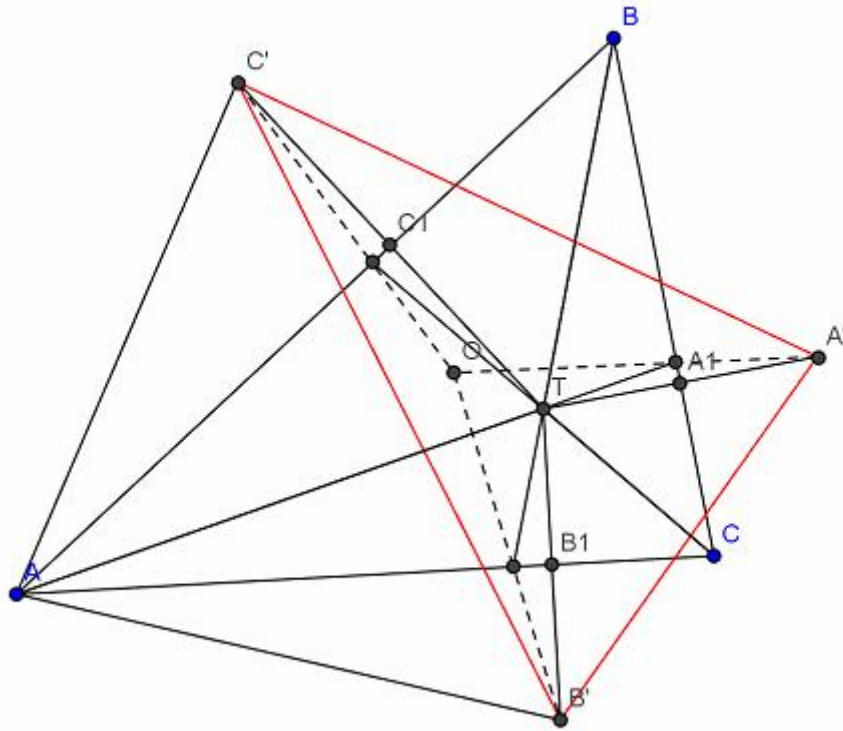


Một vài tính chất khác :

- 1) Giả sử BD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF ở D'. Tương tự có E', F'. Thì ta sẽ có $BD = BD' + AF' + CE'$. (hình vẽ ở phía trên)
- 2) Lấy trên AF, BD, CE, các điểm A', B', C' sao cho $\frac{AA'}{AF} + \frac{BB'}{BD} + \frac{CC'}{CE} = 1$ thì tam giác A'B'C' đều

Ta đi vào một số tính chất của điểm Fermat :

Tính chất 1 : Cho tam giác ABC, T là điểm Torricelli của tam giác . CMR Đường thẳng đối xứng với AT qua BC, BT qua CA , CT qua AB đồng qui.



Hướng dẫn : Lấy A', B', C' là điểm đối xứng của T qua BC, CA, AB . Ta sẽ chứng minh đường thẳng đối xứng với AT qua BC , BT qua CA , CT qua AB đồng qui tại O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.

Thật vậy giả sử đường thẳng đối xứng với BT qua CA , CT qua AB cắt nhau tại O . Do tính chất đối xứng qua BC nên $\widehat{OB'A} = 180^\circ - \widehat{ATB} = 60^\circ$. Tương tự có $\widehat{AC'B} = 60^\circ$. Mà $AC' = AT = AB' \Rightarrow \widehat{AC'B'} = \widehat{AB'C'}$. Do đó $\widehat{OC'B'} = \widehat{OB'C'}$. Mà $\widehat{C'AB'} = 2.\widehat{BAC}$ nên $\widehat{C'OB'} = 240^\circ - 2.\widehat{A}$

Ta có : $\widehat{BA'C} = \widehat{BTC} = 120^\circ, \widehat{C'BA'} = 2.\widehat{CAB}, \widehat{A'CB'} = 2.\widehat{BCA}$. Nên $\widehat{C'A'B'} = 120^\circ - \widehat{A}$.
Nên $\widehat{B'OC'} = 2.\widehat{C'A'B'}$. Do đó O là tâm ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.

Tính chất 2 : Đường thẳng Euler của Tam giác ABT, BCT, CTA đồng qui.

Hướng dẫn

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

Dựng tam giác ACD đều.

Gọi O_1 là tâm của tam giác đều.

M là trung điểm AC , J là trọng tâm tam giác ATC .

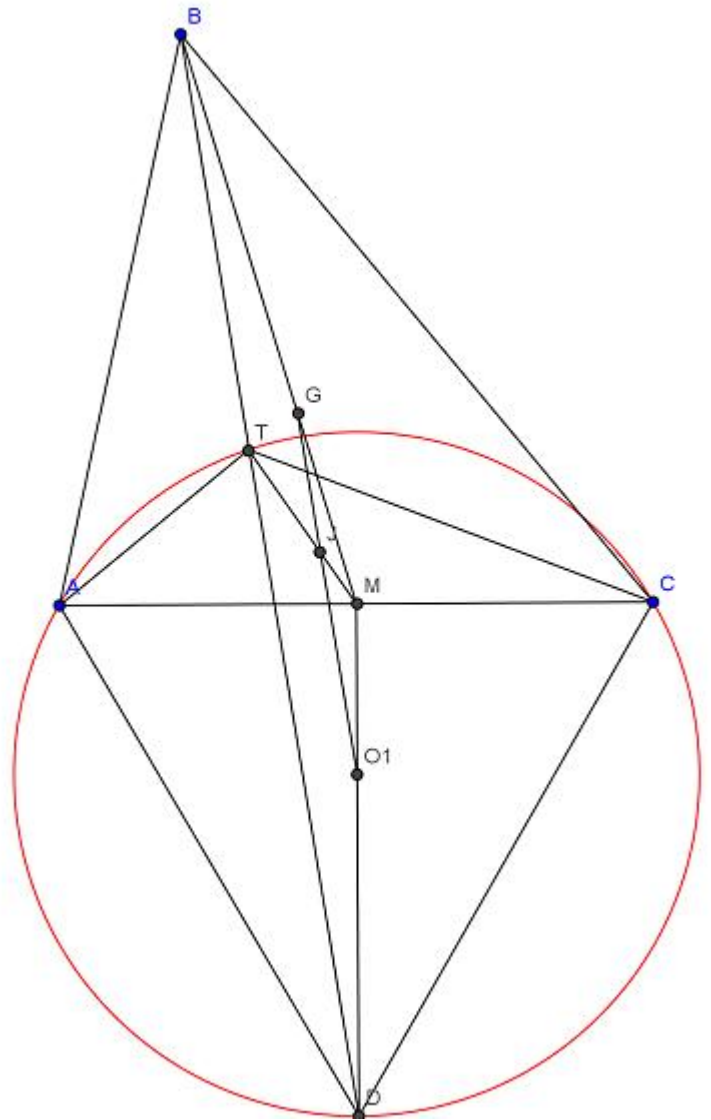
Ta có BT đi qua C . $ATCD$ nội tiếp (O_1)

JO_1 chính là đường thẳng Euler của tam giác ATC .

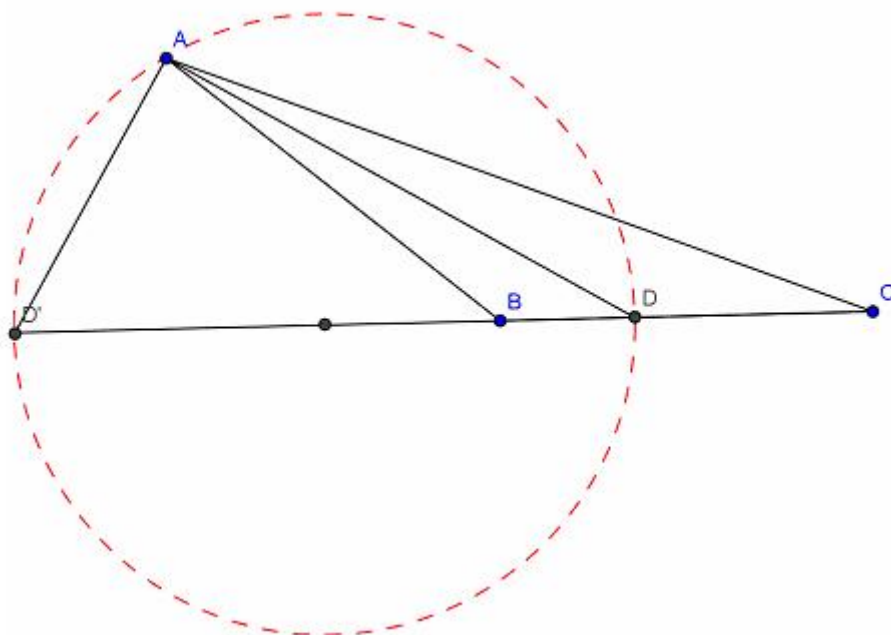
J và O_1 chia MT và MD theo tỷ lệ $1:2$ Nên O_1J đi qua G

Do đó đường thẳng Euler của tam giác ATC đi qua trọng tâm tam giác ABC

Tương tự cho đường thẳng Euler của BTC , BTA cũng đi qua G nên chúng đồng quy.



Tính chất 3 : Điểm Fermat và điểm Isodynamic trong là 2 điểm liên hợp đẳng giác.

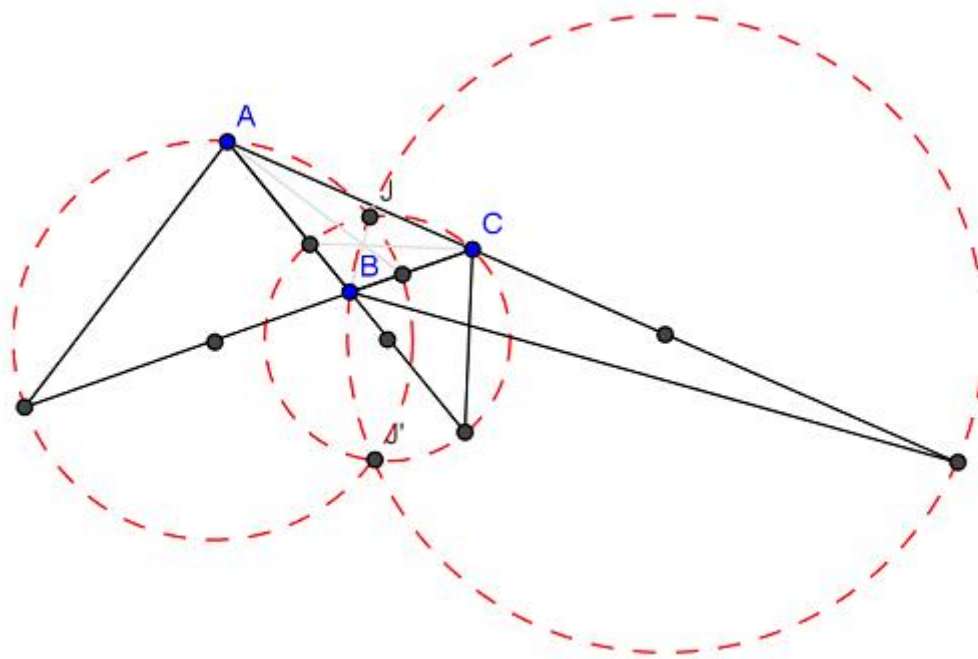


Ta giải thích 1 số khái niệm:

+) Đường tròn A-apollonian là đường tròn đi qua 3 điểm A,D,D'. Với AD và AD' lần lượt là phân giác trong và ngoài góc A.

+) Điểm Isodynamic trong là giao điểm của 3 đường tròn A-apollonian, B-apollonian, C-apollonian và nằm trong tam giác ký hiệu là J.

Tương tự ta cũng có Điểm Isodynamic ngoài là giao điểm của 3 đường tròn A-apollonian, B-apollonian, C-apollonian và nằm trong tam giác ký hiệu là J'.

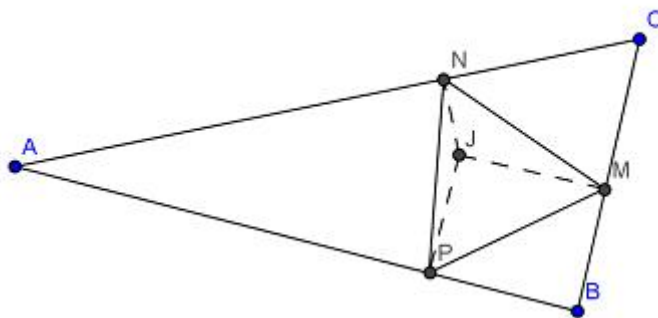


+) 2 điểm I và J của tam giác ABC là liên hợp đẳng giác nếu tia AI và AJ đối xứng với nhau qua phân giác trong của góc A. Tương tự với BI,BJ; CI và CJ

Ta quay vào bài toán .

Ta cần 1 bổ đề cũng là tính chất khá đẹp của điểm Isodynamic trong.

Bổ đề 1 : Gọi M,N,P lần lượt là hình chiếu của J xuống BC,CA,AB. Không mấy khó khăn ta sẽ chứng minh được tam giác MNP đều.



Bổ đề 2: Từ bổ đề 1 và tính chất của điểm Fermat T ta có : $\widehat{BIC} + \widehat{BJC} = 180^\circ + \widehat{BAC}$.

Thật vậy Ta có $\widehat{BJC} = \widehat{BPM} + \widehat{MNC} = 180^\circ - \widehat{APM} + 180^\circ - \widehat{ANM} = 60^\circ + \widehat{BAC}$.

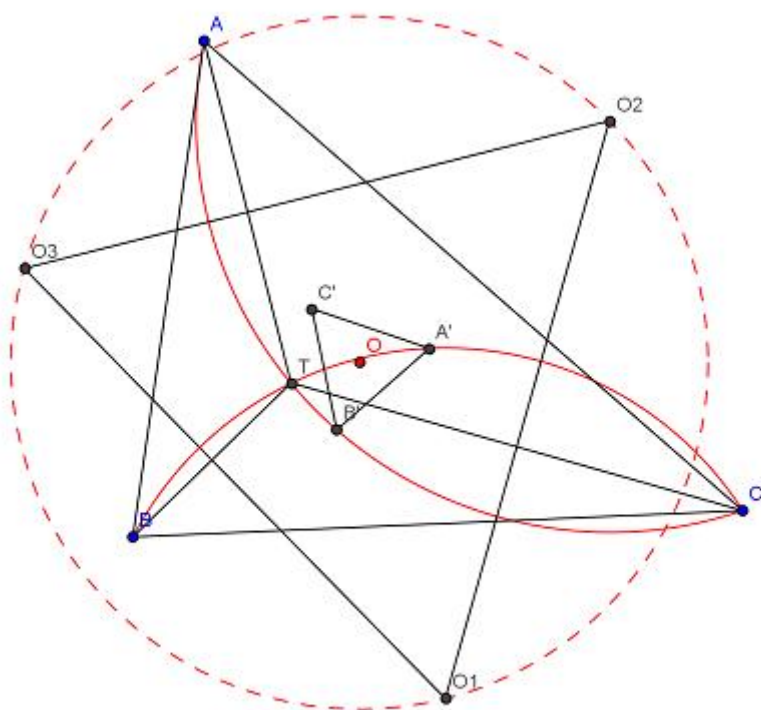
$\widehat{BTC} = 120^\circ$ nên $\widehat{BIC} + \widehat{BJC} = 180^\circ + \widehat{BAC}$.

Ta cần thêm 1 tính chất khá hữu ích nữa : điểm I và J của tam giác ABC là liên hợp đẳng giác của tam giác ABC khi và chỉ khi : $\widehat{BIC} + \widehat{BJC} = 180^\circ + \widehat{BAC}$, $\widehat{CIA} + \widehat{CJA} = 180^\circ + \widehat{ABC}$, $\widehat{AIB} + \widehat{AJB} = 180^\circ + \widehat{BCA}$. Từ nhận xét này và bổ đề 2 ta có đpcm .

Tính chất 4 : Không khó khăn ta sẽ chứng minh được tính chất đẹp sau:

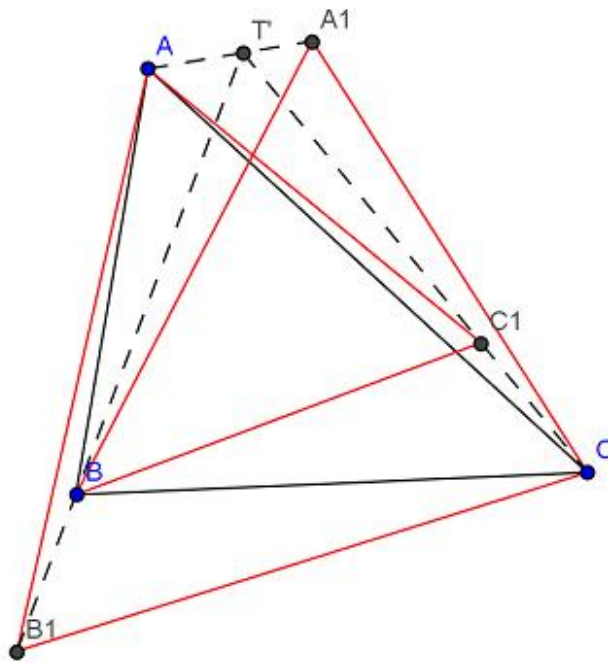
T là điểm fermat của tam giác ABC. A',B',C' là điểm nằm chính giữa cung BTC, ATC, BTA của các đường tròn ngoại tiếp tam giác BTC, ATC, BTA. CMR

- Tam giác A'B'C' đều
- Gọi O_1, O_2, O_3 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ATB, TCA, TAB. thì tam giác $O_1O_2O_3$ đều, gọi O là tâm tam giác đó . Khi đó O cũng là tâm tam giác A'B'C'



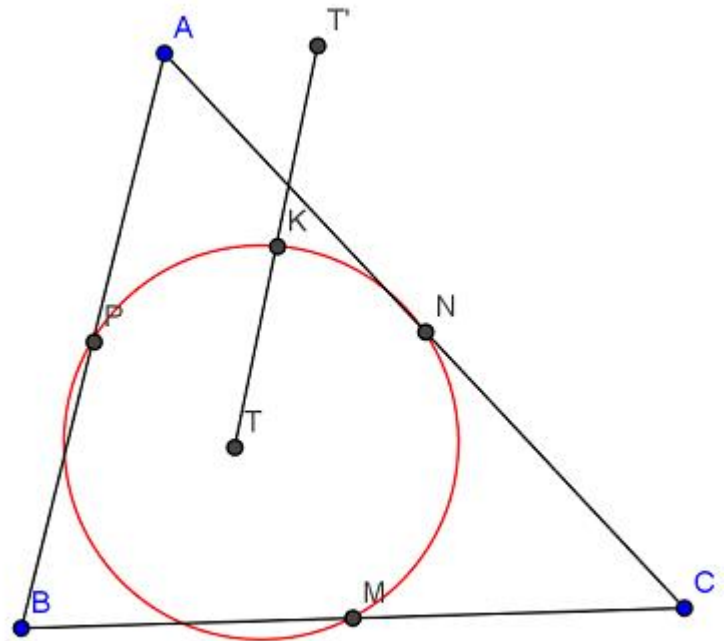
Tính chất 5 : Với điều kiện các góc của tam giác nhỏ hơn 120° thì tam giác ABC có T là điểm Fermat trong, tương tự điểm Fermat ngoài bằng cách dựng tam giác đều cùng phía với A, B, C như trong hình vẽ.

Ta có AA₁, BB₁, CC₁ đồng quy tại T'.

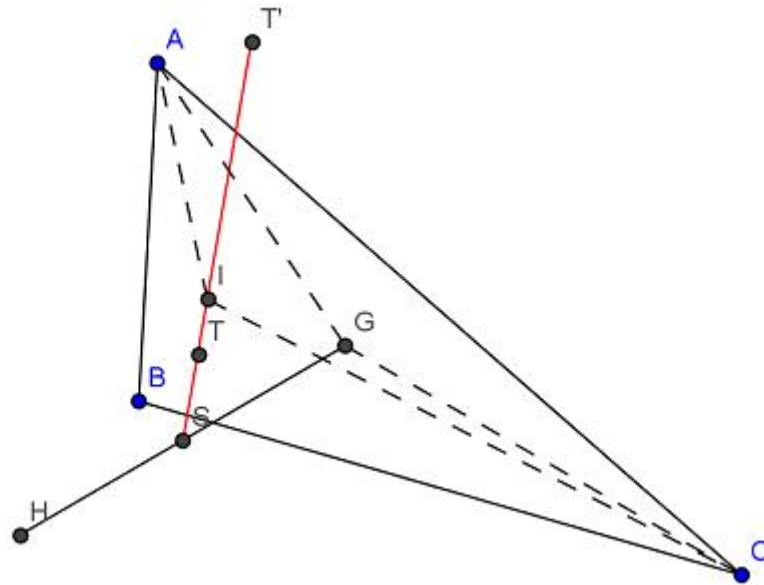


T và T' có nhiều mối tính chất đẹp sẽ giới thiệu sau đây:

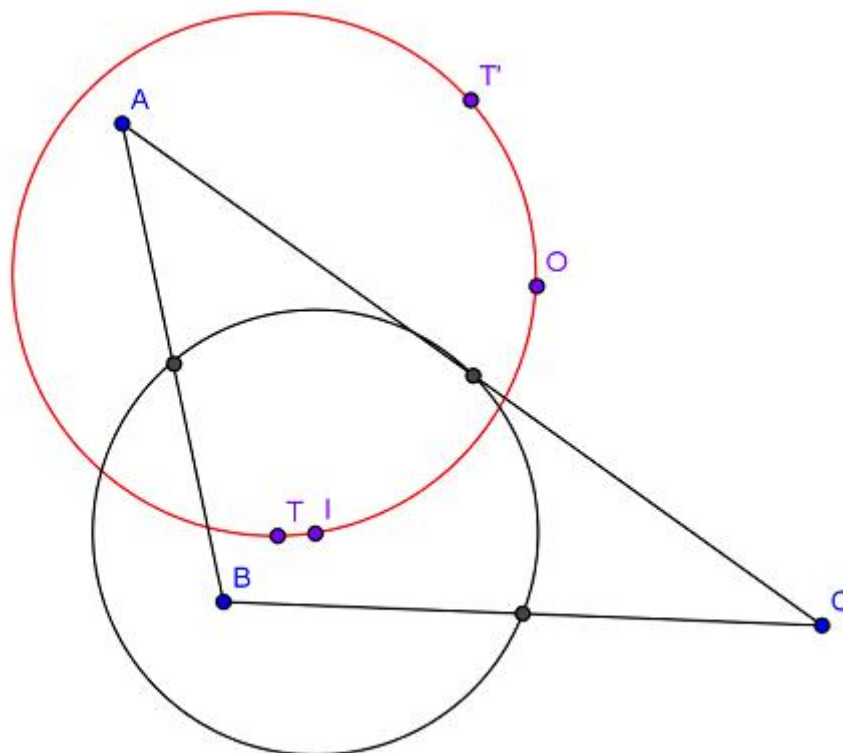
a) Gọi M, N, P là trung điểm của BC, CA, AB và K là trung điểm của TT' thì M, N, P, K cùng thuộc 1 đường tròn. (K thuộc đường tròn Euler của tam giác ABC)



b) Gọi G là trọng tâm của Tam giác ABC, I là điểm liên hợp đẳng giác của G. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. S là trung điểm GH. Thì ta có T, T', S, I thẳng hàng



c) (Định lý Lester) : Cho tam giác ABC không cân, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác , T và T' là 2 điểm Fermat, I là tâm đường tròn Euler của tam giác (đường tròn 9 điểm). CMR O,T,T',I thẳng hàng.



Tính chất 6 : Một số đẳng thức và bất đẳng thức về điểm Fermat- Torricelli.

Cho tam giác ABC các góc nhỏ hơn 120° , T là điểm Fermat trong, T' là điểm Fermat ngoài.

a) $(TA.TB + TB.TC + TC.TA)(TA + TB + TC) = TA.a^2 + TB.b^2 + TC.c^2$

b) $(TA + TB + TC)^2 \geq \sqrt{3}(BC.PA + CA.PB + AB.PC)$

c) Giả sử G là trọng tâm, M là điểm bất kì trong tam giác. Thế thì

$$MA^3 + MB^3 + MC^3 \geq \left(MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \right) (TA + TB + TC)$$

d) Nếu S là điểm Isodynamic đã nói ở trên, d_a là khoảng cách từ S tới phân giác trong góc $\widehat{BAC}$, tương tự có d_b, d_c . Thế thì

$$SA + SB + SC = FA + FB + FC + 2 \left(\frac{d_a^2}{SA} + \frac{d_b^2}{SB} + \frac{d_c^2}{SC} \right)$$

e) $\frac{1}{TA} + \frac{1}{TB} + \frac{1}{TC} \geq \frac{3}{R}$ với R là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

f) $\frac{\cos^2(A)}{TA} + \frac{\cos^2(B)}{TB} + \frac{\cos^2(C)}{TC} \geq \frac{\cos(A) + \cos(B) + \cos(C)}{2R}$

g) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Thế thì

$$S_{\Delta OTT'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{|(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)|}{(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2}$$

h) Gọi G là trọng tâm tam giác, O xác định như trên. CMR $GO^2 + GT^2 + GT'^2 = R^2$ khi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Một số bài tập khác

1. Cho tam giác ABC với góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$, T là điểm Fermat- Torricelli, M là trung điểm BC. CMR $TA + TB + TC = 2.AM$.

2. Cho tam giác ABC với góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$, T là điểm Fermat- Torricelli, D nằm tia đối tia CT sao cho tam giác ATD đều. Trung trực TA cắt BC ở O. CMR QT là trung trực BD.

3. Nếu $TG = \min\{GA; GB; GC\} = GA$ (G là trọng tâm tam giác). CMR $\widehat{BAC} = 120^\circ$.

4. Cho tam giác ABC, T là điểm Fermat. Dựng ra phía ngoài tam giác các tam giác đều BCA_1, CAB_1, BAC_1 . Giả sử AA_1 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ tại A'. Tương tự có B' và C'. Giả sử A_2 là điểm đối xứng của A' qua A. Tương tự có B_2, C_2 . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$. CMR O, O', T thẳng hàng.