

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số đã cho.
b) Tìm m để đường thẳng $d: x+3y+m=0$ cắt (H) tại hai điểm M, N sao cho tam giác AMN vuông tại điểm $A(1; 0)$.

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình $\sin 3x + 2\cos 2x = 3 + 4\sin x + \cos x(1 + \sin x)$.

Câu 3 (1,0 điểm). Giải phương trình $16^{(x+1-\sqrt{2x+1})^2} \cdot 8^{\sqrt{2x+1}} = 4^{x+2}$.

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{3x+2\ln(3x+1)}{(x+1)^2} dx$.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có $AA_1 = a\sqrt{2}$, đường thẳng B_1C tạo với mặt phẳng (ABB_1A_1) một góc 45° . Tính theo a thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB_1 và BC .

Câu 6 (1,0 điểm). Giả sử x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn $0 < (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 \leq 18$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(x+y+z)^4}{3(x^2+y^2+z^2)}$.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm) Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần a hoặc phần b)

a. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $M(2; 1)$ là trung điểm cạnh AC , điểm $H(0; -3)$ là chân đường cao kẻ từ A , điểm $E(23; -2)$ thuộc đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ C . Tìm tọa độ điểm B biết điểm A thuộc đường thẳng $d: 2x+3y-5=0$ và điểm C có hoành độ dương.

Câu 8.a (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$ và hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z+3=0$, $(Q): x-2y-2z+7=0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc d , đồng thời tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Câu 9.a (1,0 điểm). Cho tập hợp $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau thuộc E . Lấy ngẫu nhiên một số thuộc M . Tính xác suất để tổng các chữ số của số đó bằng 10.

b. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(4; 1)$ và đường thẳng $\Delta: 3x-4y+5=0$. Viết phương trình đường tròn đi qua A, B và cắt Δ tại C, D sao cho $CD=6$.

Câu 8.b (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 1; 0)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{1}$, $d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-3}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với d_1 và d_2 đồng thời cách M một khoảng bằng $\sqrt{6}$.

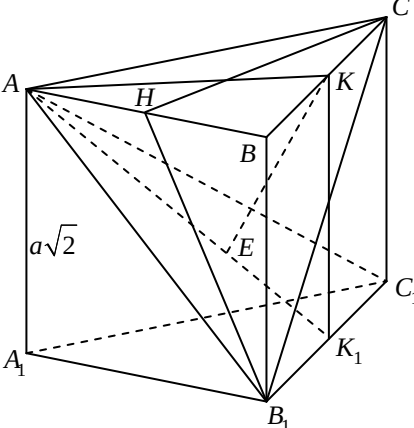
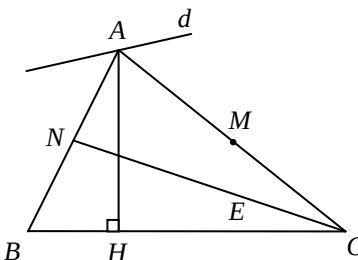
Câu 9.b (1,0 điểm). Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

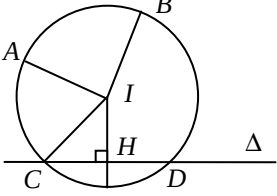
$$\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 - \frac{1}{5}C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{n+2}C_n^n = \frac{1}{156}.$$

----- Hết -----

Câu	Đáp án	Điểm												
Câu 1. (2,0 điểm)	a) (1,0 điểm) 1^0 . Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. 2^0 . Sự biến thiên: * Giới hạn tại vô cực: Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$. Giới hạn vô cực: $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$. Suy ra đồ thị (H) có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$, tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$. * Chiều biến thiên: Ta có $y' = \frac{1}{(x-1)^2} > 0, \forall x \neq 1$. Suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.	0,5												
	* Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$+$</td><td></td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td>$+\infty$</td><td>2</td></tr></table> 3^0 . Đồ thị: Đồ thị cắt Ox tại $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$, cắt Oy tại $(0; 3)$. Nhận giao điểm $I(1; 2)$ của hai tiệm cận làm tâm đối xứng.	x	$-\infty$	1	$+\infty$	y'	$+$		$+$	y	2	$+\infty$	2	0,5
	x	$-\infty$	1	$+\infty$										
y'	$+$		$+$											
y	2	$+\infty$	2											
	b) (1,0 điểm) Ta có $d: y = -\frac{1}{3}x - \frac{m}{3}$. Hoành độ giao điểm của d và (H) là nghiệm của phương trình $\frac{2x-3}{x-1} = -\frac{1}{3}x - \frac{m}{3}$, hay $x^2 + (m+5)x - m - 9 = 0, x \neq 1$. $\Delta = (m+7)^2 + 12 > 0$, với mọi m . Suy ra phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt. Hơn nữa cả 2 nghiệm x_1, x_2 đều khác 1. Do đó d luôn cắt (H) tại 2 điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$. Ta có $\overrightarrow{AM} = (x_1 - 1; y_1), \overrightarrow{AN} = (x_2 - 1; y_2)$. Tam giác AMN vuông tại A $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$. Hay $(x_1 - 1)(x_2 - 1) + y_1 y_2 = 0$ $\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) + \frac{1}{9}(x_1 + m)(x_2 + m) = 0$ $\Leftrightarrow 10x_1 x_2 + (m - 9)(x_1 + x_2) + m^2 + 9 = 0$. Áp dụng định lý Viet, ta có $x_1 + x_2 = -m - 5, x_1 x_2 = -m - 9$. Thay vào (2) ta được $10(-m - 9) + (m - 9)(-m - 5) + m^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow -6m - 36 = 0 \Leftrightarrow m = -6$. Vậy giá trị của m là $m = -6$.	0,5												
Câu 2. (1,0 điểm)	Phương trình đã cho tương đương với $\sin 3x - \sin x + 2 \cos 2x = 3(\sin x + 1) + \cos x(\sin x + 1)$	0,5												

	$\Leftrightarrow 2 \cos 2x \sin x + 2 \cos 2x = (\sin x + 1)(\cos x + 3)$ $\Leftrightarrow (\sin x + 1)(2 \cos 2x - \cos x - 3) = 0$ $\Leftrightarrow (\sin x + 1)(4 \cos^2 x - \cos x - 5) = 0$ $\Leftrightarrow (\sin x + 1)(\cos x + 1)(4 \cos x - 5) = 0.$	
	*) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ *) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ *) $4 \cos x - 5 = 0$ vô nghiệm. Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$	0,5
Câu 3. (1,0 điểm)	Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}.$ Phương trình đã cho tương đương với $2^{4(x+1-\sqrt{2x+1})^2} \cdot 2^{3\sqrt{2x+1}} = 2^{2x+4}$ $\Leftrightarrow 4(x+1-\sqrt{2x+1})^2 + 3\sqrt{2x+1} = 2x+4$ $\Leftrightarrow (2x+2-2\sqrt{2x+1})^2 + 3\sqrt{2x+1} = 2x+4.$	0,5
	Đặt $\sqrt{2x+1} = t \geq 0$, phương trình trở thành $(t^2 + 1 - 2t)^2 + 3t = t^2 + 3$ $\Leftrightarrow t^4 - 4t^3 + 5t^2 - t - 2 = 0$ $\Leftrightarrow (t-2)(t(t-1)^2 + 1) = 0$ $\Leftrightarrow t = 2, \text{ vì } t(t-1)^2 + 1 > 0 \text{ với mọi } t \geq 0.$ Từ đó giải được nghiệm của phương trình ban đầu là $x = \frac{3}{2}.$	0,5
Câu 4. (1,0 điểm)	Ta có $I = \int_0^1 \frac{3x}{(x+1)^2} dx + 2 \int_0^1 \frac{\ln(3x+1)}{(x+1)^2} dx.$ Đặt $u = \ln(3x+1) \Rightarrow du = \frac{3dx}{3x+1}, dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x+1}.$ Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có	0,5
	$I = \int_0^1 \frac{3x}{(x+1)^2} dx - \frac{2 \ln(3x+1)}{x+1} \Big _0^1 + 6 \int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)(x+1)}$ $= \int_0^1 \left(\frac{3}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} \right) dx - \ln 4 + 3 \int_0^1 \left(\frac{3}{3x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$ $= \frac{3}{x+1} \Big _0^1 - \ln 4 + 3 \ln 3x+1 \Big _0^1 = -\frac{3}{2} + 4 \ln 2.$	0,5

Câu 5. (1,0 điểm)		Từ giả thiết suy ra $\triangle ABC$ đều và $BB_1 \perp (ABC)$. Kẻ $CH \perp AB$, H là trung điểm AB. Khi đó $CH \perp (ABB_1A_1) \Rightarrow \widehat{CB_1H} = (\widehat{B_1C, (ABB_1A_1)}) = 45^\circ$ $\Rightarrow \triangle CHB_1$ vuông cân tại H. Giả sử $BC = x > 0 \Rightarrow CH = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ và $B_1H = \sqrt{B_1B^2 + BH^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{x^2}{4}}$. Từ $CH = B_1H \Rightarrow x = 2a \Rightarrow S_{ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$ Suy ra thể tích lăng trụ $V = AA_1.S_{ABC} = a^3\sqrt{6}$.	0,5												
	Gọi K, K_1 là trung điểm BC, B_1C_1. Kẻ $KE \perp AK_1$. Vì $B_1C_1 \perp (AKK_1)$ nên $B_1C_1 \perp KE \Rightarrow KE \perp (AB_1C_1)$. Vì $BC \parallel (AB_1C_1)$ nên $d(BC, AB_1) = d(K, (AB_1C_1)) = KE$. (1) Tam giác AKK_1 vuông tại K nên $\frac{1}{KE^2} = \frac{1}{K_1K^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{5}{6a^2} \Rightarrow KE = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{5}$. (2) Từ (1) và (2) suy ra $d(AB_1, BC) = \frac{a\sqrt{30}}{5}$.	(1) (2)	0,5												
Câu 6. (1,0 điểm)	Từ giả thiết ta có $0 \leq x, y, z \leq 3$ và $x + y + z > 0$. Suy ra $x^2 \leq 3x, y^2 \leq 3y, z^2 \leq 3z$. Do đó $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3(x + y + z)$. Khi đó $P \leq 3(x + y + z) - \frac{(x + y + z)^4}{9(x + y + z)} = 3(x + y + z) - \frac{1}{9}(x + y + z)^3$. (1) Đặt $t = x + y + z, t > 0$. Xét hàm số $f(t) = 3t - \frac{1}{9}t^3$ với $t > 0$. Ta có $f'(t) = 3 - \frac{1}{3}t^2; f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < t \leq 3$. Suy ra bảng biến thiên:	<table border="1" data-bbox="877 1344 1428 1612"> <tr> <td>t</td><td>0</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$f'(t)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr> <tr> <td>$f(t)$</td><td></td><td>6</td><td></td></tr> </table> Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $f(t) \leq f(3) = 6$ với mọi $t > 0$. (2) Từ (1) và (2) ta có $P \leq 6$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 3, y = z = 0$ hoặc các hoán vị. Vậy giá trị lớn nhất của P là 6, đạt được khi $x = 3, y = z = 0$ hoặc các hoán vị.	t	0	3	$+\infty$	$f'(t)$	+	0	-	$f(t)$		6		0,5
t	0	3	$+\infty$												
$f'(t)$	+	0	-												
$f(t)$		6													
Câu 7.a (1,0 điểm)		$A \in d : 2x + 3y - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \Rightarrow A(-3a + 1, 2a + 1)$ Vì $M(2; 1)$ là trung điểm AC nên suy ra $C(3 + 3a; 1 - 2a)$ $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HA} = (-3a + 1; 2a + 4) \\ \overrightarrow{HC} = (3 + 3a; 4 - 2a) \end{cases}$	0,5												

	Vì $\widehat{AHC} = 90^\circ$ nên $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -\frac{19}{13} \end{cases}$. *) Với $a = 1 \Rightarrow A(-2; 3), C(6; -1)$ thỏa mãn. *) Với $a = -\frac{19}{13} \Rightarrow C\left(-\frac{18}{13}; \frac{51}{13}\right)$ không thỏa mãn. Với $A(-2; 3), C(6; -1)$ ta có phương trình $CE: x + 17y + 11 = 0$, phương trình $BC: x - 3y - 9 = 0$ Suy ra $B(3b + 9; b) \in BC \Rightarrow$ trung điểm AB là $N\left(\frac{3b + 7}{2}; \frac{b + 3}{2}\right)$. Mà $N \in CE \Rightarrow b = -4 \Rightarrow B(-3; -4)$.	
Câu 8.a (1,0 điểm)	Tâm mặt cầu (S) là $I(t - 2; -t + 1; 2t + 2) \in d$. Vì (S) tiếp xúc $(P), (Q)$ nên $d(I, (P)) = d(I, (Q)) = R$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{ 3t + 7 }{3} = \frac{ -t - 1 }{3} = R \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2, R = \frac{1}{3} \\ t = -3, R = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(-4; 3; -2), R = \frac{1}{3} \\ I(-5; 4; -4), R = \frac{2}{3} \end{cases}$ Suy ra pt (S) là $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = \frac{1}{9}$ hoặc $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 + (z + 4)^2 = \frac{4}{9}$.	0,5
Câu 9.a (1,0 điểm)	Số các số thuộc M có 3 chữ số là $A_3^3 = 60$. Số các số thuộc M có 4 chữ số là $A_4^4 = 120$. Số các số thuộc M có 5 chữ số là $A_5^5 = 120$. Suy ra số phần tử của M là $60 + 120 + 120 = 300$. Các tập con của E có tổng các phần tử bằng 10 gồm $E_1 = \{1, 2, 3, 4\}, E_2 = \{2, 3, 5\}, E_3 = \{1, 4, 5\}.$ Gọi A là tập con của M mà mỗi số thuộc A có tổng các chữ số bằng 10. Từ E_1 lập được số các số thuộc A là 4! Từ mỗi tập E_2 và E_3 lập được số các số thuộc A là 3! Suy ra số phần tử của A là $4! + 2 \cdot 3! = 36$. Do đó xác suất cần tính là $P = \frac{36}{300} = 0,12$.	0,5
	Các tập con của E có tổng các phần tử bằng 10 gồm $E_1 = \{1, 2, 3, 4\}, E_2 = \{2, 3, 5\}, E_3 = \{1, 4, 5\}.$ Gọi A là tập con của M mà mỗi số thuộc A có tổng các chữ số bằng 10. Từ E_1 lập được số các số thuộc A là 4! Từ mỗi tập E_2 và E_3 lập được số các số thuộc A là 3! Suy ra số phần tử của A là $4! + 2 \cdot 3! = 36$. Do đó xác suất cần tính là $P = \frac{36}{300} = 0,12$.	0,5
Câu 7.b (1,0 điểm)	 Giả sử (C) có tâm $I(a; b)$, bán kính $R > 0$. Vì (C) đi qua A, B nên $IA = IB = R$ $\Leftrightarrow \sqrt{(a - 1)^2 + (b - 2)^2} = \sqrt{(a - 4)^2 + (b - 1)^2} = R$ $\Rightarrow \begin{cases} b = 3a - 6 \\ R = \sqrt{10a^2 - 50a + 65} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(a; 3a - 6) \\ R = \sqrt{10a^2 - 50a + 65} \end{cases} \quad (1)$	0,5
	Kẻ $IH \perp CD$ tại H. Khi đó $CH = 3, IH = d(I, \Delta) = \frac{ -9a + 29 }{5}$ $\Rightarrow R = IC = \sqrt{CH^2 + IH^2} = \sqrt{9 + \frac{(9a - 29)^2}{25}} \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra $10a^2 - 50a + 65 = 9 + \frac{(9a - 29)^2}{25} \Leftrightarrow 169a^2 - 728a + 559 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{43}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(1; -3), R = 5 \\ I\left(\frac{43}{13}; \frac{51}{13}\right), R = \frac{5\sqrt{61}}{13} \end{cases}$	0,5

	Suy ra (C): $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ hoặc (C): $\left(x - \frac{43}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{51}{13}\right)^2 = \frac{1525}{169}$.	
Câu 8.b (1,0 điểm)	Vì (P) // d_1, d_2 nên (P) có cặp vtcp $\begin{cases} \vec{u}_1 = (1; -1; 1) \\ \vec{u}_2 = (-1; 2; -3) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_P = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (1; 2; 1)$ Suy ra pt (P) có dạng $x + 2y + z + D = 0$. $d(M, (P)) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{ 3+D }{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 3 \\ D = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (P): x + 2y + z + 3 = 0 & (1) \\ (P): x + 2y + z - 9 = 0 & (2) \end{cases}$	0,5
	Lấy $K(1; 3; 1) \in d_1$ và $N(1; -3; 2) \in d_2$ thử vào các phương trình (1) và (2) ta có $N \in (P): x + 2y + z + 3 = 0$ nên $d_2 \subset (P): x + 2y + z + 3 = 0$. Suy ra phương trình mặt phẳng (P) thỏa mãn bài toán là $(P): x + 2y + z - 9 = 0$.	0,5
Câu 9.b (1,0 điểm)	Với mọi $x \in \mathbb{R}$ và mọi số nguyên dương n, theo nhị thức Niuton ta có $C_n^0 x - C_n^1 x^2 + \dots + (-1)^n C_n^n x^{n+1} = (C_n^0 - C_n^1 x + \dots + (-1)^n C_n^n x^n) x = (1-x)^n x.$ Suy ra $\int_0^1 (C_n^0 x - C_n^1 x^2 + \dots + (-1)^n C_n^n x^{n+1}) dx = \int_0^1 (1-x)^n x dx$.	0,5
	Hay $\frac{1}{2} C_n^0 - \frac{1}{3} C_n^1 + \dots + \frac{(-1)^n}{n+2} C_n^n = \int_0^1 (1-x)^n dx - \int_0^1 (1-x)^{n+1} dx$ $= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$ Từ đó ta có $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{156} \Leftrightarrow n^2 + 3n - 154 = 0 \Leftrightarrow n = 11$ (vì $n \in \mathbb{N}^*$).	0,5