Các bổ đề hình học

I. CÁC BỔ ĐỀ VỚI CÁC YẾU TỐ ĐẶC BIỆT CỦA TAM GIÁC:

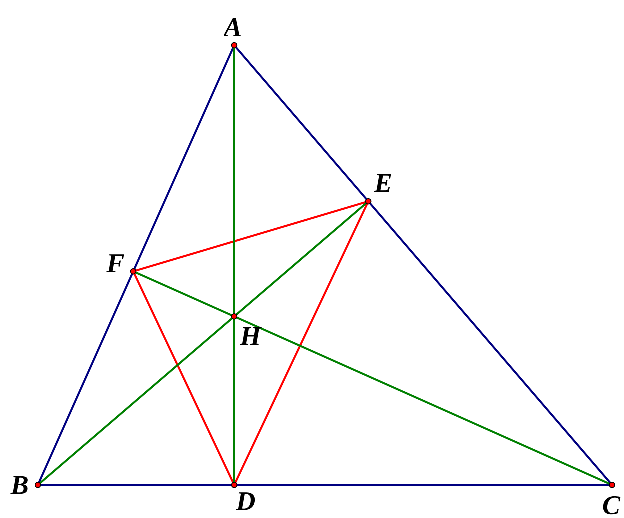
1. Nếu 1 tam giác vuông có một cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền hoặc một cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân $\frac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc cạnh huyền bằng một cạnh góc vuông nhân $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ thì tam giác vuông ấy có 1 góc bằng 30^0 và 1 góc bằng 60^0.

2. Cho ΔABC nhọn, 3 đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H.

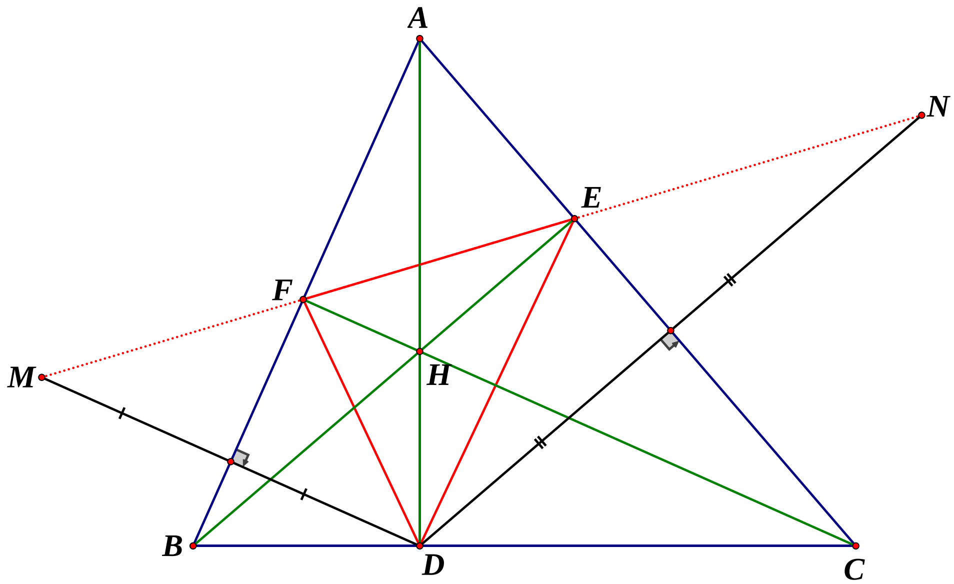
2.1. H là giao điểm 3 đường phân giác của ΔDEF.

2.2. Trong các tam giác mà các đỉnh lần lượt thuộc cạnh của ΔABC, ΔDEF có chu vi bé nhất. (Định lý Fagnano).

2.3. Vị trí của A, H đổi nhau nếu $\widehat{A} > 90^0$. Khi đó A là giao điểm 3 đường phân giác của ΔDEF.



3. Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF. Nếu M, N lần lượt là đối xứng của D qua AB, AC thì M, N, F thẳng hàng.



4. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM:

$$4.1.\begin{cases} AM > \dfrac{BC}{2} \Leftrightarrow \widehat{A} < 90^0 \\ AM < \dfrac{BC}{2} \Leftrightarrow \widehat{A} > 90^0 \\ AM = \dfrac{BC}{2} \Leftrightarrow \widehat{A} = 90^0 \end{cases}$$

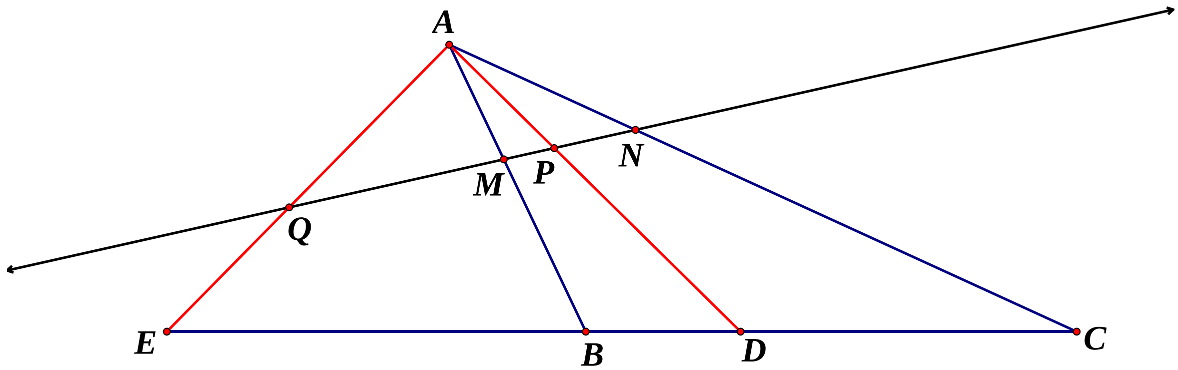
$$4.2.\ \begin{cases} AB < AC \Leftrightarrow \widehat{MAB} > \widehat{MAC} \\ AB < AC \Leftrightarrow \widehat{AMB} < \widehat{AMC} \end{cases}$$

4.3. Nếu $E \in AB, F \in AC, EF//BC$ thì AM qua trung điểm N của EF.

5. Cho tam giác ABC. Lấy D nằm giữa B và C, E nằm trên đường thẳng BC nhưng không nằm giữa B, C.

- Nếu $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ thì AD là đường phân giác trong của tam giác ABC.
- Nếu $\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AB}{AC}$ thì AE là đường phân giác ngoài của tam giác ABC.
- Nếu AD, AE lần lượt là đường phân giác trong và phân giác ngoài, m là đường thẳng bất kì không qua A cắt AB, AC, AD, AE lần lượt tại M, N, P, Q thì

$$\frac{PM}{PN} = \frac{QM}{QN}; \frac{MP}{MQ} = \frac{NP}{NQ}$$



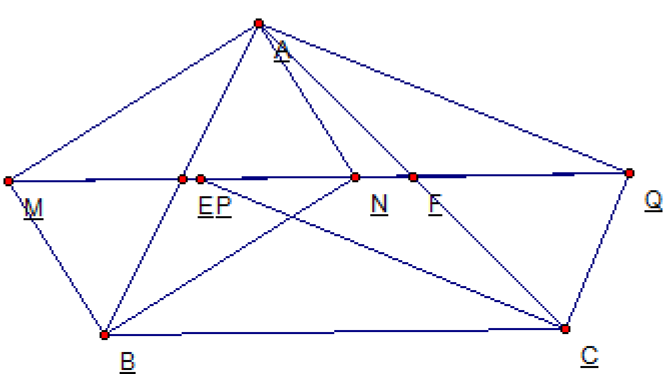
6. Cho tam giác ABC nội tiếp (O;R) có H là trực tâm, G là trọng tâm. M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

- $AH = 2OM;\ BH = 2ON;\ CH = 2OP$
- H, G, O thẳng hàng và GH=2GO

7. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

- O nằm trong tam giác $\Leftrightarrow$ ΔABC nhọn
- O nằm trong góc BAC và nằm ngoài tam giác $\Leftrightarrow$ $\widehat{A} > 90^0$

8. Cho tam giác ABC. E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC. M, N là hình chiếu của A lên các phân giác ngoài và trong tại đỉnh B. P, Q là hình chiếu của A lên các phân giác trong và ngoài tại đỉnh C. Ta có M, N, P, Q, E, F thẳng hàng.



10. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P là các tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác, I là tâm đường tròn nội tiếp.

- I là trực tâm tam giác MNP
- $(I;r),(M;r_m),(N;r_n),(P;r_p)$ lần lượt là các đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của tam giác ABC. D, E, F là các tiếp điểm của I với BC, CA, AB. H, J, K là các tiếp điểm của (M) với BC, AB, AC. Ta có

$$\begin{cases}2AE = 2AF = AB + AC - BC \\ 2AJ = 2AK = AB + AC + BC\end{cases}$$

■ **<u>Hệ quả 1:</u>** Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH và r, r_1, r_2 là bán kính các đường tròn nội tiếp $\Delta ABC, \Delta HAB, \Delta HAC$. R, R_1, R_2 lần lượt là bán kính các đường tròn bàng tiếp trong góc vuông của các tam giác ABC, ABH, ACH. Ta có:

- $r_1 + r_2 + r = AH$.
- $R + R_1 + R_2 = AB + BC + CA + AH$

■ **<u>Hệ quả 2:</u>** Nếu tam giác ABC vuông ở A có BC cố định thì:

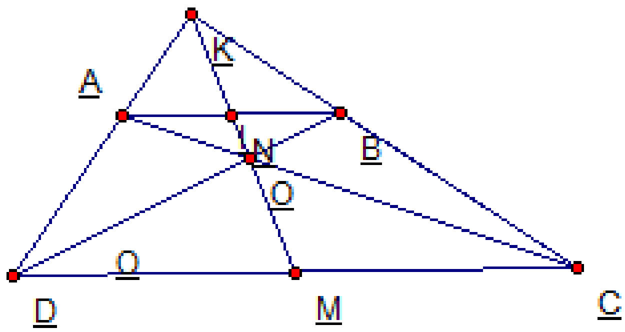
- $\max(r + r_1 + r_2) = \frac{BC}{2} \Leftrightarrow AB = AC$
- $\max(R_1 + R_2 + R) = \frac{BC(3+2\sqrt{2})}{2} \Leftrightarrow AB = AC$

II. CÁC BỔ ĐỀ VỀ TỨ GIÁC:

1. Trung điểm các cạnh của 1 tứ giác là các đỉnh của 1 hình bình hành hoặc trung điểm 2 cạnh đối và 2 đường chéo là 4 đỉnh của 1 hình bình hành. (nếu chúng không thẳng hàng).

2. Nếu tứ giác có 2 cạnh đối bằng nhau thì trung điểm 2 cạnh còn lại và trung điểm 2 đường chéo là 4 đỉnh của 1 hình thoi.

3. Trong hình thang có 2 cạnh bên không song song, giao điểm 2 đường thẳng chứa 2 cạnh bên, giao điểm 2 đường chéo và trung điểm 2 đáy cùng nằm trên 1 đường thẳng.

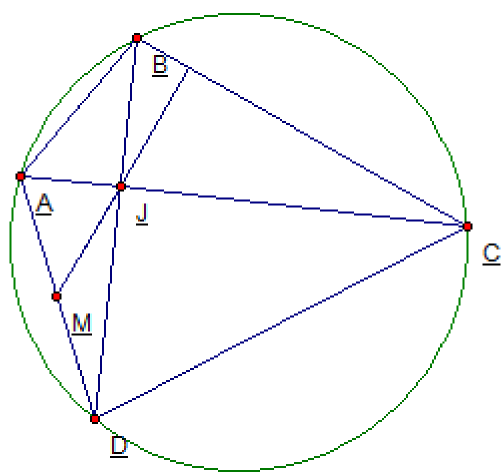


4. Trong tứ giác lồi, tích độ dài 2 đường chéo bé hơn hoặc bằng tổng các tích 2 cạnh đối (bất đẳng thức Ptolemy). Đẳng thức xảy ra ⇔ Tứ giác nội tiếp

5. Trong tứ giác lồi, tổng dài độ dài 2 đường chéo bé hơn chu vi và lớn hơn nửa chu vi tứ giác ấy.

6. Trong tứ giác lồi, tổng độ dài 2 cạnh đối lớn hơn hoặc bằng 2 lần đoạn thẳng nối trung điểm 2 cạnh còn lại. Đẳng thức xảy ra ⇔ 2 cạnh đối ấy song song.

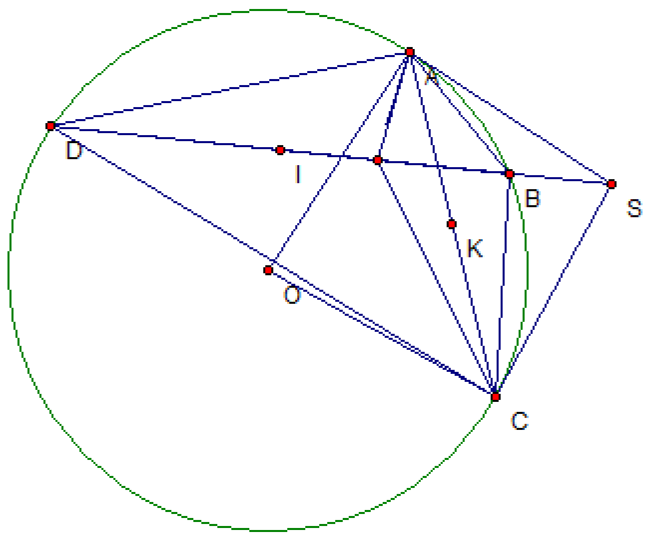
7. Nếu 1 tứ giác nội tiếp và có 2 đường chéo vuông góc tại J thì 1 đường thẳng qua J sẽ vuông góc với 1 cạnh khi và chỉ khi đường thẳng ấy qua trung điểm cạnh đối diện (định lý Brahma Gupta)



8. Tứ giác điều hoà: Tứ giác nội tiếp có tích các cặp cạnh đối bằng nhau gọi là tứ giác điều hoà.

8.1. Cho tứ giác ABCD nội tiếp.

- Đường phân giác của 2 góc $\widehat{BAD}$; $\widehat{CAD}$ đi qua 1 điểm trên BD $\Leftrightarrow$ $AB.CD = AD.BC$
- Hệ quả: Nếu phân giác các góc $\widehat{BAD}$; $\widehat{CAD}$ đi qua 1 điểm trên BD thì phân giác các góc $\widehat{ABD}$,$\widehat{ACD}$ đi qua 1 điểm trên AC.



8.2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O) có đường chéo AC không đi qua tâm O.

- Tiếp tuyến với (O) tại A, C và BD đồng quy $\Leftrightarrow$ $AB.CD = AD.BC$
- Hệ quả: Nếu AC, BD không qua tâm O thì tiếp tuyến với (O) tại A, C và BD đồng quy $\Leftrightarrow$ tiếp tuyến với (O) tại B, D và AC đồng quy

8.3. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của D trên AB, BC, CA. Ta có M là trung điểm của PN $\Leftrightarrow$ $AB.CD = AD.BC$

8.4. Gọi K là trung điểm của AC.

- AC là phân giác góc $\widehat{BKD}$ $\Leftrightarrow$ $AB.CD = AD.BC$
- Hệ quả: I là trung điểm của BD. AC là phân giác góc $\widehat{BKD}$ $\Leftrightarrow$ BD là phân giác góc $\widehat{AIC}$.

8.5. I là trung điểm của đường chéo BD. AC, AM đối xứng nhau qua phân giác của góc $\widehat{BAD}$ $\Leftrightarrow$ $AB.CD = AD.BC$

III. CÁC BỔ ĐỀ VỀ ĐƯỜNG TRÒN

1. Cho (O;R) và điểm M không thuộc đường tròn. Qua M vẽ đường thẳng cắt (O) tại 2 điểm A, B. Khi đó tích MA.MB không phụ thuộc vị trí cát tuyến MAB.

- M ở trong (O;R): $MA.MB = R^2 - OM^2$
- M ở ngoài (O;R): $MA.MB = OM^2 - R^2 = MT^2$(MT là tiếp tuyến tới (O)).

2. Hệ quả:

2.1. Cho tứ giác ABCD có 2 đường chéo cắt nhau tại N. AB, CD cắt nhau tại M.

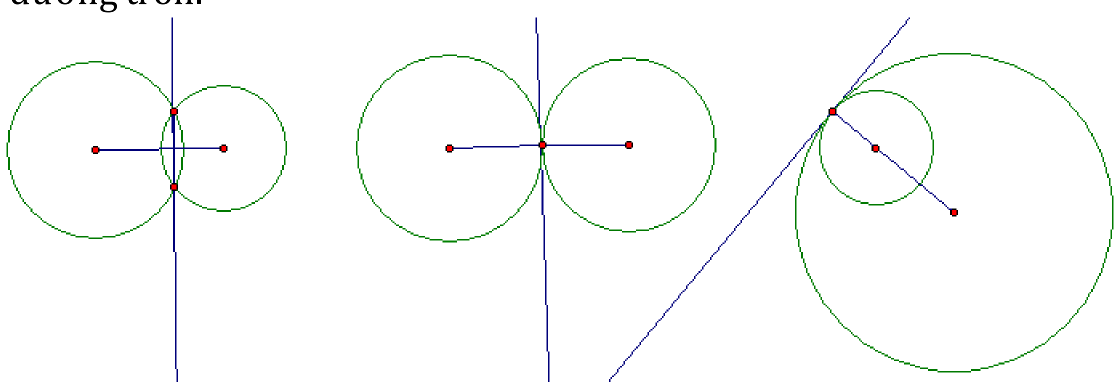
a) Nếu $MA.MB = MC.MD$ hoặc $NA.NC = NB.ND$ thì ABCD nội tiếp.

b) Nếu ABCD nội tiếp thì $MA.MB = MC.MD; NB.ND = NA.NC$.

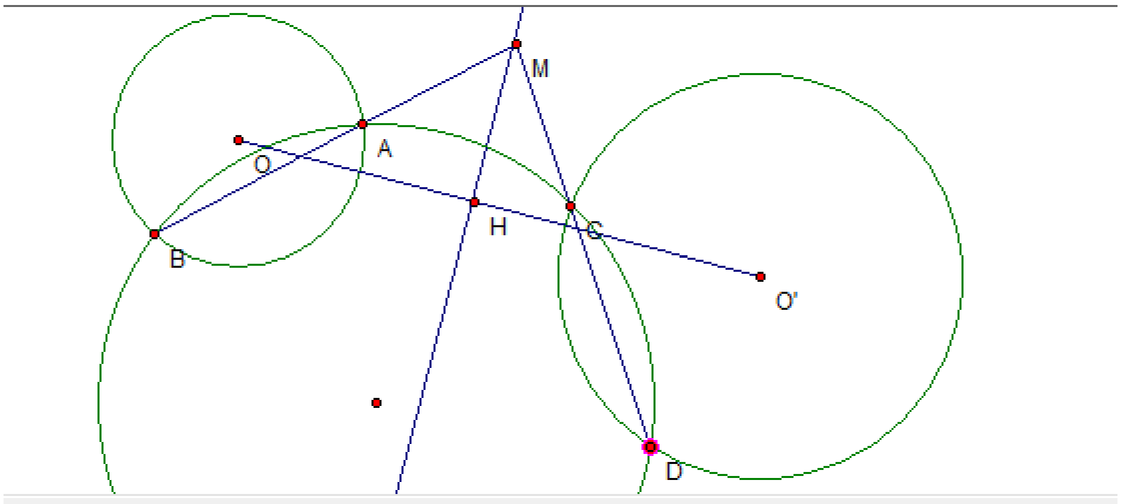
2.2. Cho tam giác ABC. Nếu M thuộc tia đối của tia BC mà $MB.MC = MA^2$ thì MA là tiếp tuyến đường tròn (ABC).

3. Trục đẳng phương:

- Trục đẳng phương của 2 đường tròn (O;R) và (O';R') là tập hợp những điểm có cùng phương tích với 2 đường tròn ấy:
  $H = \{M / OM^2 - R^2 = O'M^2 - R'^2\}$
- Trục đẳng phương của 2 đường tròn là 1 đường thẳng vuông góc với đường thẳng qua 2 tâm.
- Nếu (O), (O') cắt nhau tại A, B thì đường thẳng AB là trục đẳng phương của (O) và (O')
- Nếu (O), (O') tiếp xúc nhau thì trục đẳng phương là tiếp tuyến trong chung của 2 đường tròn.



- Nếu (O), (O') không có điểm chung, vẽ (I) cắt (O) tại A, B; cắt (O') tại C, D và AB, CD cắt nhau ở M. Đường thẳng qua M vuông góc với đường nối tâm OO' là trục đẳng phương của (O) và (O').



4. Cho (O;R) và (O';R') $(R \geq R')$. Đặt $OO' = d$. Gọi m là trục đẳng phương của (O) và (O'). m cắt OO' tại H.

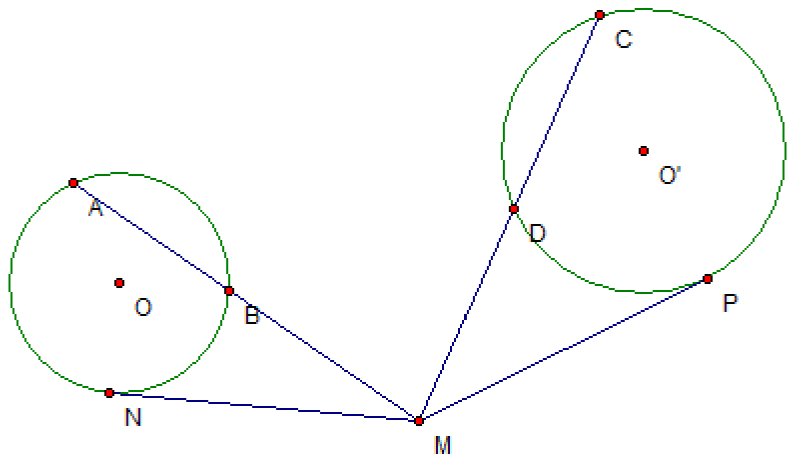
$$4.1\ R \geq R' \Leftrightarrow OH \geq O'H$$

$$4.2.\ OH = \frac{1}{2d}(d^2 + R^2 - R'^2)$$

5. Trục đẳng phương đi qua trung điểm các đoạn tiếp tuyến chung của 2 đường tròn (suy ra có thể vẽ trục đẳng phương bằng cách nối trung điểm các đoạn tiếp tuyến chung của 2 đường tròn)

■Hệ quả: Nếu xem 1 điểm là đường tròn có bán kính là 0, ta có trục đẳng phương của (O; R) và đường tròn điểm A là đường thẳng qua trung điểm 2 tiếp tuyến AB, AC của (O).

6. Cho (O;R) và (O'; R') có trục đẳng phương m. Nếu từ 1 điểm M vẽ tiếp tuyến MN, cát tuyến MAB tới (O), tiếp tuyến MP, cát tuyến MCD tới (O') thì tam giác MNP cân tại M và A, B, C, D cùng thuộc 1 đường tròn.



7. <u>Tâm đẳng phương:</u> Cho $(O_1; R_1); (O_2; R_2); (O_3; R_3)$. Gọi m_1, m_2, m_3 lần lượt là trục đẳng phương của 3 cặp đường tròn trên.

- Nếu O_1, O_2, O_3 thẳng hàng thì m_1 // m_2 // m_3.
- Nếu O_1, O_2, O_3 không thẳng hàng thì m_1, m_2, m_3 đồng quy tại 1 điểm P. P gọi là tâm đẳng phương và có cùng phương tích với 3 đường tròn trên.

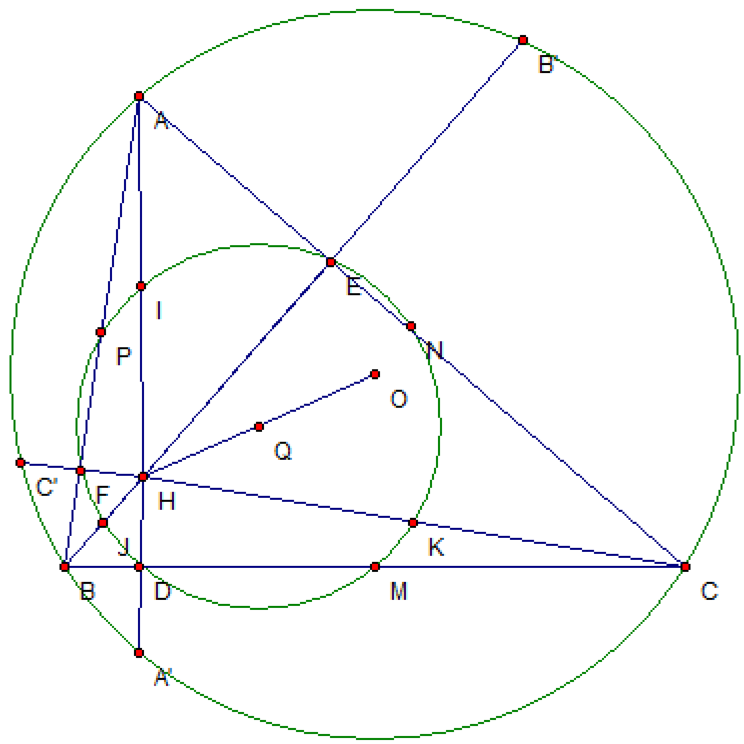
8. <u>Tiếp tuyến của đường tròn:</u> Cho A nằm ngoài (O; R). Vẽ tiếp tuyến AB, AC tới (O) (A, B là tiếp điểm). Lấy M trên đoạn AB, N trên đoạn AC.

- ΔABC đều $\Leftrightarrow OA = 2R \Leftrightarrow AB = R\sqrt{3}$
- ABOC là hình vuông $\Leftrightarrow OA = R\sqrt{2} \Leftrightarrow AB = R$
- OA cắt (O) tại I, K ($AI < AK$) thì I, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp ΔABC.
- MN là tiếp tuyến của (O) $\Leftrightarrow MN = MB + NC \Leftrightarrow AM + MN + AN = 2AB \Leftrightarrow \widehat{MON} = \widehat{BOC}.\frac{1}{2}$
- Nếu MN tiếp xúc (O) tại I: $P_{\Delta AMN}$ min $\Leftrightarrow S_{\Delta AMN}$ max $\Leftrightarrow$ I là điểm chính giữa cung BC.

9. <u>Đường tròn ngoại tiếp:</u> Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O; R). 3 đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. I, J, K lần lượt là trung điểm của HA, HB, HC. M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

- 9 điểm D, E, F, I, J, K, M, N, P thuộc đường tròn $(Q; \frac{R}{2})$ (đường tròn Euler, tâm Q là trung điểm của OH).
- Các điểm A', B', C' đối xứng H qua BC, CA, AB thuộc (O).

Các tính chất trên vẫn đúng khi $\widehat{BAC} \geq 90^0$.



■ Cần phân 9 điểm trên thành 3 nhóm:

a. Nhóm trung điểm các cạnh của tam giác.

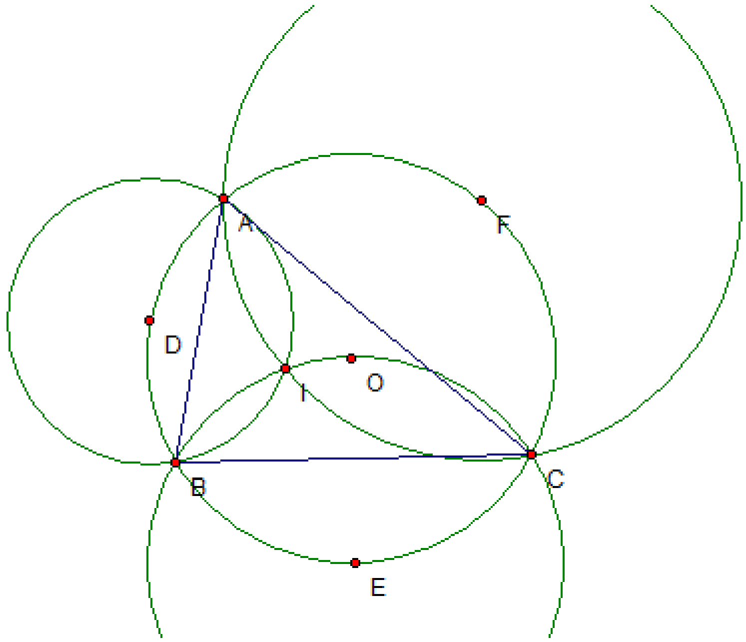
b. Nhóm các chân đường cao

c. Nhóm trung điểm các đoạn nối trực tâm với các đỉnh.

Trong thực tế ít khi đề bài yêu cầu chứng minh cả 9 điểm thuộc đường tròn (vì dài nhưng … dễ!). Đôi khi chọn mỗi nhóm 1 điểm và đổi cách phát biểu, tự nhiên ta thấy lạ và khó. VD:

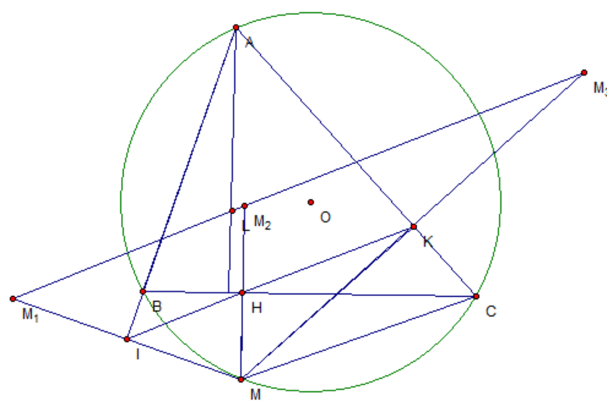
- Chứng minh JFKN nội tiếp
- Cho B, C cố định. A di động sao cho $\widehat{BAC} > 90^0$. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác JFN luôn đi qua 1 điểm cố định.

10. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). D, E, F lần lượt là điểm chính giữa các cung $\widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{AB}$ nhỏ. Ta có các đường tròn tâm D qua A, B; tâm E qua B, C; tâm F qua C, A đồng quy tại tâm tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



11. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). M là điểm bất kì trên (O) (M không trùng A, B, C). Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của M lên BC, CA, AB. M_1, M_2, M_3 lần lượt đối xứng với M qua AB, BC, CA. L là trực tâm tam giác ABC.

- H, I, K thẳng hàng (đường thẳng Simpson).
- M_1, M_2, M_3, L thẳng hàng. (đường thẳng Steiner)



12. Cho tam giác ABC nội tiếp (O):

- A, C cố định, B di động trên cung $\widehat{AC}$ thì chu vi và diện tích tam giác ABC lớn nhất ⇔ B là điểm chính giữa cung $\widehat{AC}$.
- Suy ra: Tứ giác lồi ABCD nội tiếp (O) có đường chéo AC cố định có chu vi và diện tích lớn nhất ⇔ B, D là các điểm chính giữa 2 cung $\widehat{AC}$.
- Trong các tam giác nội tiếp (O), tam giác đều có chu vi và diện tích lớn nhất.
- Trong các tứ giác lồi nội tiếp (O), hình vuông có chu vi và diện tích lớn nhất.

13. Cho tam giác ABC đều nội tiếp (O; R). $M \in \widehat{BC}$, AM cắt BC tại D.

- $MB + MC = MA$
- $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} = \frac{1}{MD}$

14. Tổng quát hơn:

- Cho tam giác ABC cân ở A, nội tiếp (O;R) và $\widehat{BC} \geq 120^0$. AM cắt BC ở D thì:

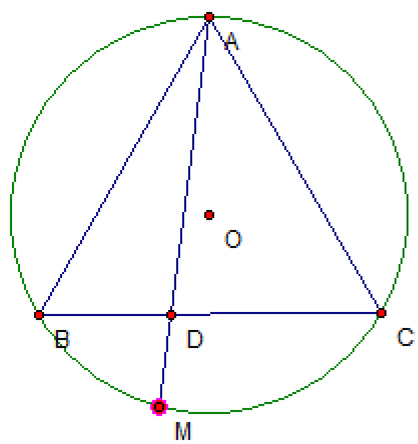
$$a)\ MB + MC \geq MA$$

$$b)\ \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \geq \frac{1}{MD}$$

- Cho tam giác ABC cân ở A, nội tiếp (O;R) và $\widehat{BC} \leq 120^0$. AM cắt BC ở D thì:

$$a)\ MB + MC \leq MA$$

$$b)\ \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \leq \frac{1}{MD}$$



15. Các cung đặc biệt và độ dài dây tính theo R:

Số đo cung $\widehat{BC}$	**Độ dài dây BC**
180^0	$BC = 2R$
150^0	$BC = \frac{R(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2}$
120^0	$BC = R\sqrt{3}$
90^0	$BC = R\sqrt{2}$
60^0	$BC = R$
30^0	$BC = \frac{R(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2}$

16. <u>Đường tròn nội tiếp:</u>

16.1. Tứ giác ABCD ngoại tiếp (O) $\Leftrightarrow AB + CD = AD + BC$

16.2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O; R) và có đường tròn nội tiếp (I; r). Gọi M, N, P lần lượt là điểm chính giữa các cung $\widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{AB}$. Ta có:

- M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC
- Tâm các đường tròn ngoại tiếp (AIB), (BIC), (CIA) thuộc (O)
- $OI = \sqrt{R(R - 2r)}$
- $R \geq 2r$