

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{1+x^4}{(1+x^2)^2} \text{ với } x \geq 0.$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, tỉnh Khánh Hoà năm học 1987 – 1988)

Bài 2. Cho $P = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x+y+z}$. Hãy tìm giá trị nguyên dương của x, y, z để cho P đạt giá trị dương nhỏ nhất.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, toàn quốc năm học 1988 – 1989)

Bài 3. Cho $A = \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức A và các giá trị tương ứng của x.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, TP. HCM năm học 1989 – 1990)

Bài 4. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của y và các giá trị tương ứng của x.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, TP. HCM năm học 1990 – 1991)

Bài 5. Cho $M = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+15-8\sqrt{x-1}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của M và các giá trị tương ứng của x.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, TP. HCM năm học 1991 – 1992)

Bài 6. Tìm giá trị nguyên lớn nhất của m sao cho bất đẳng thức sau đây luôn luôn đúng với mọi số thực x:

$$A = (x+1)(x+2)^2(x+3) \geq m.$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, TP. HCM năm học 1992 – 1993)

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 8x + 7}{x^2 + 1}$.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận 6, TP. HCM năm học 1992 – 1993)

Bài 8. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y = \sqrt{x^3 - 6x^2 + 21x + 18}$, với $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, TP. HCM năm học 1992 – 1993)

Bài 9. Cho ba số dương x, y, z thoả mãn điều kiện: $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của xyz.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, TP. HCM năm học 1992 – 1993)

Bài 10. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 3x + 1$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 4}$.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 1994 – 1995)

Bài 11. Cho ba số dương x, y, z thoả mãn điều kiện: $\begin{cases} 2x + y + 3z = 6 \\ 3x + 4y - 3z = 4 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức: $P = 2x + 3y - 4z$.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận 1, TP. HCM năm học 1994 – 1995)

Bài 12. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $x^2 + y^2$ khi có $x^2 + y^2 - xy = 4$.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, TP. HCM năm học 1995 – 1996)

Bài 13. Cho ba số dương a, b, c có tổng là một hằng số. Tìm a, b, c sao cho: $ab + bc + ca$ lớn nhất.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận 1, TP. HCM năm học 1995 – 1996)

Bài 14. Cho biểu thức $Q = \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \sqrt{1-x_3} + \dots + \sqrt{1-x_{1997}}$ trong đó $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{1997}$ là các biến số dương và thoả mãn điều kiện $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{1997} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của Q và giá trị tương ứng các biến của nó.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Toàn quốc năm học 1996 – 1997)

Bài 15. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $x.y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = x + y + \frac{1}{x+y}.$$

(Đề thi HSG Toán 9, Trường THCS Colette, Quận 3, TP. HCM năm học 1996 – 1997)

Bài 16. Cho các số thực không âm a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_5.$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, TP. HCM năm học 1996 – 1997)

Bài 17. Cho $a, b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{(x+a)(x+b)}{x}$ (với $x > 0$).

(Đề thi chọn HSG Toán 9, TP. HCM năm học 1996 – 1997)

Bài 18. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{x^2 - 2x + 6}$ với $x \leq -1$.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận 6, TP. HCM năm học 1997 – 1998)

Bài 19. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-1}$.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận 6, TP. HCM năm học 1997 – 1998)

Bài 20. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{2x^2 - 2x + 5} + \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$..

(Đề thi chọn HSG Toán 9, TP. HCM năm học 1997 – 1998)

Bài 21. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$ với $0 < x < 1$.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, TP. HCM năm học 1997 – 1998)

Bài 22. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \left| \sqrt{x^2 + 8x + 20} - \sqrt{x^2 + 4x + 40} \right|$.

(Đề thi HSG Toán 9, Trường THCS Colette, Quận 3, TP. HCM năm học 1998 – 1999)

Bài 23. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2}{xy} + 4xy.$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, TP. HCM năm học 1998 – 1999)

Bài 24. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x.y.z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P

$$= \frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(z+x)} + \frac{1}{z^3(x+y)}.$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận 1, TP. HCM năm học 1999 – 2000)

Bài 25. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \sqrt{x+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-1}}$..

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận Tân Bình, TP. HCM năm học 1999 – 2000)

Bài 26. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = 5x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 4y + 2005$.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận 6, TP. HCM năm học 1999 – 2000)

Bài 27. Với giá trị nào của x thì biểu thức $C = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$ có giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận 5, TP. HCM năm học 2000 – 2001)

Bài 28. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{3abc}.$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, TP. HCM năm học 2001 – 2002)

Bài 29. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = \frac{\sqrt{x-4}}{2x}$.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận 1, TP. HCM năm học 2001 – 2002)

Bài 30. a) Với x, y không âm, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x - 2\sqrt{xy} + 3y - 2\sqrt{x} + 2004,5.$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{1-x-2x^2}$.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận 9, TP. HCM năm học 2002 – 2003)

Bài 31. Cho x, y thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = x^6 + y^6.$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận 10, TP. HCM năm học 2002 – 2003)

Bài 32. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 2002$.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận 1, TP. HCM năm học 2002 – 2003)

Bài 33. Cho ba số thực không âm x, y, z thoả mãn điều kiện: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = -z^2 + z(y+1) + xy$.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2003 – 2004)

Bài 34. Cho hai số thoả mãn đẳng thức: $8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = 4$. Xác định x, y để tích x.y đạt giá trị nhỏ nhất.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2003 – 2004)

Bài 35. a) Cho x, y > 0 thoả mãn điều kiện: $x.y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4}.$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = x^2 + 3 + \frac{1}{x^2 + 3}$.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận 9, TP. HCM năm học 2003 – 2004)

Bài 36. Tìm giá trị của x, y để biểu thức $\sqrt{x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 11} + \sqrt{x^2 + 2x + 3y^2 + 6y + 4}$. Đạt giá trị nhỏ nhất.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận Tân Bình, TP. HCM năm học 2003 – 2004)

Bài 37. Tìm giá trị của x để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó:

$$M = x - \sqrt{x - 2005}.$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận Tân Bình, TP. HCM năm học 2004 – 2005)

Bài 38. a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$. Với x, y > 0.

b) Tìm giá trị của x để biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó:

$$B = |x|\sqrt{9 - x^2}. \text{ Với } -3 \leq x \leq 3.$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận Tân Bình, TP. HCM năm học 2004 – 2005)

Bài 39. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 3\sqrt{x-1} + 4\sqrt{5-x}. \text{ Với } 1 \leq x \leq 5.$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, TP. HCM năm học 2004 – 2005)

Bài 40. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $y = \frac{4x+3}{x^2+1}$.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, TP. Hải Phòng năm học 2004 – 2005)

Bài 41. Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 6. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-4}{c}. \text{ Với } 1 \leq x \leq 5.$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Tỉnh Quảng Ngãi năm học 2005 – 2006)

Bài 42. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình: $12x^2 - 6mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0$ ($m > 0$). Tìm m để

biểu thức $A = x_1^3 + x_2^3$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

$$A = 3\sqrt{x-1} + 4\sqrt{5-x}. \text{ Với } 1 \leq x \leq 5.$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận 10, TP. HCM năm học 2005 – 2006)

Bài 43. Tìm các giá trị của x để biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó:

$$B = |x|\sqrt{25-x^2}. \text{ Với } -5 \leq x \leq 5.$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận Tân Bình, TP. HCM năm học 2005 – 2006)

Bài 44. Cho $x^3 + y^3 + 3(x^2 + y^2) + 4(x + y) + 4 = 0$ và $x.y > 0$. Tìm giá trị lớn nhất biểu thức:

$$M = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Tỉnh Bình Định năm học 2005 – 2006)

Bài 45. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \sqrt{x^2 - x + \frac{5}{2}} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = \frac{x-y}{x^4 + y^4 + 6}$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận 9, TP. HCM năm học 2005 – 2006)

Bài 46. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 18} - \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Quận 1, TP. HCM năm học 2005 – 2006)

Bài 47. Cho hai số dương x và y có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{5}{4xy}.$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Huyện Yên Thành, Tỉnh Nghệ An năm học 2010 – 2011)

Bài 48. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = (2-x)(2-y).$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Huyện Nghi Lộc, Tỉnh Nghệ An năm học 2009 – 2010)

Bài 49. Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện: $x + y = \frac{2010}{2011}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu: $S = \frac{2010}{x} + \frac{1}{2010 \cdot y}$.

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Tỉnh Hà Tĩnh năm học 2009 – 2010)

Bài 50. a) Cho hai bộ số $(a_1; a_2)$ và $(b_1; b_2)$ bất kì.

Chứng minh rằng: $(a_1.b_1 + a_2.b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$

b) Cho $x, y \geq 0$ và $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^3 + y^3$.

(Đề thi HSG Toán 9, Huyện Yên Thành, Tỉnh Nghệ An năm học 2009 – 2010)

Bài 51. Cho a, b, c, d là các số nguyên không âm thỏa mãn:
$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 = 36 \\ 2a^2 + b^2 - 2d^2 = 6 \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

(Đề thi HSG Toán 9, Huyện Quỳnh Hợp, Tỉnh Nghệ An năm học 2009 – 2010)

Bài 52. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-2}}{y}$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, Huyện Yên Thành, Tỉnh Nghệ An năm học 2007 – 2008)