ỨNG DỤNG NGUYÊN LÍ DIRICHLET TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

TS. Phạm Văn Cường – P.GĐ sở GDĐT
Huỳnh Tấn Châu – GV trường THPT chuyên LVC

Nhà toán học Đức **P.G.Lejeune Dirichlet** (1805-1859) đã nêu ra một định lí mà về sau người ta gọi là ***Nguyên lí Dirichlet,*** nguyên lý được phát biểu như sau:

"Nếu nhốt vào n chiếc lồng một số chú thỏ mà số lượng lớn hơn n thì ta sẽ tìm được một chiếc lồng mà trong đó có nhiều hơn một con thỏ"

Chúng ta biết bất đẳng thức (BĐT) là một dạng toán hay và khó, thường có trong các kì thi học sinh giỏi (HSG) Quốc gia và Quốc tế. Có rất nhiều phương pháp để chứng minh BĐT: phương pháp chứng minh bằng quy nạp, phương pháp chứng minh bằng phản chứng, dùng các BĐT cổ điển: Cauchy, Bunhiacopxki, Chebyshev,…phương pháp đạo hàm, phương pháp lượng giác hóa,...

Bài viết này chúng tôi muốn giới thiệu một phương pháp chứng minh BĐT khá thú vị là ứng dụng nguyên lí Dirichlet. Với phương pháp này, giúp chúng ta chứng minh được một số bài toán BĐT một cách rất gọn gàng và độc đáo.

Từ nguyên lí Dirichlet có một mệnh đề có ý nghĩa ứng dụng hết sức quan trọng. Đó là:

Mệnh đề. *Trong 3 số thực bất kì x, y, z thì phải có 2 số cùng dấu*

Đây là một mệnh đề rất quan trọng, bởi khi ta đã chọn được *"điểm rơi"* (tức là đẳng thức của bài toán) thì ta có thể áp dụng mệnh đề trên để chứng minh BĐT. Chẳng hạn đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = k$ thì ta có thể giả sử 2 số $(a-k)$, $(b-k)$ cùng dấu, khi đó thì $(a-k)(b-k) \geq 0$

Chúng ta sẽ nghiên cứu một số ví dụ sau để thấy được ý nghĩa việc ứng dụng nguyên lí Dirichlet trong việc giải BĐT như thế nào

Bài toán 1. *Cho các số thực dương* a, b, c.

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca)$

Lời giải. *Dự đoán điểm rơi* $a=b=c=1$

Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0$ thì $2c(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow 2abc \geq 2bc+2ca-2c$.

Do đó ta chỉ cần chứng minh $a^2+b^2+c^2+1 \geq 2c+2ab \Leftrightarrow (a-b)^2+(c-1)^2 \geq 0$

BĐT trên luôn đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét: *Ta có thể chứng minh được BĐT đúng với mọi số thực nếu thay đổi một chút:* $a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2 \geq 2(ab+bc+ca)$

Theo nguyên lí Dirichlet thì $c^2(a^2-1)(b^2-1) \geq 0 \Rightarrow a^2b^2c^2+c^2 \geq b^2c^2+c^2a^2$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+2+b^2c^2+c^2a^2 \geq 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow (a-b)^2+(bc-1)^2+(ca-1)^2 \geq 0$$

BĐT này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\pm 1$

Bài toán 2. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3 \geq (a+1)(b+1)(c+1)$$

Lời giải. Sau khi nhân 2 vế cho 2 thì BĐT trên tương đương với

$$2(a^2+b^2+c^2)+2abc+4 \geq 2(ab+bc+ca)+2(a+b+c)$$

Theo bài toán 1, ta chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+3 \ge 2(a+b+c) \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \ge 0$$

BĐT trên luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài toán 3. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \ge 3(a+b+c)^2+(abc-1)^2$$

Lời giải. BĐT trên tương đương với

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4(a^2+b^2+c^2)+2abc+7 \ge 9(ab+bc+ca)$$

Theo BĐT $AM-GM$ thì $2a^2b^2+2+2b^2c^2+2+2c^2a^2+2 \ge 4ab+4bc+4ca$

và $3a^2+3b^2+3c^2 \ge 3ab+3bc+3ca$. Từ đó kết hợp với bài toán 1 ta suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài toán 4. *Cho các số thực bất kì a, b, c.*

Chứng minh rằng: $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \ge 3(a+b+c)^2$

Lời giải. BĐT đã cho tương đương với

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+8 \ge 6(ab+bc+ca)$$

Theo nhận xét ở bài toán 1, thì ta chỉ cần chứng minh

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+6 \ge 4(ab+bc+ca) \Leftrightarrow (ab-1)^2+(bc-1)^2+(ca-1)^2 \ge 0$$

BĐT trên luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\pm 1$

Nhận xét: *Các bài toán 3 và 4 là những làm chặt cho bài toán* sau

Bài toán 5. (USA – 2001) *Cho các số* $a,b,c \ge 0$ *sao cho* $a^2+b^2+c^2+abc=4$.

Chứng minh $ab+bc+ca-abc \le 2$

Lời giải. Theo nguyên lí *Dirichlet* thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ cùng dấu.

Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1) \ge 0 \Rightarrow c(a-1)(b-1) \ge 0 \Rightarrow abc \ge bc+ca-2c$.

Nên $ab+bc+ca-abc \le ab+c$

Mà $4=a^2+b^2+c^2+abc \ge 2ab+c^2+abc \Rightarrow 4-c^2 \ge ab(c+2) \Rightarrow 2-c \ge ab \Rightarrow ab+c \le 2$

Từ hai BĐT trên ta suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Với giả thiết $a^2+b^2+c^2+abc=4$, đại đa số chúng ta đều nghĩ đến việc lượng giác hóa bằng cách đặt : $a=2\cos A, b=2\cos B, c=2\cos C$.

Nhưng lời giải trên cũng tương đối phức tạp và đòi hỏi học sinh phải tính toán rất nhiều.

Bài toán 6. (IRAN – 2002)

Cho các số $a,b,c \ge 0$ *sao cho* $a^2+b^2+c^2+abc=4$. *Chứng minh* $a+b+c \le 3$

Lời giải 1. Áp dụng bài toán 1, ta có $(a+b+c)^2 \le 1+2(abc+a^2+b^2+c^2)=9$

Từ đó, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Lời giải 2. Tương tự như bài toán 5, ta có các điều sau đây $a+b-ab \le 1, ab+c \le 2$

Từ hai gợi ý trên chúng ta suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Bài toán này cũng có thể dùng phương pháp lượng giác hóa để chứng minh, nhưng hai cách giải trên rất gọn gàng và độc đáo.

Bài toán 7. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)+\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)+\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\ge 3$$

Lời giải. Đặt $x=a+\dfrac{1}{b},y=b+\dfrac{1}{c},z=c+\dfrac{1}{a}$ thì BĐT được viết lại thành

$$(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1)\ge 3$$

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(x-2),(y-2),(z-2)$ cùng dấu.

Không mất tính tổng quát, giả sử $(x-2)(y-2)\ge 0$

$\Rightarrow xy+4\ge 2x+2y \Rightarrow 2(x+y+z)\le 2z+xy+4$ (1)

$$xyz=abc+\frac{1}{abc}+x+y+z\ge 2+x+y+z\ge 2+2\sqrt{xy}+z \Rightarrow z(xy-1)\ge 2\left(\sqrt{xy}-1\right)\Rightarrow z\left(\sqrt{xy}-1\right)\ge 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $2(x+y+z)\le 2z+xy+4\le xy+yz+zx$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$, hay a = b = c = 1.

Bài toán 8. *Cho các số thực dương a, b, c sao cho* $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1)\ge 1$

Lời giải. Theo nguyên lí Dirichlet thì ta giả sử $(b-1)(c-1)\ge 0$. Khi đó :

$$(b^2-b+1)(c^2-c+1)=bc(b-1)(c-1)+b^2+c^2-b-c+1\ge b^2+c^2-b-c+1\ge \frac{1}{2}(b+c)^2-(b+c)+1$$

$$(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1)\ge (a^2-a+1)\left(\frac{1}{2}(b+c)^2-(b+c)+1\right)=\frac{1}{2}(a^2-a+1)(a^2-4a+5)$$

Nên ta chỉ cần chứng minh $(a^2-a+1)(a^2-4a+5)\ge 2$

BĐT trên luôn đúng.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét: *BĐT trên vẫn đúng với nhiều biến. Các bạn hãy thử giải 2 mở rộng sau nhé:*

Mở rộng 1. Cho $x_1,x_2,\ldots,x_n$ là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=r\ge 1$.

Nếu $n\le 13$ thì $(x_1^2-x_1+1)(x_2^2-x_2+1)\ldots(x_n^2-x_n+1)\ge (r^2-r+1)^2$

Mở rộng 2. Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $(a^p-a+1)(b^p-b+1)(c^p-c+1)\ge 1$, với mọi $p>1$

Bài toán 9. (*UK TST – 2005)* *Cho các số thực dương a,b,c sao cho* $abc=1$.

$$\textit{Chứng minh } \frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2}\ge 3$$

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh 2 bổ đề sau:

Bổ đề 1. $$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge \frac{2}{1+a+b+c}+1$$

Bổ đề 2. $$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}\ge 1$$

Chứng minh Bổ đề 1. BĐT tương đương với

$$\frac{3+ab+bc+ca+2(a+b+c)}{2+ab+bc+ca+a+b+c}\ge \frac{3+a+b+c}{1+a+b+c}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 1$$

Mà theo BĐT $AM-GM$ thì $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3$

Vậy Bổ đề 1 được chứng minh.

Chứng minh Bổ đề 2. Theo nguyên lí Đirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(a-1)(b-1)\geq 0 \Rightarrow \frac{c+1}{c}=ab+1\geq a+b$.

Ta có $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\geq \frac{1}{1+ab} \Leftrightarrow (ab-1)^2+(a-b)^2\geq 0$ (đúng)

Nên $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\geq \frac{1}{1+ab}=\frac{c}{c+1}$

Do đó $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{a+b+c+1}\geq \frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{\frac{c+1}{c}+c+1}=1$

Vậy Bổ đề 2 được chứng minh.

Trở lại bài toán. BĐT đã cho tương đương với

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+b}+\frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}\geq 3$$

Mà theo bổ đề trên ta có $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+b}+\frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}$

$$\geq \frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{a+b+c+1}+1\geq 2=1=3$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài toán 10. (MOSKVA – 2000) Cho các số dương x, y, z thoả mãn xyz = 1.

Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2+x+y+z\geq 2(xy+yz+zx)$ (1). Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Theo nguyên lí Dirichlet : $(x-1)(y-1)\geq 0 \Rightarrow xy-x-y+1\geq 0 \Rightarrow xyz\geq xz+yz-z$

Theo BĐT Cauchy : $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$

BĐT (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được:

$$x^2+y^2+z^2+3\geq 2(xy+yz+zx) \ (2)$$

Ta có $x^2+y^2+z^2+3=x^2+y^2+z^2+2xyz+1=x^2+y^2+z^2+2(xz+yz-z)+1$

$$\geq 2xy+2z+2(xz+yz)-2z=2(xy+yz+zx) \text{ (đpcm)}$$

Bài toán 11. (VMO – 1996) Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $ab+bc+ca+abc=4$.

Chứng minh $a+b+c\geq ab+bc+ca$

Lời giải. Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1)\geq 0$.

Khi đó $c(a-1)(b-1)\geq 0 \Rightarrow c\geq ac+bc-abc$. Do đó ta chỉ cần chứng minh $a+b\geq ab+abc$

Từ giả thiết $ab+bc+ca+abc=4$ suy ra $c=\frac{4-ab}{a+b+ab}$,

Thay vào BĐT thức trên ta được BĐT thức tương đương là:

$$a+b\geq ab\left(1+\frac{4-ab}{a+b+ab}\right) \Leftrightarrow (a+b)(a+b+ab)\geq ab(4+a+b) \Leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$$

BĐT trên hiển nhiên đúng. Phép chứng minh hoàn tất.

Nhận xét. *Bài toán trên có thể giải được bằng phương pháp dồn biến*

Bài toán 12. (TRƯỜNG ĐHKHTN – ĐHQGTPHCM)

Cho các số thực không âm bất kì a, b, c. Chứng minh rằng:

$$abc+2+\frac{1}{\sqrt{2}}[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2]\geq a+b+c$$

Lời giải. Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$ cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1)\geq 0 \Rightarrow ab\geq a+b-1$. Vì vậy để hoàn tất bài toán ta chỉ cần chứng minh

$$c(a+b-1)+2+\frac{1}{\sqrt{2}}[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2]\geq a+b+c$$

Hay $$\frac{1}{\sqrt{2}}[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2]\geq (a+b-2)(1-c)$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq \frac{(a+b-2)^2}{2}+(c-1)^2\geq \sqrt{2}\left|(a+b-2)(1-c)\right|\geq \sqrt{2}(a+b-2)(1-c)$$

Phép chứng minh hoàn tất.

Bài toán 13. (APMO – 2004)

Chứng minh rằng : $\left(x^2+2\right)\left(y^2+2\right)\left(z^2+2\right)\geq 9\left(xy+yz+zx\right),\forall x,y,z>0$

Lời giải. Theo nguyên lí Dirichlet trong ba số xy – 1, xz – 1, yz – 1 tồn tại hai số không trái dấu, chẳng hạn: xy – 1, yz – 1, nên : $\left(xy-1\right)\left(yz-1\right)\geq 0$

Suy ra $xy^2z+1\geq xy+yz$. Khi đó : $x^2y^2z^2+y^2+2\geq 2\left(xy^2z+1\right)\geq 2\left(xy+yz\right)$

BĐT cần chứng minh viết lại:

$$x^2y^2z^2+2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+4\left(x^2+y^2+z^2\right)+8\geq 9(xy+yz+zx)$$

Ta có $x^2y^2z^2+y^2+2\geq 2(xy+yz)$ (1) ; $3\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq 3(xy+yz+zx)$ (2)

Vì : $x^2y^2+1\geq 2xy$, nên $2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+6\geq 4(xy+yz+zx)$ (3) và $x^2+z^2\geq 2xz$ (4)

Cộng các BBDT (1), (2), (3), (4) vế theo vế ta có:

$$x^2y^2z^2+2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+4\left(x^2+y^2+z^2\right)+8\geq 9(xy+yz+zx)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 1

Qua một số bài toán trên, ta thấy rằng nguyên lí Dirichlet không những có ứng dụng trong việc giải toán rời rạc, các bài toán về số học, tổ hợp, … mà còn rất có hiệu quả trong việc chứng minh một số bài toán về BĐT, trong một số trường hợp cho ta lời giải vô cùng đẹp đẽ và trong sáng (ví dụ như các bài toán 5, 6, 10), góp phần trong việc nâng cao tư duy và tạo sự hứng thú cho các học sinh yêu thích môn toán.

Hy vọng rằng, với suy nghĩ và những ví dụ trên sẽ góp phần bổ sung thêm kiến thức và kinh nghiệm trong việc chứng minh BĐT.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Mậu (2006), *Bất đẳng thức – Định lí và áp dụng*, Nxb GD.
2. Phan Đức Chính (1993), *Bất đẳng thức*, Nxb GD.
3. G.H. Hardy, J.E.Littlewood, G.Polya (2002), *Bất đẳng thức*, Nxb Đại Học Quốc Gia Hà Nội
4. Các bài Thi Olympic Toán THPT Việt Nam (1990 – 2006), Nxb GD 2007
5. Các nguồn tài liệu trên Internet.
6. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ