KỸ THUẬT CAUCHY NGƯỢC DẤU

Tác giả :Phạm Kim Hùng [1]
Biên tập: Vũ Đình Việt[2] **- Trần Trung Kiên** [3]

I. LỜI NÓI ĐẦU

Các bạn thân mến!

Bất đẳng thức (BĐT) là một trong những phần kiến thức đặc biệt quan trọng trong Toán Học nói chung và chương trình THPT nói riêng. BĐT cũng là một phần không thể thiếu trong các kỳ thi Toán, thi Đại Học, Cao Đẳng,...
Nói đến BĐT, chúng ta không thể không nhắc đến một BĐT khá quen thuộc đó là BĐT Cauchy (AM-GM). Việc luyện tập tốt về BĐT, giúp cho các bạn có được những tư duy tốt hơn trong việc học tập và cải thiện tốt tâm lý trong phòng thi (khi gặp một bài BĐT khó) ...
Cuốn "Sáng tạo bất đẳng thức" - TG: Phạm Kim Hùng, là một trong những cuốn sách rất hay viết về đề tài này.

Để góp phần giúp cho các bạn nắm vững các kiến thức về BĐT này, vận dụng một số kỹ năng, phương pháp để giải quyết các bài toán liên quan đến BĐT, cũng như việc tìm đọc các tài liệu viết về BĐT được dễ dàng hơn, tôi đã tổng hợp và hệ thống ngắn gọn lại các bài tập tiêu biểu của phương pháp gọi là: "Kỹ thuật Cauchy ngược dấu".

Tài liệu được biên soạn nhân sự kiện http://diendantoanhoc.net kỷ niệm 8 năm hoạt động bởi Vũ Đình Việt và Trần Trung Kiên. Có thể coi đây là phần quà dành cho tất cả các bạn.

Bài viết sẽ gồm 4 phần chính:

Phần I: LỜI NÓI ĐẦU
Phần II: KỸ THUẬT CAUCHY NGƯỢC DẤU - PHẠM KIM HÙNG : Phần này sẽ trích nguyên mẫu trong sách "Sáng tạo bất đẳng thức" - Phạm Kim Hùng.
Phần III: MỘT SỐ BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI HAY : Ở Phần này gồm các bài toán và lời giải của các thành viên trên http://diendantoanhoc.net cùng một số bài toán sưu tầm.
Phần IV: BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Việc biên soạn không thể tránh khỏi những thiếu sót, rất mong những ý kiến đóng góp của các bạn! Mọi đóng góp xin gửi về địa chỉ: echcon_ks9x@yahoo.com.vn

Trân trọng cảm ơn!

[1] Phạm Kim Hùng có nickname trên Diễn đàn toán học VMF là hungkhtn.
[2] Vũ Đình Việt có nickname trên Diễn đàn toán học VMF là vietfrog.
[3] Trần Trung Kiên có nickname trên Diễn đàn toán học VMF là Ispectorgadget.

II.KỸ THUẬT CAUCHY NGƯỢC DẤU - PHẠM KIM HÙNG[4]

Chúng ta sẽ xem xét bất đẳng thức $AM-GM$ và một kĩ thuật đặc biệt - kỹ thuật *Cauchy ngược dấu*. Đây là một trong những kĩ thuật hay, khéo léo, mới mẻ và ấn tượng nhất của bất đẳng thức $AM-GM$. Hãy xem các ví dụ cụ thể sau:

Ví dụ 1: Các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq\frac{3}{2}$$

LỜI GIẢI

Ta không thể sử dụng trực tiếp bất đẳng thức $AM-GM$ với mẫu số vì bất đẳng thức sẽ đổi chiều

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\leq\frac{a}{2b}+\frac{b}{2c}+\frac{c}{2a}\geq\frac{3}{2}?!$$

Tuy nhiên, rất may mắn ta có thể dùng lại bất đẳng thức đó theo cách khác

$$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\geq a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

Ta đã sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$cho 2 số $1+b^2\geq 2b$ ở dưới mẫu nhưng lại có được một bất đẳng thức thuận chiều? Sự may mắn ở đây là một cách dùng ngược bất đẳng thức $AM-GM$, một kĩ thuật rất ấn tượng và bất ngờ. Nếu không sử dụng phương pháp này thì bất đẳng thức trên sẽ rất khó và dài.

Từ bất đẳng thức trên, xây dựng 2 bất đẳng thức đương tự với b, crồi cộng cả 3 bất đẳng thức lại suy ra:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}=a+b+c-\frac{ab+bc+ac}{2}\geq\frac{3}{2}$$

vì ta có $ab+bc+ac\leq 3$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Với cách làm trên có thể xây dựng bất đẳng thức tương tự với 4 số.

Ví dụ 2: Các số dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+d^2}+\frac{d}{1+a^2}\geq 2$$

Và nếu không dùng kĩ thuật *Cauchy ngược dấu* thì gần như bài toán này không thể giải được theo cách thông thường được. Kĩ thuật này thực sự hiệu quả với các bài toán bất đẳng thức hoán vị.

Ví dụ 3: Chứng minh với mọi số thực dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiên $a+b+c+d=4$ ta có:

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\geq 2$$

[4]Phần II này được trích nguyên mẫu trong cuốn sách ”Sáng tạo Bất đẳng thức” của tác giả Phạm Kim Hùng.

LỜI GIẢI

Theo bất đẳng thức $AM-GM$

$$\frac{a}{1+b^2c}=a-\frac{ab^2c}{1+b^2c}\geq a-\frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}}=a-\frac{ab\sqrt{c}}{2}$$

$$\geq a-\frac{b\sqrt{a.ac}}{2}\geq a-\frac{b\left(a+ac\right)}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{1+b^2c}\geq a-\frac{1}{4}\left(ab+abc\right)$$

Hoàn toàn tương tự ta có thêm 3 bất đẳng thức sau:

$$\frac{b}{1+c^2d}\geq b-\frac{1}{4}\left(bc+bcd\right),\frac{c}{1+d^2a}\geq c-\frac{1}{4}\left(cd+cda\right),\frac{d}{1+a^2b}\geq d-\frac{1}{4}\left(da+dab\right)$$

Cộng vế cả 4 bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\geq a+b+c+d-\frac{1}{4}\left(ab+bc+cd+da+abc+bcd+cda+dab\right)$$

Từ bất đẳng thức $AM-GM$ dễ dàng suy ra các bất đẳng thức:

$$ab+bc+cd+da\leq\frac{1}{4}{(a+b+c+d)}^2=4$$

$$abc+bcd+cda+dab\leq\frac{1}{16}{(a+b+c+d)}^3=4$$

Do đó

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\geq a+b+c+d-2=2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

Ví dụ 4: Chứng minh với mọi số thực dương a,b,c,d tac luôn có:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+d^2}+\frac{d^3}{d^2+a^2}\geq\frac{a+b+c+d}{2}$$

LỜI GIẢI

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ với 2 số

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\geq a-\frac{ab^2}{2ab}=a-\frac{b}{2}$$

Xây dựng 3 bất đẳng thức tương tự với b,c,drồi cộng theo vế các bất đẳng thức lại ta được:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+d^2}+\frac{d^3}{d^2+a^2}\geq a-\frac{b}{2}+b-\frac{c}{2}+c-\frac{d}{2}+d-\frac{a}{2}=\frac{a+b+c+d}{2}$$

Ta có được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi tất cả các biến bằng nhau.

Một bất đẳng thức cùng dạng trên là:

$$\frac{a^4}{a^3+2b^3}+\frac{b^4}{b^3+2c^3}+\frac{c^4}{c^3+2d^3}+\frac{d^4}{d^3+2a^3}\geq\frac{a+b+c+d}{3}$$

Ví dụ 5: Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{b+2a^2}\geq 1$$

LỜI GIẢI

Sử dụng biến đổi và bất đẳng thức $AM-GM$ cho 3 số:

$$\frac{a^2}{a+2b^2}=a-\frac{2ab^2}{a+2b^2}\geq a-\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}}=a-\frac{2}{3}(ab)^{\frac{2}{3}}$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có 2 bất đẳng thức:

$$\frac{b^2}{b+2c^2}\geq b-\frac{2}{3}(bc)^{\frac{2}{3}}, \frac{c^2}{c+2a^2}\geq c-\frac{2}{3}(ca)^{\frac{2}{3}}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$a+b+c-\frac{2}{3}\left((ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\right)\geq 1$$

$$\Leftrightarrow (ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\leq 3$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng, vì theo bất đẳng thức $AM-GM$:

$$a+ab+b\geq 3(ab)^{\frac{2}{3}}, b+bc+c\geq 3(bc)^{\frac{2}{3}}, c+ca+a\geq 3(ca)^{\frac{2}{3}}$$

Ngoài ra dễ thấy $ab+bc+ca\leq 3$ nên ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Kết quả của bài toán vẫn đúng khi thay giả thiết $a+b+c=3$ bởi $ab+bc+ca=3$ hoặc $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$, trường hợp sau khó hơn một chút. Ta có thêm một bất đẳng thức khác cùng dạng trên.

Ví dụ 6: Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{b+2a^3}\geq 1$$

LỜI GIẢI

Chứng minh tương tự đưa bất đẳng thức về:

$$b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{a^2}+a\sqrt[3]{c^2}\leq 3$$

Sau đó áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$ba^{\frac{2}{3}}\leq b\left(2a+1\right), cb^{\frac{2}{3}}\leq c\left(2b+1\right), ac^{\frac{2}{3}}\leq a\left(2c+1\right)$$

Cộng cả ba vế bất đẳng thức trên được điều phải chứng minh.

Ví dụ 7: Chứng minh với mọi số thực dương a, b, c có tổng bằng 3 thì:

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\geq 3$$

LỜI GIẢI

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ dễ thấy

$$\frac{a+1}{b^2+1}=a+1-\frac{(a+1)\,b^2}{b^2+1}\geq a+1-\frac{b^2\,(a+1)}{2b}=a+1-\frac{ab+b}{2}$$

Tương tự ta có 2 bất đẳng thức nữa với b, c rồi cộng lại ta được:

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\geq\left(a+1-\frac{ab+b}{2}\right)+\left(b+1-\frac{bc+c}{2}\right)+\left(c+1-\frac{ca+a}{2}\right)$$

$$=3+\frac{a+b+c-ab-bc-ca}{2}\geq 3$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 8: Chứng minh rằng với mọi a, b, c, d dương có tổng bằng 4 thì:

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{d^2+1}+\frac{d+1}{a^2+1}\geq 2$$

Cũng bằng phương pháp tương tự ta có bất đẳng thức sau đây.

Ví dụ 9: Chứng minh rằng với mọi a, b, c, ddương có tổng bằng 4 thì:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\geq 2$$

LỜI GIẢI

Thật vậy ta có đánh giá sau:

$$\frac{1}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}\geq 1-\frac{a^2}{2a}=1-\frac{a}{2}$$

Sau đó chỉ cần làm tương tự vớib, c, drồi cộng lại ta được điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d=1$.

Kĩ thuật Cauchy ngược dấu là một kĩ thuật giúp giải quyết bài toán theo lối suy nghĩ nhẹ nhàng và trong sáng, các kết quả làm bằng kĩ thuật này nói chung rất khó có thể làm được theo cách khác, hoặc phải làm theo cách khá dài.

Trích "Sáng tạo Bất đẳng thức–Phạm Kim Hùng"

III. MỘT SỐ BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI HAY

Bài toán 1: Cho x, y, z là 3 số thực dương . Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{yz}}{x + 2\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{xz}}{y + 2\sqrt{xz}} + \frac{\sqrt{xy}}{z + 2\sqrt{xy}}$$

(Đề dự bị khối B – 2010)

LỜI GIẢI
Đây là lời giải của **HÀ QUỐC ĐẠT** trên Diễn đàn toán học VMF
Ta có:

$$\frac{\sqrt{yz}}{x + 2\sqrt{yz}} = 1 - \frac{x}{x + 2\sqrt{yz}} \leq 1 - \frac{x}{x + y + z} \ \ (1)$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{\sqrt{xz}}{y + 2\sqrt{xz}} = 1 - \frac{y}{y + 2\sqrt{xz}} \leq 1 - \frac{y}{x + y + z} \ (2); \ \frac{\sqrt{xy}}{z + 2\sqrt{xy}} = 1 - \frac{z}{z + 2\sqrt{xy}} \leq 1 - \frac{z}{x + y + z} \ (3)$$

Cộng theo vế (1)(2)(3) ta có:

$$2P \leq 3 - \frac{x + y + z}{x + y + z} = 2 \ \Rightarrow P \leq 1$$

Vậy $MinP = 1$ khi và chỉ khi $x = y = z$.

Bài toán 2: Cho 3 số a, b, c là 3 số thực dương.
Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + ab + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

LỜI GIẢI 1
Đây là lời giải của **Ispectorgadget** trên Diễn đàn toán học VMF
Sử dụng biến đổi và bất đẳng thức $AM - GM$ cho 3 số ta có:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} = a - \frac{a^2b + ab^2}{a^2 + ab + b^2} \geq a - \frac{ab(a + b)}{3ab} = a - \frac{a + b}{3} \ (1)$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{b^3}{b^2 + cb + c^2} \geq b - \frac{b + c}{3} \quad (2); \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} \geq c - \frac{a + c}{3} \quad (3)$$

Cộng (1)(2)(3) ta có:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} \geq a + b + c - \frac{a + c}{3} - \frac{a + b}{3} - \frac{b + c}{3} = \frac{a + b + c}{3}$$

Ta có được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ta cũng có một lời giải khác khá hay, hoàn toàn không liên quan đến LỜI GIẢI 1 và cũng thu được đánh giá tương tự.

LỜI GIẢI 2
Đây là lời giải của **vietfrog** trên Diễn đàn toán học VMF
Lời giải này sử dụng "Phương pháp tiếp tuyến"
. Giả sử:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2a-b}{3}$$
$$\Leftrightarrow a^3+b^3-a^2b-ab^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0 \ (*)$$

Do $a, b > 0$ nên bất đẳng thức $(*)$ hiển nhiên đúng. Như vậy giả sử đúng.
Xây dựng 2 bất đẳng thức tương tự với b, c rồi cộng theo vế ta được:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+ab+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ac+a^2} \geq \frac{2a-b}{3} + \frac{2b-c}{3} + \frac{2c-a}{3} = \frac{a+b+c}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi xảy ra khi $a = b = c$.

Bài toán 3: Cho a, b, c thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.
Chứng minh rằng:

$$V = \frac{a+b+c}{a^2+abc} + \frac{a+b+c}{b^2+abc} + \frac{a+b+c}{c^2+abc} \geq \frac{9}{2}$$

(Đề thi thử ĐH lần 2 trường chuyên Nguyễn Huệ 2007-2008)

LỜI GIẢI
Đây là lời giải của **Ispectorgadget** trên Diễn đàn toán học VMF
Từ giả thiết ta có:

$$a+b+c = 3 \geq 3\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow 1 \geq abc$$

Do đó: $V \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1}\right) = 3\left(1 - \frac{a^2}{a^2+1} + 1 - \frac{b^2}{b^2+1} + 1 - \frac{c^2}{c^2+1}\right)$

$$\geq 3\left(1 - \frac{a^2}{2a} + 1 - \frac{b^2}{2b} + 1 - \frac{c^2}{2c}\right) = 3\left[3 - \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\right] = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

Ta có được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

Bài toán 4: Cho a, b là 2 số thực dương thay đổi thỏa mãn $a+b=2$ Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$M = \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1}$$

LỜI GIẢI 1
Ta có: $\frac{a^2}{a+1} = a - \frac{a}{a+1} \geq a - \frac{a}{2\sqrt{a}} = a - \frac{\sqrt{a}}{2}$
Tương tự với b ta có được: $b+1 \geq b - \frac{\sqrt{b}}{2}$
Cộng theo vế 2 bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} = a - \frac{\sqrt{a}}{2} + b - \frac{\sqrt{b}}{2} = a+b-\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

Theo Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\sqrt{a+b} \geq \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Do đó: $$M \geq (a+b) - \frac{\sqrt{2(a+b)}}{2} = 2-1 = 1$$
Như vậy : $MinM = 1$. Dấu "=" xảy ra khi a=b=c=1
Thực ra thì bài toán vẫn được giải quyết bằng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng Engel hay vẫn gọi là bất đẳng thức Schwarz:
Với x, y, m, n là các số dương ta luôn có:

$$\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} \geq \frac{(x+y)^2}{m+n} (*)$$

LỜI GIẢI 2
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Shwarz dạng Engel ta có:

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{(a+b)^2}{a+b+2} = \frac{2^2}{2+2} = 1$$

Ta cũng có được $MinM = 1$ khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Tuy nhiên, khi làm bài thi Đại học thì ta vẫn phải chứng minh lại bất đẳng thức $(*)$. Vì vậy cách chứng minh bằng kỹ thuật Cauchy ngược dấu như trên cũng có thể là một lựa chọn hay.

Bài toán 5: Cho a, b, c là 3 số thực dương; $a, b, c < 2$ CMR:

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{3}{2}$$

LỜI GIẢI
Ta có:
$$\frac{1}{b^2+1} = 1 - \frac{b^2}{b^2+1} \geq 1 - \frac{b^2}{2b} = 1 - \frac{b}{2} = \frac{2-b}{2} \Rightarrow \frac{1}{2-b} \geq \frac{b^2+1}{2} (1)$$
Chứng minh tương tự: $$\frac{1}{2-c} \geq \frac{c^2+1}{2} \ (2) \ ; \frac{1}{2-a} \geq \frac{a^2+1}{2} \ (3)$$
Cộng theo vế (1)(2)(3) ta có:

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq \frac{a^2+1+b^2+1+1+c^2}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{3}{2}$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi các biến bằng 1.

Bài toán 6: Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn: $xyz = 1$ Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{x^4y}{x^2+1} + \frac{y^4z}{y^2+1} + \frac{z^4x}{z^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

LỜI GIẢI

Đây là lời giải của **phuc_90** trên Diễn đàn toán học VMF

Theo bất đẳng thức $AM-GM$cho 3 số kết hợp với giả thiết $xyz=1$ ta có:

$$x^2y+x^2y+z^2x \geq 3\sqrt[3]{x^3.(xyz)^2}=3x$$

Tương tự ta có được: $y^2z+y^2z+x^2y \geq 3y$; $z^2x+z^2x+y^2z \geq 3z$

Cộng 3 bất đẳng thức theo vế theo vế ta có:

$$x^2y+y^2z+z^2x \geq x+y+z(*)$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{x^4y}{x^2+1}=x^2y\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) \geq x^2y-\frac{1}{2}xy$$

Từ đó suy ra:

$$\sum \frac{x^4y}{x^2+1} \geq \sum x^2y-\frac{1}{2}\sum xy \overset{(*)}{\geq} \frac{1}{2}\sum\left(x^2y+y\right)-\frac{1}{2}\sum xy \overset{AM-GM}{\geq} \frac{\sum xy}{2} \overset{AM-GM}{\geq} \frac{3}{2}$$

Đây chính là điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Bài toán 7: Cho a,b,c là 3 số thực dương thay đổi thỏa mãn $a+b+c=3$ Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^3+16}+\frac{b}{c^3+16}+\frac{c}{a^3+16} \geq \frac{1}{6}$$

LỜI GIẢI

Đây là lời giải của **HÀ QUỐC ĐẠT** trên Diễn đàn toán học VMF

Ta có:

$$\frac{a}{b^3+16}=\frac{1}{16}(a-\frac{ab^3}{b^3+16})=\frac{1}{16}(a-\frac{ab^3}{b^3+2^3+2^3}) \geq \frac{1}{16}(a-\frac{ab^3}{12b})=\frac{1}{16}(a-\frac{ab^2}{12})$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{16}(3-\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{12}) \geq \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2 \leq 4$$

Chứng minh BĐT mạnh hơn:

$$ab^2+bc^2+ca^2+abc \leq 4$$

Giả sử b nằm giữa a và c.

Ta có:

$$a(b-c)(b-a) \leq 0$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$

$$ab^2+bc^2+ca^2+abc=b(a+c)^2+a(b-a)(b-c) \leq b(a+c)^2 \leq 4$$

Từ đó ta có được điều phải chứng minh.

Bài toán 8: Cho a, b, c là 3 số không nhỏ hơn 1. Chứng minh bất đẳng thức:

$$a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)+2(\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{c^2+1}) \geq 9$$

LỜI GIẢI
Ta có:

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{c^2+1}=1-\frac{a^2}{1+a^2}+1-\frac{b^2}{1+b^2}1-\frac{c^2}{c^2+1}=3-\left(\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{c^2+1}\right)$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{c^2+1} \leq \frac{a^2}{2a}+\frac{b^2}{2b}+\frac{c^2}{2c}=\frac{a+b+c}{2}$$

Suy ra:

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{c^2+1} \geq 3-\frac{a+b+c}{2}$$

Ta cần chứng minh:

$$a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)+2\left(3-\frac{a+b+c}{2}\right) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow a\left(b+c-1\right)+b\left(a+c-1\right)+c\left(b+a-1\right) \geq 3 \ \ (*)$$

Thật vậy, do $a, b, c \geq 1 \Rightarrow (b+c-1) \geq 1 \Rightarrow a\left(b+c-1\right) \geq 1$. Từ đó nhận thấy bất đẳng thức $(*)$ đúng và suy được bất đẳng thức cần chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài toán 9: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^n+b^n+c^n=k$ và $n, k \in N^*$.
Tìm Min của biểu thức:

$$S=\frac{a^n}{1+nb^{n+1}}+\frac{b^n}{1+nc^{n+1}}+\frac{c^n}{1+na^{n+1}}$$

LỜI GIẢI
Đây là lời giải của **vietfrog** trên Diễn đàn toán học VMF
Ta có:

$$S=\sum_{cyc}^{a,b,c}\frac{a^n}{1+nb^{n+1}}=\sum_{cyc}^{a,b,c}\left(a^n-\frac{n.a^nb^{n+1}}{1+nb^{n+1}}\right)=\sum_{sym}^{a,b,c}a^n-\sum_{cyc}^{a,b,c}\frac{n.a^nb^{n+1}}{1+nb^{n+1}}$$

$$\geq k-\sum_{cyc}^{a,b,c}\frac{n.a^nb^{n+1}}{(n+1)b}=k-\frac{n}{n+1}.\sum_{cyc}^{a,b,c}a^nb^n$$

Mặt khác ta có:

$$\sum_{cyc}^{a,b,c}a^nb^n=a^nb^n+b^nc^n+a^nc^n \leq \frac{\left(a^n+b^n+b^n\right)^2}{3}=\frac{k^2}{3}$$

Suy ra:

$$S \geq k - \frac{n}{n+1}.\frac{k^2}{3}$$

Như vậy: $MinS = k - \frac{n}{n+1}.\frac{k^2}{3}$ khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{k}{3}$.
Bài toán trên có thể tổng quát cho n số dương.

Bài toán 10: Cho $a_i > 0; i = \overline{1.n}$ Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1^n}{a_1^{n-1} + (n-2)a_2^{n-1}} + ... + \frac{a_n^n}{a_n^{n-1} + (n-2)a_1^{n-1}} \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n-1}$$

LỜI GIẢI
Đây là lời giải của **anh qua** trên Diễn đàn toán học VMF
Ta có:

$$\frac{a_1^n}{a_1^{n-1} + (n-2)a_2^{n-1}} = a_1 - \frac{(n-2)a_1.a_2^{n-1}}{a_1^{n-1} + (n-2)a_2^{n-1}}$$

. Mà theo bất đẳng thức $AM - GM$:

$$a_1^{n-1} + (n-2)a_2^{n-1} \geq (n-1).a_1.a_2^{n-2}$$

Do đó:

$$\frac{a_1^n}{a_1^{n-1} + (n-2)a_2^{n-1}} \geq a_1 - \frac{(n-2)a_2}{n-1}$$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự rồi cộng vế với vế ta có điều phải chứng minh.

Trên đây là 10 Bài toán về bất đẳng thức và cực trị có sử dụng kĩ thuật *Cauchy ngược dấu*. Có thể đó không phải là những lời giải hay nhất, ngắn gọn nhất nhưng mong rằng qua đó, các bạn có thể có thêm những kinh nghiệm mới, cách nhìn nhận mới để từ đó sáng tạo ra những lời giải tuyệt vời. Chúc các bạn thành công.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Dưới đây là một số bài tập đề nghị có thể giải bằng cách sử dụng kỹ thuật *Cauchy ngược dấu*. Những bài tập này có thể giải quyết bằng nhiều cách nhưng hay thử đặt bút và làm bằng kỹ thuật được nói tới trong bài. Sẽ rất thú vị!

Bài tập 1: Cho x, y, z là 3 số thực dương thay đổi thỏa mãn $x + y + z = 3$.
Tìm GTNN của biểu thức:

$$V = \frac{x^2}{x + y^2} + \frac{y^2}{y + z^2} + \frac{z^2}{z + x^2}$$

Bài tập 2: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2} \geq \frac{a + b + c}{2}$$

Bài tập 3: Cho a, b là 2 số thực dương thỏa mãn $ab = 1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{1 + b^2} + \frac{b^3}{1 + a^2} \geq 1$$

Bài tập 4: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{1 + 2b^3} + \frac{b}{1 + 2c^3} + \frac{c}{1 + 2a^3}$$

Bài tập 5: Cho a, b, c là 3 số thực dương thỏa $a, b, c < 4$.Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{4 - a} + \frac{1}{4 - b} + \frac{1}{4 - c} \geq \frac{3}{4} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{16}$$

Bài tập 6: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a + b + c = k$ và $n \in N^*$
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$S = \sum_{cyc}^{a,b,c} \frac{a^2}{a + nb^{n+1}}$$

Tài liệu tham khảo

1. Cuốn sách "Sáng tạo Bất đẳng thức" – Phạm Kim Hùng
2. Diễn đàn toán học VMF : diendantoanhoc.net
3. Một số đề thi.

Biên tập : Vũ Đình Việt và Trần Trung Kiên

Soạn thảo LaTeX : Vũ Đình Việt.

HẾT