Phần một BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI (AM-GM) VÀ KĨ THUẬT SỬ DỤNG

I-CÁC DẠNG BẤT ĐẲNG THỨC

1).Dạng cơ bản: $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$ ***với*** $a_i \ge 0, \forall i=\overline{1,n}$

2).Dạng luỹ thừa: $\frac{a_1^m+a_2^m+...+a_n^m}{n} \ge \left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^m$ ***với*** $a_i \ge 0, \forall i=\overline{1,n}$

3).Dạng cộng mẫu số: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...\frac{1}{a_n} \ge \frac{n^2}{a_1+a_2+...+a_n}$ ***với*** $a_i > 0, \forall i=\overline{1,n}$

4).Dạng trung bình

a).Trung bình nhân: $\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1.b_2...b_n} \le \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}$ ***(Bất đẳng thức MinCôpxki)***

Hệ quả: $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \ge \left(1+\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\right)^n$

b).Trung bình căn: $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2} \ge \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2}$ ***(Bất đẳng thức MinCôpxki)***

c). Trung bình điều hoà: $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{a_i+b_i} \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i}$ ***với*** $a_i > 0, b_i > 0;\ \forall i=\overline{1,n}$

Mối quan hệ giữa các dạng trung bình: $\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

5).Dạng phân thức: $\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n} \ge \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}}$ ***với*** $a_i > 0, \forall i=\overline{1,n}$ ***(Bất đẳng thức Jen sen).***

II-KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI

1. Phương pháp cân bằng tổng (Đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân)

Phương pháp này xuất phát từ một nhận xét sâu sắc trong sách giáo khoa, tức là khi "***Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau***".

Mở rộng một cách tự nhiên thì ***để chứng minh tổng*** $S = S_1 + S_2 + ... + S_n \ge m$,

ta biến đổi $S = A_1+A_2+...+A_n$ ***là các số không âm mà có tích*** $A_1A_2...A_n = C$ ***không đổi***,

sau đó ta áp dụng bất đẳng thức Côsi.

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của f(x) = $x+\frac{1}{x-1}$ khi x > 1

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số x - 1 > 0 và $\frac{1}{x-1} > 0$ ta có

$$x-1+\frac{1}{x-1} \ge 2\sqrt{(x-1)\frac{1}{x-1}} \Leftrightarrow x-1+\frac{1}{x-1} \ge 2 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x-1} \ge 3.$$

Vậy f(x) đạt giá trị nhỏ nhất là 3 khi x = 2.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu x > -1 thì $2x+\frac{1}{(x+1)^2} \ge 1$

Phân tích: Nếu áp dụng ngay bất đẳng thức Côsi thì ta thấy chưa ra kết quả, nhưng nếu tách 2x thành x+1+x+1-2 thì có ngay điều phải chứng minh.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng $x \geq 0$ thì $x + \frac{27}{(x+3)^3} \geq 1$.

Phân tích: Biến đổi vế trái thành một tổng của các số hạng có tích không đổi, vì vậy phải phân tích x thành 3 số hạng là $\frac{x+3}{3}$

Giải: Bất đẳng thức đã cho tương đương

$$\frac{x+3}{3} + \frac{x+3}{3} + \frac{x+3}{3} + \frac{27}{(x+3)^3} - 3 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x+3}{3} + \frac{x+3}{3} + \frac{x+3}{3} + \frac{27}{(x+3)^3} \geq 4.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số dương gồm ba số $\frac{x+3}{3}$ và $\frac{27}{(x+3)^3}$

ta có điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi x=0

Để luyện tập ta có thể cho các em áp dụng những bài tương tự sau:

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $x + \frac{2}{2x+1}$ với x > 0

2) Chứng minh rằng nếu nếu x > - 3 thì $\frac{2x}{3} + \frac{9}{(x+3)^2} \geq 1$

3) Chứng minh rằng nếu a > b > 0 thì $a + \frac{b}{(a-b)(b+1)^2} \geq 3$

4) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q = x + y biết x > 0, y > 0 thoả mãn: $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1$

Hướng dẫn: từ biểu thức ta có y = $\frac{3x}{x-2} = 3 + \frac{6}{x-2}$ do vậy

Q = $x + y = x + 3 + \frac{6}{x-2} = x - 2 + \frac{6}{x-2} + 5$

5) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức R = $\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{a^2+b^2}{ab}$ với a > 0, b > 0

HD: R = $\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{a^2+b^2}{4ab} + \frac{3}{4}.\frac{a^2+b^2}{ab}$ sau đó dùng bất đẳng thức Côsi.

6. Chứng minh rằng $(x+2)^2 + \frac{2}{x+2} \geq 3 \quad (a > 0)$

7. Chứng minh rằng

1). $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8 \ge 64ab\left(a+b\right)^2$, $\forall a,b \ge 0$

2). $\left(1+a+b\right)\left(a+b+ab\right) \ge 9ab,\ \forall a,b \ge 0$

3). $3a^3+7b^3 \ge 9ab^2,\ \forall a,b \ge 0$ HD: $3a^3+7b^3 \ge 3a^3+6b^3 = 3a^3+3b^3+3b^3 \ge 3\sqrt[3]{27a^3b^6} = 9ab^2,\ \forall a,b \ge 0$

8. Cho $\begin{cases} a,b,c,d > 0 \\ \dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}+\dfrac{1}{1+d} \ge 3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $abcd \le \dfrac{1}{81}$

HD: $\dfrac{1}{1+a} = \left(1-\dfrac{1}{1+b}\right)+\left(1-\dfrac{1}{1+c}\right)+\left(1-\dfrac{1}{1+d}\right) = \dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}+\dfrac{d}{1+d} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{bcd}{\left(1+b\right)\left(1+c\right)\left(1+d\right)}} \ge 0$

9. Cho $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\left(\dfrac{1}{c}-1\right) \ge 8$.

HD: $1-\dfrac{1}{a} = \dfrac{1-a}{a} = \dfrac{b+c}{a}$.

Chú ý: Tách nghịch đảo trong kĩ thuật đánh giá trung bình cộng sang trung bình nhân là kĩ tách phần nguyên theo mẫu số để khi chuyển sang trung bình nhân thì các phần chứa biến số bị triệt tiêu.

10. Chứng minh rằng:

1). $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \ge 2,\ \forall a \in \mathbb{R}$

2). $\dfrac{a^2+b^2}{a-b} \ge 2\sqrt{2},\ \forall \begin{cases} a > b \\ ab=1 \end{cases}$

3). $a+\dfrac{1}{b\left(a-b\right)} \ge 3,\ \forall a > b > 0$

4). $a+\dfrac{4}{\left(a-b\right)\left(b+1\right)^2} \ge 3,\ \forall a > b \ge 0$

5). $a+\dfrac{1}{b\left(a-b\right)^2} \ge 2\sqrt{2},\ \forall a > b > 0$

6). $\dfrac{2a^3+1}{4b\left(a-b\right)} \ge 3,\ \forall \begin{cases} a \ge \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a}{b} > 1 \end{cases}$

11. Với mọi x, y, z dương, hãy chứng minh $\dfrac{x^3}{yz}+\dfrac{y^3}{zx}+\dfrac{z^3}{xy} \ge x+y+z$

12. Với x, y, z là các số dương có tích bằng 1, hãy chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{x^3}{\left(1+y\right)\left(1+z\right)}+\frac{y^3}{\left(1+z\right)\left(1+x\right)}+\frac{z^3}{\left(1+x\right)\left(1+y\right)} \ge \frac{3}{4}$$

2. Phương pháp cân bằng tích *(Đánh giá từ trung bình nhân sang trung bình cộng)*

Từ một hệ quả quan trọng trong sách giáo khoa: ***" Nếu hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau".***

Mở rộng ta có: để chứng minh một biểu thức có dạng P= $\boldsymbol{P_1P_2...P_n} \le M$

ta ***phân tích P =*** $\boldsymbol{B_1B_2...B_n}$ *là các số không âm mà* ***tổng*** $\boldsymbol{B_1+B_2+...+B_n=C}$ *là* ***một số không đổi.***

Ví dụ 1. Cho a > 0, b > 0 và a + b = 1. Chứng minh rằng $ab^2 \le \frac{4}{27}$.

Phân tích: ta cần tách biểu thức ab^2 thành một tích có tổng không đổi mà tổng đó chắc chắn phải liên quan đến a + b = 1.

Giải: $ab^2 = 4\ a\ .\frac{b}{2}.\frac{b}{2}$ mà theo bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương là a, b/2,b/2

ta có: $\sqrt[3]{a.\frac{b}{2}.\frac{b}{2}} \le \frac{a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow a.\frac{b}{2}.\frac{b}{2} \le \frac{1}{27} \Rightarrow 4a.\frac{b}{2}.\frac{b}{2} \le \frac{4}{27} \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi a = 1/3; b = 2/3.

Bài tập tự luyện

Bài 1. Chứng minh rằng:

1). $\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \le \sqrt{(a+c)(b+d)},\ \forall a,b,c,d>0$

2). $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab},\ \forall \begin{cases} a>c>0 \\ b>c>0 \end{cases}$

3). $16ab(a-b)^2 \le (a+b)^4,\ \forall a,b \ge 0$

4). $-\frac{1}{2} \le \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \le \frac{1}{2}$

Bài 2. Chứng minh rằng:

$\sqrt[3]{abc}+1 \le \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)},\ \forall a,b,c \ge 0$

Tổng quát: $\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1.b_2...b_n} \le \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}$ ***(Bất đẳng thức MinCôpxki).***

Bài 3. Chứng minh rằng:

$\frac{1}{\sqrt[n-1]{n!}}+\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} \le 1,\ \forall 3 \le n \in \mathbb{N}$.

HDG: Biến đổi: $\frac{1}{\sqrt[n-1]{n!}}+\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} = \sqrt[n-1]{\frac{1}{2}.\frac{1}{3}...\frac{1}{n}}+\sqrt[n-1]{\frac{1}{2}.\frac{2}{3}...\frac{n-1}{n}}$

Bài 4. Cho $\begin{cases} a,b,c \ge 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$**. Chứng minh rằng:**

1). $16abc \le a+b$

HDG: $16abc \overset{Cô\,si}{\le} 16\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.c = 4(a+b)(a+b)c \overset{Côsi}{\le} 4(a+b)\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 = a+b$

2). $ab+bc+ca-abc \le \frac{8}{27}$

HDG:

$$VT = 1 + ab + bc + ca - a - b - c - abc = (1-a)(1-b)(1-c) \overset{Côsi}{\leq} \left(\frac{1-a+1-b+1-c}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

3). $abc(a+b)(b+c)(c+a) \leq \frac{8}{729}$

4). $0 \leq ab+bc+ca-2abc \leq \frac{7}{27}$ **(IMO-1984)**

Giải: Theo giả thiết suy ra: $a,b,c \in [0;1]$ **do đó:**

$$ab+bc+ca-2abc \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} - 2abc = 3(abc)^{\frac{2}{3}} - 2abc \geq 3abc - 2abc = abc \geq 0.$$

(vì $abc \in [0;1] \Rightarrow (abc)^{\frac{2}{3}} \geq abc$**).**

Ta sẽ chứng minh: $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc \quad \forall a,b,c \in [0;1]$.

Nếu có hai thừa số ở $VT \leq 0$**, chẳng hạn:**

$$\begin{cases} a+b-c \leq 0 \\ b+c-a \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 2b \leq 0 \text{ vô lí}$$

Nếu có đúng một thừa số ở $VT \leq 0 \Rightarrow$ **ĐPCM**

Nếu cả ba thừa số ở VT đều dương thì ta có:

$$VT = \sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}$$

$$\leq \frac{a+b-c+b+c-a}{2}.\frac{b+c-a+c+a-b}{2}.\frac{c+a-b+a+b-c}{2} = abc$$

Mà $a+b+c=1$ **suy ra:**

$$(1-2c)(1-2a)(1-2b) \leq abc$$

$$\Leftrightarrow 1-2a-2b-2c+4(ab+bc+ca)-8abc \leq abc$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca-2abc \leq \frac{1}{4}(1+abc) \leq \frac{1}{4}\left[1+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\right] = \frac{7}{27}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Chú ý: Nhân thêm hằng số trong kĩ thuật đánh giá trung bình nhân sang trung bình cộng

Bài 5. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab,\ \forall a,b \geq 1$$

Bài 6. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$**. Chứng minh rằng:** $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$

Bài 7. Cho $\begin{cases} a \geq 3 \\ b \geq 4 \\ c \geq 2 \end{cases}$**. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức** $P = \dfrac{ab\sqrt{c-2} + bc\sqrt{a-3} + ca\sqrt{b-4}}{2\sqrt{2}}$

Bài 8. Cho $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$. **Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:** $A = (3-x)(4-y)(2x+3y)$

Bài 9. a). Cho $x, y > 0$. **Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:** $f(x;y) = \dfrac{(x+y)^3}{xy^2}$

b). Cho $x, y, z > 0$. **Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:** $f(x;y;z) = \dfrac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3}$

Tổng quát: Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$. **Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:**

$$f(x_1; x_2; ...; x_n) = \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^{1+2+...+n}}{x_1 x_2{}^2 ... x_n^n}$$

Bài 10. Chứng minh rằng; $A = \sin^2 x.\cos x \le \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

Tổng quát: $A = \sin^m x.\cos^n x \le \sqrt{\dfrac{m^m.n^n}{(m+n)^{m+n}}}, \ \forall 1 \le m, n \in \mathbb{Z}$

Bài 11. (ĐỀ THI HSG Tỉnh Nghệ An-Bảng A-1992-1993)

Cho $a_1, a_2, a_3, ..., a_{10}$ **là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của**

$$P = \frac{a_1^2 + a_2^2 + .. + a_{10}^2}{a_{10}(a_1 + a_2 + ... + a_9)}.$$

Giải. Nhận xét vai trò của $a_1, a_2, ..., a_9$ bình đẳng nên ta phân phối a_{10} đều cho 9 số .

Áp dụng bất đẳng thức Cô si :

$$\begin{cases} a_1^2 + \dfrac{1}{9}a_{10}^2 \ge 3a_1a_{10} \\ a_2^2 + \dfrac{1}{9}a_{10}^2 \ge 3a_2a_{10} \\ .... \\ a_9^2 + \dfrac{1}{9}a_{10}^2 \ge 3a_9a_{10} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{10}^2 \ge 3a_{10}(a_1 + a_2 + ... + a_9)$

Suy ra: $P = \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + .. + a_{10}^2}{a_{10}(a_1 + a_2 + ... + a_9)} \ge 3$.

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_9 = \dfrac{1}{3}a_{10}$ .Vậy: $MinP = 3$ khi $a_1 = a_2 = ... = a_9 = \dfrac{1}{3}a_{10}$

3. Kĩ thuật dùng hoán vị vòng.

Đây là một kĩ thuật phổ biến khi dùng bất đẳng thức Côsi , rất đơn giản và hiệu quả khi dùng và tạo rất nhiều hứng thú cho học sinh.

Ví dụ 1: Chứng minh $\forall a, b, c > 0$ thì $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ac}{b} \ge a + b + c$

Phân tích: Nếu áp dụng ngay bất đẳng thức Côsi cho 3 số hạng ta thấy khó có thể làm ngay được, vì vậy ta cần linh hoạt vận dụng cho từng bộ hai số.

Giải: Vì a > 0, b > 0, c > 0 nên $\frac{ab}{c} > 0$, $\frac{bc}{a} > 0$, $\frac{ac}{b} > 0$ áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các cặp:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \ge 2\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}} \Leftrightarrow \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \ge 2b \\ \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \ge 2\sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ac}{b}} \Leftrightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \ge 2c \\ \frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} \ge 2\sqrt{\frac{ac}{b}.\frac{ba}{c}} \Leftrightarrow \frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} \ge 2a \end{array}\right\} \Rightarrow 2\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b}\right) \ge 2(a+b+c) \Rightarrow \text{đpcm}$$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c.

Chú ý:

Ghép đối xứng

Phép cộng: $\begin{cases} 2\left(x+y+z\right) = x+y+y+z+z+x \\ x+y+z = \frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2} \end{cases}$

Phép nhân: $\begin{cases} x^2y^2z^2 = \left(xy\right).\left(yz\right).\left(zx\right) \\ xyz = \sqrt{xy}.\sqrt{yz}.\sqrt{zx} \end{cases} \quad \left(x, y, z \ge 0\right)$

Ví dụ 1. Chứng minh rằng:

1). $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \ge a+b+c, \ \forall a,b,c > 0$

2). $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \ge \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \ \forall abc \ne 0$

3). $a^3 + b^3 + c^3 \ge a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab} \quad \forall a,b,c \ge 0$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

1). $\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right) \le \frac{1}{8}abc$

2). $\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \ge 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

3). $\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)\left(a+b-c\right) \le abc$

4). $R \ge 2r$

5). $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{3}S$

6). $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \ge 3\sqrt{3}S$

7). $\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)\left(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2\right) \ge 27S^2$

Ví dụ 3.Các số thực dương x,y,z **thoả mãn điều kiện:** $x^2+y^2+z^2=3$.
Hãy chứng minh rằng:

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq 3$$

HD: Bình phương 2 vế BĐT cần chứng minh rồi ghép đối xứng.

4.Ghép cặp nghịch đảo

$$\left(x_1+x_2+...+x_n\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2\ \forall x_i>0\ ,i=\overline{1,n}$$

Ví dụ 1. Chứng minh rằng:

1). $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}\geq 6\ \ \forall a,b,c>0$

2). $\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{c+a}+\dfrac{2}{a+b}\geq\dfrac{9}{a+b+c}\ \ \forall a,b,c>0$

3). $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}\ \ \forall a,b,c>0$

4). $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\geq\dfrac{a+b+c}{2}\ \ \forall a,b,c>0$

Ví dụ 2. Cho $\begin{cases}a,b,c\geq 0\\ a+b+c=1\end{cases}$. **Chứng minh rằng:** $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\geq\dfrac{9}{2}$

Ví dụ 3. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c\leq 1\end{cases}$. **Chứng minh rằng:** $\dfrac{1}{a^2+2bc}+\dfrac{1}{b^2+2ca}+\dfrac{1}{c^2+2ab}\geq 9$

5. Đánh giá mẫu số

Ví dụ 1. Chứng minh rằng:

1). $\dfrac{1}{a^2+bc}+\dfrac{1}{b^2+ca}+\dfrac{1}{c^2+ab}\leq\dfrac{a+b+c}{2abc}\ \ \forall a,b,c>0$

2). $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\dfrac{1}{abc}\ \ \forall a,b,c>0$

3). $\dfrac{1}{a^4+b^4+c^4+abcd}+\dfrac{1}{b^4+c^4+d^4+abcd}+\dfrac{1}{c^4+d^4+a^4+abcd}+\dfrac{1}{d^4+a^4+b^4+abcd}\leq\dfrac{1}{abcd}$.

Tổng quát: Cho $a_1,a_2,...,a_n>0\ \left(n\geq 3\right)$. **Chứng minh rằng:**

$$\frac{1}{a_1^n+...+a_{n-1}^n+a_1a_2...a_n}+\frac{1}{a_2^n+...+a_n^n+a_1a_2...a_n}+...+\frac{1}{a_n^n+a_1^n+...+a_{n-2}^n+a_1a_2...a_n}\leq\frac{1}{a_1a_2...a_n}\ \ \forall a_i>0,\ i=\overline{1}$$

Ví dụ 2.Cho $a,b,c\in\left[0;1\right]$. **Chứng minh rằng:**

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+\left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right)\leq 1.$$

Tổng quát:

Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+...+a_n+1}+\frac{a_2}{a_1+a_3+...+a_n+1}+...+\frac{a_n}{a_1+a_2+...+a_{n-1}+1}+(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)\le 1 \quad \textbf{(1)}$$

với mọi $a_1,\ a_2,\ ...,a_n\in[0;1]$**.**

Giải: Giả sử $a_1=\max(a_1,a_2,...,a_n)$.Khi đó ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{a_1}{a_2+a_3+...+a_n+1}=\dfrac{a_1}{a_2+a_3+...+a_n+1}\\ \dfrac{a_2}{a_1+a_3+...+a_n+1}\le\dfrac{a_2}{a_2+a_3+..+a_n+1}\\ ....\\ \dfrac{a_n}{a_1+a_2+..+a_{n-1}+1}\le\dfrac{a_n}{a_2+....+a_{n-1}+a_n+1}\end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+...+a_n+1}+\frac{a_2}{a_1+a_3+...+a_n+1}+...+\frac{a_n}{a_1+a_2+...+a_{n-1}+1}\le\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_2+a_3+...+a_n+1}\quad (2)$$

Ta sẽ chứng minh:

$$(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)\le 1-\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_2+...+a_n+1}=\frac{1-a_1}{a_2+...+a_n+1}\qquad (3)$$

Nếu $a_1=1$ thì (3) đúng.

Nếu $a_1\ne 1$ thì $1-a_1>0$ .Do đó $(3)\Leftrightarrow(a_2+a_3+..+a_n+1)(1-a_2)(1-a_3)...(1-a_n)\le 1$

Áp dụng BĐT Cauchy cho VT ta có:

$$(a_2+a_3+..+a_n+1)(1-a_2)(1-a_3)...(1-a_n)\le\left[\frac{a_2+a_3+...+a_n+1+1-a_2+1-a_3+...+1-a_n}{n}\right]^n=1$$

Vậy (3) đúng.

Cộng vế theo vế của (2) và (3) ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a^2+b^2+c^2=1\end{cases}$**. Chứng minh rằng:** $\dfrac{a}{b^2+c^2}+\dfrac{b}{a^2+c^2}+\dfrac{c}{a^2+b^2}\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Tổng quát: Cho $\begin{cases}a_1,a_2,...,a_n>0\\ {a_1}^{2k}+{a_2}^{2k}+{a_n}^{2k}=1\end{cases}$ **và** $k,m,n\in\mathbb{Z}$**.**

Chứng minh rằng: $\dfrac{{a_1}^{2k-1}}{1-{a_1}^{2m}}+\dfrac{{a_2}^{2k-1}}{1-{a_2}^{2m}}+...+\dfrac{{a_n}^{2k-1}}{1-{a_n}^{2m}}\ge\dfrac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m}$

Giải: Ta có:

$$\frac{{a_1}^{2k-1}}{1-{a_1}^{2m}}+\frac{{a_2}^{2k-1}}{1-{a_2}^{2m}}+...+\frac{{a_n}^{2k-1}}{1-{a_n}^{2m}}\ge\frac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^{2k}}{a_1\left(1-a_1^{2m}\right)}+\frac{a_2^{2k}}{a_2\left(1-a_2^{2m}\right)}+....+\frac{a_n^{2k}}{a_n\left(1-a_n^{2m}\right)} \ge \frac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{a_1^{2k}}{a_1\left(1-a_1^{2m}\right)} \ge \frac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m} a_1^{2k} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow a_1\left(1-a_1^{2m}\right) \le \frac{2m}{2m+1\sqrt[2m]{2m+1}}$$

$$\Leftrightarrow a_1^{2m}\left(1-a_1\right)^{2m} \le \frac{(2m)^{2m}}{(2m+1)^{2m+1}}$$

Áp dụng BĐT Cô si ta có:

$$a_1^{2m}\left(1-a_1^{2m}\right)^{2m} = \frac{1}{2m}\left(2ma_1^{2m}\right)\left(1-a_1^{2m}\right)^{2m} \le \frac{1}{2m}\left[\frac{2ma_1^{2m}+\underbrace{\left(1-a_1^{2m}\right)+\left(1-a_1^{2m}\right)+...+\left(1-a_1^{2m}\right)}_{2m}}{2m+1}\right]^{2m+1}$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\frac{2m}{2m+1}\right)^{2m+1} = \frac{(2m)^{2m}}{(2m+1)^{2m+1}}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{a_2^{2k}}{a_2\left(1-a_2^{2m}\right)} \ge \frac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m} a_2^{2k} \qquad (2)$$

....

$$\frac{a_n^{2k}}{a_n\left(1-a_n^{2m}\right)} \ge \frac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m} a_n^{2k} \qquad (n)$$

Cộng vế theo (1), (2),…,(n) ta được:

$$\frac{a_1^{2k}}{a_1\left(1-a_1^{2m}\right)}+\frac{a_2^{2k}}{a_2\left(1-a_2^{2m}\right)}+....+\frac{a_n^{2k}}{a_n\left(1-a_n^{2m}\right)} \ge \frac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m}\left(a_1^{2k}+a_2^{2k}+...+a_n^{2k}\right) = \frac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m}$$

(vì $a_1^{2k}+a_2^{2k}+...+a_n^{2k}=1$).

Từ đó suy ra ĐPCM.

Chú ý: Đánh giá mẫu số trong kĩ thuật Côsi ngược dấu

Ví dụ 4: Các số dương a, b, c thoả mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức:

$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2} \ge \frac{3}{2}$.

Bình luận: *Ta không thể dùng trực tiếp bất đẳng thức Cô si* **(AM-GM)** *với mẫu số vì bất đẳng thức sau đó sẽ đổi chiều*

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2} \le \frac{a}{2b}+\frac{b}{2c}+\frac{c}{2a} \ge \frac{3}{2}$$

Tuy nhiên, rất may mắn ta lại có thể dung bất đẳng thức đó theo cách khác:

$$\frac{a}{1+b^2}=\frac{a\left(1+b^2-b^2\right)}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

Ta đâ sử dụng bất đẳng thức AM-GM: $1+b^2\ge 2b$ *ở dưới mẫu nhưng lại có được một bất đẳng thức thuận chiều.*

Sự may mắn ở đây là một cách dùng ***ngược dấu*** *bất đẳng thức Cô si, một kĩ thuật khá ấn tượng và bất ngờ.*

Giải: Ta có: $\frac{a}{1+b^2}=\frac{a\left(1+b^2-b^2\right)}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$

Tương tự: $\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2}$ và $\frac{c}{1+a^2}\ge c-\frac{ca}{2}$

Cộng vế theo vế cả bất đẳng thức ta được: $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}=3-\frac{ab+bc+ca}{2}\ge\frac{3}{2}$

Vì $\left(a+b+c\right)^2\ge 3\left(ab+bc+ca\right)\Leftrightarrow ab+bc+ca\le 3$.

Đẳng thức xảy ra khi ac= b = c = 1.

Bài tập tương tự: 1). Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c thoả mãn: $a+b+c=3$.

Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\ge\frac{3}{2}$.

2). Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c thoả mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức:

$\frac{1+a}{1+b^2}+\frac{1+b}{1+c^2}+\frac{1+c}{1+a^2}\ge 3$.

3). Chứng minh rằng với a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn: $a+b+c+d=4$ ta có :

$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+d^2}\ge 2$

4). Chứng minh rằng với a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn: $a+b+c+d=4$ ta có :

$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+d^2}+\frac{d}{1+a^2}\ge 2$

5). Chứng minh rằng với a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn: $a+b+c+d=4$ ta có :

$\frac{1+a}{1+b^2}+\frac{1+b}{1+c^2}+\frac{1+c}{1+d^2}+\frac{1+d}{1+a^2}\ge 4$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng với a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn: $a+b+c+d=4$ ta có bất đẳng thức:

$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2a}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\ge 2$

Giải: Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\frac{a}{1+b^2c}=\frac{a\left(1+b^2c-b^2c\right)}{1+b^2c}=a-\frac{b^2c}{1+b^2c}\ge a-\frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}}=a-\frac{ab\sqrt{c}}{2}\ge a-\frac{b\sqrt{a.ac}}{2}\ge a-\frac{b\left(a+ac\right)}{4}$$

Tương tự: $\frac{b}{1+c^2d}\ge b-\frac{bc+bcd}{2}$; $\frac{c}{1+d^2a}\ge c-\frac{cd+cda}{2}$ và $\frac{d}{1+a^2b}=d-\frac{da+dab}{4}$

Cộng 4 bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2a}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\ge a+b+c+d-\frac{1}{4}\left(ab+bc+cd+da+abc+bcd+cda+dab\right)$$

Ta lại có: $ab+bc+cd+da\le\frac{1}{4}\left(a+b+c+d\right)^2=4$

$$\left(abc+bcd+cda+dab\right)\le\frac{1}{16}\left(a+b+c\right)^3=4.$$

Do đó: $\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2a}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\ge a+b+c+d-2=2$.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = d = 1.

PHAMQUYNHANHBABY0512@YAHOO.COM - THPT CHUYÊN BUNGHICH - THANH CHƯƠNG – NGHỆ AN

Ví dụ 6: Chứng minh rằng với a, b, c, d là các số thực dương ta luôn có:
$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+d^2}+\frac{d^3}{d^2+a^2}\ge\frac{a+b+c+d}{2}$

HDG: Ta có: $\frac{a^3}{a^2+b^2}=\frac{a^3+ab^2-ab^2}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2ab}=a-\frac{b}{2}$

Xây dựng ba bất đẳng thức tương tự. Đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau.

Bài tập tương tự: Chứng minh rằng với a, b, c, d là các số thực dương ta luôn có:
$\frac{a^4}{a^3+2b^3}+\frac{b^4}{b^3+2c^3}+\frac{c^4}{c^3+2d^3}+\frac{d^4}{d^3+2a^3}\ge\frac{a+b+c+d}{3}$.

Ví dụ 7. Cho $a,b,c\ge 0$ thoả mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\ge 1$.

Giải: Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $\frac{a^2}{a+2b^2}=\frac{a\left(a+2b^2\right)-2ab^2}{a+2b^2}\ge a-\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}}=a-\frac{2(ab)^{\frac{2}{3}}}{3}$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có 2 bất đẳng thức: $\frac{b^2}{b+2c^2}\ge b-\frac{2(bc)^{\frac{2}{3}}}{3}$, $\frac{c^2}{c+2a^2}\ge c-\frac{2(ca)^{\frac{2}{3}}}{3}$

Do đó ta chỉ cần chứng minh: $a+b+c-\frac{2}{3}\left[(ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\right]\ge 1\Leftrightarrow (ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\le 3$.

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cô si ta có:
$a+ab+b\ge 3(ab)^{\frac{2}{3}}$, $b+bc+c\ge 3(bc)^{\frac{2}{3}}$, $c+ca+a\ge 3(ca)^{\frac{2}{3}}$

Cộng vế theo vế ta có: $2(a+b+c)+ab+bc+ca\ge 3\left[(ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\right]$

Vì $a+b+c=3$ và $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2=9\Leftrightarrow ab+bc+ca\le 3$.

Từ đó suy ra: $3\left[(ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\right]\le 2.3+3=9\Leftrightarrow (ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\le 3$

nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c =1.

Ví dụ 8. Cho $a,b,c\ge 0$ thoả mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức:
$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}\ge 1$.

Giải: ***Chứng minh tương tự***

Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $\frac{a^2}{a+2b^3}=\frac{a\left(a+2b^3\right)-2ab^3}{a+2b^3}\ge a-\frac{2ab^3}{3\sqrt[3]{ab^6}}=a-\frac{2b\sqrt[3]{a^2}}{3}$.

Do đó ta chỉ cần chứng minh: $b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le 3$.

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cô si ta có: $b\sqrt[3]{a^2}\le\frac{1}{3}b.(a+a+1)=\frac{2a+b}{3}$

Cộng vế theo vế ta có: $b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le\frac{2ab+b}{3}+\frac{2bc+c}{3}+\frac{2ca+a}{3}\le\frac{2}{3}(ab+bc+ca)+\frac{1}{3}(a+b+c)$

Từ đó suy ra: $b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le\frac{2}{3}.3+\frac{1}{3}.3=3$ nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c =1.

Ví dụ 9. Cho x, y, x > 0 thoả mãn $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $T=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}$

Giải: Ta có: $\frac{x^2}{x+y}=\frac{x\left(x+y\right)-xy}{x+y}=x-\frac{xy}{x+y}\geq x-\frac{\sqrt{xy}}{2}$

Chứng minh tương tự: $\frac{y^2}{y+z}\geq y-\frac{\sqrt{yz}}{2}$; $\frac{z^2}{z+x}\geq z-\frac{\sqrt{zx}}{2}$

Suy ra: $T\geq x+y+z-\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{2}=x+y+z-\frac{1}{2}\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (vì $x+y+z\geq\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z = $\frac{1}{3}$.

Vậy Min T = $\frac{1}{2}$ khi x = y = z = $\frac{1}{3}$.

5. Phương pháp thêm hạng tử và chọn điểm rơi Côsi

Đây là phương pháp rất lôi cuốn học sinh, bằng cách thêm các số hạng phù hợp và sử dụng khéo léo bất đẳng thức Côsi ta có thể đạt những kết quả không ngờ!

" Kiểm tra điều kiện xảy ra dấu bằng, chọn điểm rơi và cân bằng hệ số"

5.1).Dấu bằng xảy ra tại điểm mút.

Ví dụ 1. 1).Cho $a\geq 3$**. Chứng minh rằng:** $a+\frac{1}{a}\geq\frac{10}{3}$

Phân tích tìm lời giải:

Dấu "=" xảy ra khi a = 3

Chọn số α sao cho khi áp dụng BĐT Cô si cho αa và $\frac{1}{a}$ thì dấu "=" xảy ra khi a = 3

Nghĩa là: $\alpha.3=\frac{1}{3}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{9}$.Từ đó ta có lời giải:

Giải: Ta có: $a+\frac{1}{a}=\frac{8}{9}a+\left(\frac{1}{9}a+\frac{1}{a}\right)\geq\frac{8}{9}.3+2\sqrt{\frac{1}{9}a.\frac{1}{a}}=\frac{10}{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi a = 3

2).Cho $a\geq 2$**. Chứng minh rằng:** $a+\frac{1}{a^2}\geq\frac{9}{4}$

Phân tích tìm lời giải:

Dấu "=" xảy ra khi a = 2

Chọn số α sao cho khi áp dụng BĐT Cô si cho αa, αa và $\frac{1}{a^2}$ thì dấu "=" xảy ra khi a = 2

Nghĩa là: $\alpha.2=\frac{1}{2^2}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{8}$.

Từ đó ta có lời giải:

Giải:

Ta có: $a+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{4}a+\left(\frac{1}{8}a+\frac{1}{8}a+\frac{1}{a^2}\right)\geq\frac{3}{4}.2+3\sqrt[3]{\frac{1}{8}a.\frac{1}{8}a.\frac{1}{a^2}}=\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi a = 2

3).Cho $a \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a^2 + \frac{18}{\sqrt{a}}$

Phân tích tìm lời giải:
Dự đoán giá trị nhỏ nhất đạt được khi a = 6

Cần chọn số α sao cho khi áp dụng BĐT Cô si cho αa^2 và $\frac{18}{\sqrt{a}}$ thì dấu "=" xảy ra khi a = 6

Nghĩa là: $\alpha.36 = \frac{18}{\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2\sqrt{6}}$.Từ đó ta có lời giải:

Giải: Ta có:

$$a^2 + \frac{18}{\sqrt{a}} = \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)a^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}a^2 + \frac{18}{\sqrt{a}}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)a^2 + 2\sqrt{\frac{9a\sqrt{a}}{\sqrt{6}}} \geq \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{6}}\right).36 + 6\sqrt{6} = 36 + 3\sqrt{6}.$$

Dấu "=" xảy ra khi a = 6. **Vậy** $MinS = 36 + 3\sqrt{6}$ tại a = 6.

4).Cho $0 < a \leq \frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + \frac{1}{a^2}$.

Phân tích tìm lời giải:

Dự đoán giá trị nhỏ nhất đạt được khi a = $\frac{1}{2}$

Cần chọn số α sao cho khi áp dụng BĐT Cô si cho a, a và $\frac{\alpha}{a^2}$ thì dấu "=" xảy ra khi a = $\frac{1}{2}$

Nghĩa là: $\frac{1}{2} = \frac{\alpha}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{8}$.Từ đó ta có lời giải:

Giải: Ta có: $S = 2a + \frac{1}{a^2} = a + a + \frac{1}{8a^2} + \frac{7}{8a^2} \geq 3\sqrt[3]{a.a.\frac{1}{8a^2}} + \frac{7}{8.\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$.

Dấu "=" xảy ra khi a = $\frac{1}{2}$.

Vậy: Min S = 5 khi a = $\frac{1}{2}$.

**** Hãy so sánh ví dụ 2 và 4 để xem có điều gì thú vị ở đây?***

5.2). Các biến đều bình đẳng , dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau

Ví dụ 2. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

a). $\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geq 6$

Phân tích tìm lời giải:

Dấu "=" xảy ra khi a = b = $\frac{1}{2}$ và nhận xét rằng:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ và } 2ab\left(a^2 + b^2\right) \leq \frac{\left(2ab + a^2 + b^2\right)^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4}$$

Chọn số α sao cho khi áp dụng BĐT Cô si cho $\frac{\alpha}{ab}$ và $\frac{1}{a^2+b^2}$ thì dấu "=" xảy ra khi a = b= $\frac{1}{2}$

Nghĩa là: $\frac{\alpha}{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$.Từ đó ta có lời giải:

Giải: Ta có:

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2} \geq \frac{1}{2ab}+\left(\frac{1}{2ab}+\frac{1}{a^2+b^2}\right) \geq \frac{1}{2ab}+2\sqrt{\frac{1}{2ab\left(a^2+b^2\right)}} \geq \frac{2}{(a+b)^2}+2\sqrt{\frac{4}{(a+b)^2}} = 2+2.2=6.$$

Dấu "=" xảy ra khi a = $\frac{1}{2}$.

b). $\frac{2}{ab}+\frac{3}{a^2+b^2} \geq 14$

Hãy giải tương tự câu a.

Ví dụ 3. (ĐỀ THI HSG Tỉnh Nghệ An -Bảng B-98-99)

Cho $\begin{cases} x,y>0 \\ x+y\leq 1 \end{cases}$**. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức**

$$A = \frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2}{xy}+4xy$$

Phân tích tìm lời giải:

Dấu "=" xảy ra khi x = y = $\frac{1}{2}$

Chọn số α sao cho khi áp dụng BĐT Cô si cho $\frac{\alpha}{xy}$ và $4xy$ thì dấu "=" xảy ra khi x = y = $\frac{1}{2}$

Nghĩa là: $\frac{\alpha}{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = 4.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$.Từ đó ta có lời giải:

Giải: Ta có: $A = \frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2}{xy}+4xy = \left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\right)+\frac{5}{4xy}+\left(\frac{1}{4xy}+4xy\right)$.

$$A \geq \frac{4}{(x+y)^2}+\frac{5}{(x+y)^2}+4\sqrt{\frac{1}{4xy}.4xy} = 4+5+4=11$$

Dấu "=" xảy ra khi x **= y =** $\frac{1}{2}$.

Vậy Min A = 11 khi khi x **= y =** $\frac{1}{2}$.

Ví dụ 4.Tìm giá trị nhỏ nhất của P = $\frac{a^3}{1+b}+\frac{b^3}{1+a}$ với a, b là các số dương thoả mãn điều kiện ab = 1.

Hướng dẫn: Dấu bằng xảy ra khi a = b = 1, vậy ta phải thêm cho $\frac{a^3}{1+b}$ số hạng $\frac{1+b}{\alpha}$.

Để tính α ta thấy cho a = b =1 thì α =4. Nhưng như thế ta thấy chỉ xuất hiện $3\sqrt{a^3}$ vì vậy ta thêm $\frac{1}{2}$ để được chứng minh sau:

$$\frac{a^3}{1+b}+\frac{1+b}{4}+\frac{1}{2}\geq\frac{3}{2}a;\frac{b^3}{1+c}+\frac{1+c}{4}+\frac{1}{2}\geq\frac{3}{2}b\Rightarrow\frac{a^3}{1+b}+\frac{b^3}{1+c}+\frac{3}{2}\geq\frac{5}{4}(a+b)\geq\frac{5}{2}.$$ MinP = 1

Ví dụ 5. Chứng minh $\forall a,b,c>0$ thì $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c$

Phân tích*: trước hết ta nhận thấy nếu áp dụng ngay bất đẳng thức Cô si thì cũng không ra được kết quả, kĩ thuật vòng cũng không giải quyết được.*

Bây giờ ta đánh giá dấu bằng xảy ra khi nào, dễ nhận thấy đó là khi a = b = c khi đó $\frac{a^2}{b}=a$ *vì vậy ta thêm b vào phần tử đại diện* $\frac{a^2}{b}$ *để có chứng minh sau:*

Chứng minh:

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho các số dương $\frac{a^2}{b},b,\frac{b^2}{c},c,\frac{c^2}{a},a$ thì ta có:

$$\frac{a^2}{b}+b\geq 2a;\frac{b^2}{c}+c\geq 2b;\frac{c^2}{a}+a\geq 2c$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{b}+b+\frac{b^2}{c}+c+\frac{c^2}{a}+a\geq 2a+2b+2c\Rightarrow\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c$$

Ví dụ 6. Chứng minh rằng $\forall a,b,c>0$ thì $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{b+a}\geq\frac{a+b+c}{2}$

Phân tích*: Ta cần thêm cho* $\frac{a^2}{b+c}$ *một số m thoả mãn:*

1. Rút gọn được mẫu số (b+c) sau khi áp dụng bđt Côsi ($\frac{a^2}{b+c}+m\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c}m}$ *)*

2. Dấu bằng của bất đẳng thức Côsi ***xảy ra được*** nghĩa là $\frac{a^2}{b+c}=m$ *và a= b = c*

suy ra $m=\frac{b+c}{\alpha}$ *.Và để tính* α *thì* $\frac{a^2}{b+c}=m=\frac{b+c}{\alpha}$*. Dễ thấy khi thay a=b=c thì* α *=4.*

Chứng minh: áp dụng bất đẳng thức Cô si cho các số dương $\frac{a^2}{b+c},\frac{b+c}{4},\frac{b^2}{c+a},\frac{c+a}{4},\frac{c^2}{a+b},\frac{a+b}{4}$ thì ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b+c}{4}\ge a\\ \dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c+a}{4}\ge b\\ \dfrac{c^2}{a+b}+\dfrac{a+b}{4}\ge c\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c+a}{4}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\ge a+b+c\Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c.

Tuy nhiên thêm hạng tử nào cho hợp lí thì tùy từng bài và ví dụ cụ thể

Ví dụ 7: Chứng minh rằng với x,y,z > 0: $\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}\ge x^2+y^2+z^2$

Phân tích: Ta thấy rằng với hạng tử x^3/y có thể có hai hướng sau:

Cách 1: Học sinh sẽ thêm $\frac{x^3}{y}+xy\ge 2x^2;\frac{y^3}{z}+yz\ge 2y^2;\frac{z^3}{x}+zx\ge 2z^2$ sau đó chứng minh

$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$, cộng các bất đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

Cách 2: $\frac{x^3}{y}+\frac{x^3}{y}+y^2\ge 3x^2;\frac{y^3}{z}+\frac{y^3}{z}+z^2\ge 3y^2;\frac{z^3}{x}+\frac{z^3}{x}+x^2\ge 3z^2$ cộng lại ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng với a, b, c>0 ta có $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge 3,\frac{a^2}{b^2}+1\ge 2\frac{a}{b},\frac{b^2}{c^2}+1\ge 2\frac{b}{c},\frac{c^2}{a^2}+1\ge 2\frac{c}{a}$$

Ví dụ 9. Nếu a, b, c dương và abc=1 thì

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\ge\frac{3}{4}$$

Phân tích: *ta sẽ thêm cho* $\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}$ *những hạng tử gì? chắc chắn là có* $\frac{b+1}{\alpha};\frac{c+1}{\alpha}$ *với* α

là một số dương nào đó. Vấn đề bằng bao nhiêu, ta chỉ cần chú ý là dấu bằng xảy ra khi a=b=c=1;

khi đó $\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}=\frac{b+1}{\alpha}=\frac{c+1}{\alpha}$ *sẽ cho ta* $\alpha=4$ *=4. Vì vậy ta có chứng minh sau:*

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+b}{8}+\frac{1+c}{8}\ge\frac{3a}{4};\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{1+c}{8}+\frac{1+a}{8}\ge\frac{3b}{4};\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{1+a}{8}+\frac{1+b}{8}\ge\frac{3c}{4}$$

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{3}{4}\ge\frac{1}{2}(a+b+c)\ge\frac{3}{2}$$ Điều phải chứng minh.

Ví dụ 10. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$**. Chứng minh rằng:**

a). $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\ge 30$

Phân tích tìm lời giải:

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = $\frac{1}{3}$ và nhận xét rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$$

Cần chọn số α sao cho khi áp dụng BĐT Cô si cho $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$; $\dfrac{\alpha}{ab+bc+ca}$ *và* $\dfrac{\alpha}{ab+bc+ca}$

thì dấu "=" xảy ra khi a = b = c = $\frac{1}{3}$.

Nghĩa là: $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{\alpha}{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.\frac{1}{3}}\Leftrightarrow\alpha=1$

Giải: Ta có:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}=\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)+\frac{7}{ab+bc+ca}$$

$$\ge\frac{9}{(a+b+c)^2}+\frac{21}{(a+b+c)^2}=9+21=30$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = $\frac{1}{3}$.

b). $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{2}{ab}+\dfrac{2}{bc}+\dfrac{2}{ca}\ge 81$**.**

Phân tích tìm lời giải:

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = $\frac{1}{3}$

Cần chọn số α sao cho khi áp dụng BĐT Cô si cho $\dfrac{1}{a^2};\dfrac{1}{b^2};\dfrac{1}{c^2};\dfrac{\alpha}{ab};\dfrac{\alpha}{bc}$ *và* $\dfrac{\alpha}{ca}$

thì dấu "=" xảy ra khi a = b = c = $\frac{1}{3}$.

Giải: Ta có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{81}{(a+b+c)^2}=81$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = $\frac{1}{3}$. *(Áp dụng BĐT $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...\frac{1}{a_n}\ge\frac{n^2}{a_1+a_2+...+a_n}$)*

Ví dụ 11. Cho $\begin{cases} x, y, z \ge 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất của: $P = x + y + z$ **. ĐS:** $MaxP = 3\sqrt{6} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{6}$

Ví dụ 12. Cho $x^4 + y^4 + z^4 = 48$**. Tìm giá trị lớn nhất của:**

a). $S_1 = xy + yz + zx$

b). $S_2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ **ĐS: 48**

c). $S_3 = \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{yz} + \sqrt[3]{zx}$ **ĐS:** $3\sqrt[3]{4}$ **Phân tich tìm lời giải:**

Do vai trò bình đẳng của x, y, z nên có thể dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi $x^4 = y^4 = z^4 = 16 \Leftrightarrow |x| = |y| = |z| = 2$

Để xuất hiện biểu thức $S_1 = xy + yz + zx$ ta cần áp dụng BĐT Cô si cho 4 số: x^4, y^4, α, α như sau: $x^4 + y^4 + \alpha + \alpha \ge 4\sqrt[4]{\alpha^2 x^4 y^4} = 4\sqrt{\alpha}\,|xy|$ và dấu "=" xảy ra khi $\alpha = x^4 = y^4 = 16$

Từ đó ta có lời giải:

Giải: Áp dụng BĐT Cô si: $x^4 + y^4 + 16 + 16 \ge 4\sqrt[4]{x^4.y^4.16.16} = 16|xy| \ge 16xy$

Tương tự: $z^4 + x^4 + 16 + 16 \ge 4\sqrt[4]{z^4.x^4.16.16} = 16|zx| \ge 16zx$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$16S_1 \le 2\left(x^4 + y^4 + z^4\right) + 96 = 192 \Rightarrow S_1 \le 12$

Dấu "=" xảy ra khi $\Leftrightarrow |x| = |y| = |z| = 2$.

Vậy Max $S_1 = 12$ khi x = y = z = 2 hoặc x = y = z = -2.

Tổng quát 1: ***Cho*** $x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = M$ ***(n là số tự nhiên khác 0; M là số không âm cho trước).***

Tìm giá trị lớn nhất của:

a). $S_1 = xy + yz + zx$

b). $S_2 = x^n y^n + y^n z^n + z^n x^n$

c). $S_3 = \sqrt[2m+1]{xy} + \sqrt[2m+1]{yz} + \sqrt[2m+1]{zx}$ ***(*** $m \in \mathbb{N}^*$ ***).***

Ví dụ 7. Cho $\begin{cases} x, y, z \ge 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 24 \end{cases}$**. Tìm giá trị lớn nhất của:**

a). $P_1 = xy + yz + zx$ **ĐS: 12**

b). $P_2 = \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$ **ĐS: 6**

c). $P_3 = \sqrt[5]{xy} + \sqrt[5]{yz} + \sqrt[5]{zx}$ **ĐS:** $3\sqrt[5]{4}$

Tổng quát 2: ***Cho*** $\begin{cases} x, y, z \ge 0 \\ x^n + y^n + z^n = M \end{cases}$ ***(n là số tự nhiên khác 0; M là số không âm cho trước).***

Tìm giá trị lớn nhất của:

a). $P_1 = xy + yz + zx$

b). $P_2 = \sqrt[m]{xy} + \sqrt[m]{yz} + \sqrt[m]{zx}$ ***(*** $m \in \mathbb{N},\ m \ge 2$ ***).***

Giải:a). Do vai trò bình đẳng của x, y, z nên có thể dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi $x^n = y^n = z^n = \dfrac{M}{3}$

Để xuất hiện biểu thức $P_1 = xy + yz + zx$ ta cần áp dụng BĐT Cô si cho n số: x^n, y^n và $n-2$ số $\frac{M}{3}$

Ta có: $x^n + y^n + \underbrace{\frac{M}{3} + \frac{M}{3} + ... + \frac{M}{3}}_{(n-2)\text{ số}} \ge n\sqrt[n]{x^n.y^n.\left(\frac{M}{3}\right)^{n-2}} = n\sqrt[n]{\left(\frac{M}{3}\right)^{n-2}}xy$

Suy ra: $x^n + y^n + (n-2)\frac{M}{3} \ge n\sqrt[n]{\left(\frac{M}{3}\right)^{n-2}}xy$

Tương tự: $y^n + z^n + (n-2)\frac{M}{3} \ge n\sqrt[n]{\left(\frac{M}{3}\right)^{n-2}}yz$

$z^n + x^n + (n-2)\frac{M}{3} \ge n\sqrt[n]{\left(\frac{M}{3}\right)^{n-2}}zx$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$n\sqrt[n]{\left(\frac{M}{3}\right)^{n-2}}.P_1 \le 2\left(x^n + y^n + z^n\right) + (n-2)M = nM \Rightarrow P_1 \le \frac{M}{\sqrt[n]{\left(\frac{M}{3}\right)^{n-2}}} = 3\sqrt[n]{\frac{M^2}{9}}$

Vậy $MaxP_1 = 3.\sqrt[n]{\frac{M^2}{9}} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt[n]{\frac{M}{3}}$.

b). Tương tự câu a ta áp dụng bất đẳng thức Cô si như sau:

Ta có: $x^n + y^n + \underbrace{\frac{M}{3} + \frac{M}{3} + ... + \frac{M}{3}}_{(mn-2)\text{ số}} \ge mn\sqrt[mn]{x^n.y^n.\left(\frac{M}{3}\right)^{mn-2}}$

Suy ra: $x^n + y^n + (mn-2)\frac{M}{3} \ge mn\sqrt[mn]{\left(\frac{M}{3}\right)^{mn-2}}\sqrt[m]{xy}$

Tương tự: $y^n + z^n + (mn-2)\frac{M}{3} \ge mn\sqrt[mn]{\left(\frac{M}{3}\right)^{mn-2}}\sqrt[m]{yz}$

$z^n + x^n + (mn-2)\frac{M}{3} \ge mn\sqrt[mn]{\left(\frac{M}{3}\right)^{mn-2}}\sqrt[m]{zx}$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$mn\sqrt[mn]{\left(\frac{M}{3}\right)^{mn-2}}.P_2 \le 2\left(x^n + y^n + z^n\right) + (mn-2)M = mnM \Rightarrow P_1 \le \frac{M}{\sqrt[mn]{\left(\frac{M}{3}\right)^{mn-2}}} = 3\sqrt[mn]{\frac{M^2}{9}}$

Vậy $MaxP_2 = 3.\sqrt[mn]{\frac{M^2}{9}} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt[n]{\frac{M}{3}}$.

Chẳng hạn: Với n = 2009 và M = 3 ta có bài toán 1:

1). Cho $\begin{cases} x, y, z \ge 0 \\ x^{2009} + y^{2009} + z^{2009} = 3 \end{cases}$ ***(n là số tự nhiên khác 0; M là số không âm cho trước).***

Tìm giá trị lớn nhất của: $P_1 = xy + yz + zx$ **.ĐS:** $MaxP_1 = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Với m = 2, n = 2009 và M = 9 ta có bài toán 2:

2). Cho $\begin{cases} x, y, z \ge 0 \\ x^{2009} + y^{2009} + z^{2009} = 9 \end{cases}$ ***(n là số tự nhiên khác 0; M là số không âm cho trước).***

Tìm giá trị lớn nhất của: $P_2 = \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$ **.ĐS:** $MaxP_2 = 3\sqrt[2009]{3} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt[2009]{3}$

Ví dụ 8.a). Cho $\begin{cases} x, y, z \ge 0 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$ **. Tìm giá trị nhỏ nhất của** $S_1 = x^3 + y^3 + z^3$

b). Cho $x,\ y,\ z$ **là các số thực thoả mãn** $xy + yz + zx = 1$ **. Tìm GTNN của** $S_2 = x^2 + y^2 + z^2$

Tổng quát: a). Cho $x,\ y,\ z$ **là các số thực không âm thoả mãn** $xy + yz + zx = 1$ **.**

Tìm GTNN của $S_1 = x^n + y^n + z^n$ **; n là số tự nhiên lẻ ;** $n \ge 3$ **.**

b). Cho $x,\ y,\ z$ **là các số thực không âm thoả mãn** $xy + yz + zx = 1$ **.**

Tìm GTNN của $S_2 = x^n + y^n + z^n$ **; n là số tự nhiên chẵn ;** $n \ge 2$ **.**

Giải: a).Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x^n = y^n = z^n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$

Để xuất hiện biểu thức $xy + yz + zx$ ta cần áp dụng BĐT Cô si cho n số: x^n, y^n và $n-2$ số $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$

Ta có: $x^n + y^n + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n + ... + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n}_{(n-2)\text{ số}} \ge n\sqrt[n]{x^n.y^n.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n(n-2)}} = n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-2} xy$

Suy ra: $x^n + y^n + (n-2)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \ge n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-2} xy$

Tương tự: $y^n + z^n + (n-2)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \ge n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-2} yz$

$z^n + x^n + (n-2)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \ge n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-2} zx$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$2S_1 + 3(n-2)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \ge n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-2}(xy + yz + zx) = n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-2} = 3n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$

$\Rightarrow 2S_1 \ge 6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \Rightarrow S_1 \ge 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-2}$

Vậy $MinS_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5.3). Vai trò các biến không bình đẳng

Kĩ thuật thêm nghịch đảo

Đây là một kĩ thuật mà nếu không nhắc và sử dụng sẽ là một thiếu sót rất lớn trong việc sử dụng và chứng minh bất đẳng thức Côsi.

Bài toán 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của P = $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$ với x, y là các số dương thỏa mãn x+y=1.

Giải: Ta đã làm bài tập này bằng Côsi nhưng ta cũng cố thể làm như sau:

P = $\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)(x+y)=2+\frac{2y}{x}+\frac{3x}{y}+3\ge 5+2\sqrt{6}$ dấu bằng xảy ra khi x+y=1 và $3x^2 = 2y^2$

Khi $x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}};y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

Bài toán 2. Cho x,y,z thoả mãn $x^2+y^2+kz^2=M$. (k là hằng số dương; M là số không âm cho trước)
Tìm GTLN của $S=xy+yz+zx$.

Phân tích và tìm lời giải:

Do vai trò bình đẳng của x, y nên có thể dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi $x=y$ và các thao tác đối với x và y là "giống nhau". Ta tách $x^2=mx^2+(1-m)x^2$ và $y^2=my^2+(1-m)y^2$ $(0\le m\le 1)$ đồng thời "chia đều"

$kz^2=\frac{k}{2}z^2+\frac{k}{2}z^2$ cho cả x và y.

Áp dụng BĐT Cô si như sau: $\begin{cases}(1-m)x^2+(1-m)y^2\ge 2(1-m)xy\\ mx^2+\frac{k}{2}z^2\ge\sqrt{2mk}xz\\ my^2+\frac{k}{2}z^2\ge 2\sqrt{mk}yz\end{cases}$

Để xuất hiện biểu thức $S=xy+yz+zx$ ta cần chọn m sao cho

$2(1-m)=\sqrt{2mk}\Leftrightarrow 4(1-m)^2=2mk\Leftrightarrow 2m^2-(4+k)m+2=0\Rightarrow m=\frac{1}{4}\left[(4+k)-\sqrt{k^2+8k}\right]$ (vì $0\le m\le 1$).

Khi đó cộng vế theo vế suy ra: $2(1-m)S\le M\Rightarrow S\le\frac{M}{2(1-m)}$.

Vậy GTLN của $S=\frac{M}{2(1-m)}\Leftrightarrow\begin{cases}x,y,z \text{ cùng dấu}\\ x=y\\ mx^2=\frac{kz^2}{2}\\ x^2+y^2+kz^2=M\end{cases}$

Áp dụng: Cho x,y,z thoả mãn $x^2+y^2+\frac{9}{2}z^2=5$. Tìm GTLN của $S=xy+yz+zx$.

Giải : Bước 1: Chọn $m=\frac{1}{4}\left[\left(4+\frac{9}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+8.\frac{9}{2}}\right]=\frac{1}{4}$

Bước 2: Áp dụng BĐT Cô si ta có: $\begin{cases} \frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}y^2 \ge \frac{3}{2}|xy| \ge \frac{3}{2}xy \\ \frac{1}{4}x^2+\frac{9}{4}z^2 \ge \frac{3}{2}|xz| \ge \frac{3}{2}xz \\ \frac{1}{4}y^2+\frac{9}{4}z^2 \ge \frac{3}{2}|yz| \ge \frac{3}{2}yz \end{cases}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được: $\frac{3}{2}S \le x^2+y^2+\frac{9}{2}z^2=5 \Rightarrow S \le \frac{10}{3}$.

Vậy Max S = $\frac{10}{3}$ khi $\begin{cases} x=y=3z \\ x^2+y^2+\frac{9}{2}z^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=-\sqrt{2}; z=-\frac{\sqrt{2}}{3} \\ x=y=\sqrt{2}; z=\frac{\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

Bài tập tương tự:

1). Cho x,y,z thoả mãn $x^2+y^2+4z^2=4$.

Tìm GTLN của $S=xy+yz+zx$. ĐS: $\sqrt{3}+1$

2). Cho x,y,z thoả mãn $x^2+y^2+8z^2=1$.

Tìm GTLN của $Q=xy+yz+zx$

Bài toán 2. Cho x,y,z thoả mãn $n\left(x^2+y^2\right)+kz^2=M$. (k là hằng số dương; M là số không âm cho trước) Tìm GTLN của $S=xy+yz+zx$.

Phân tich và tìm lời giải:

Do vai trò bình đẳng của x, y nên có thể dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi $x=y$ và các thao tác đối với x và y là "giống nhau". Ta tách $x^2=mx^2+(n-m)x^2$ và $y^2=ny^2+(n-m)y^2$ $(0 \le m \le n)$ đồng thời "chia đều"

$kz^2=\frac{k}{2}z^2+\frac{k}{2}z^2$ cho cả x và y.

Áp dụng BĐT Cô si như sau: $\begin{cases} (n-m)x^2+(n-m)y^2 \ge 2(n-m)xy \\ mx^2+\frac{k}{2}z^2 \ge \sqrt{2mk}xz \\ my^2+\frac{k}{2}z^2 \ge 2\sqrt{mk}yz \end{cases}$

Để xuất hiện biểu thức $S=xy+yz+zx$ ta cần chọn m sao cho

$2(n-m)=\sqrt{2mk} \Leftrightarrow 4(n-m)^2=2mk \Leftrightarrow 2m^2-(4n+k)m+2n^2=0 \Rightarrow m=\frac{1}{4}\left[(4n+k)-\sqrt{k^2+8kn}\right]$ (vì $0 \le m \le n$).

Khi đó cộng vế theo vế suy ra: $2(n-m)S \le M \Rightarrow S \le \frac{M}{2(n-m)}$.

Vậy GTLN của $S=\dfrac{M}{2(n-m)} \Leftrightarrow \begin{cases} x,y,z \text{ cùng dấu} \\ x=y \\ mx^2=\dfrac{kz^2}{2} \\ n\left(x^2+y^2\right)+kz^2=M \end{cases}$

Áp dụng: Cho x,y,z thoả mãn $2\left(x^2+y^2\right)+9z^2=10$. Tìm GTLN của $S=xy+yz+zx$.

Bước 1: Chọn $m=\frac{1}{4}\left[(4.2+9)-\sqrt{9^2+8.9.2}\right]=\frac{1}{2}$

Bước 2: Áp dụng BĐT Cô si ta có: $\begin{cases} \frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2 \ge 3|xy| \ge 3xy \\ \frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}z^2 \ge 3|xz| \ge 3xz \\ \frac{1}{2}y^2+\frac{9}{2}z^2 \ge 3|yz| \ge 3yz \end{cases}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được: $3S \le 2\left(x^2+y^2\right)+9z^2=10 \Rightarrow S \le \frac{10}{3}$.

Vậy Max S = $\frac{10}{3}$ khi $\begin{cases} x=y=3z \\ 2\left(x^2+y^2\right)+9z^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=-\sqrt{2}; z=-\frac{\sqrt{2}}{3} \\ x=y=\sqrt{2}; z=\frac{\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$.

Bài tập tương tự:

1). Cho x,y,z thoả mãn $3\left(x^2+y^2\right)+8z^2=16$.

Tìm GTLN của $S=xy+yz+zx$. ĐS: Max S = 4

2). Cho x,y,z thoả mãn $4\left(x^2+y^2\right)+9z^2=25$.

Tìm GTLN của $S=xy+yz+zx$. ĐS: Max S =

3). Cho x,y,z thoả mãn $x^2+2\left(y^2+z^2\right)=1$.

Tìm GTLN của $S=xy+yz+zx$. ĐS: Max S =

4). Cho x,y,z thoả mãn $15\left(x^2+z^2\right)+y^2=35$.

Tìm GTLN của $S=xy+yz+zx$. ĐS: Max S = 7.

Bài toán 3. Cho x,y,z thoả mãn $x^2+y^2+z^2=M$. (k là hằng số dương; M là số không âm cho trước)

Tìm GTLN của $S=xy+yz+kzx$.

Phân tich và tìm lời giải:

a).Do vai trò bình đẳng của x, z nên có thể dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi x và z và các thao tác đối với x và z là "giống nhau". Để xuất hiện biểu thức: $S=xy+yz+kxz$ thì khi ta áp dụng BĐT Cô si

$(1-m)x^2+\frac{1}{2}y^2 \ge 2\sqrt{\frac{1-m}{2}}|xy| \ge 2\sqrt{\frac{1-m}{2}}xy$; $(1-m)z^2+\frac{1}{2}y^2 \ge 2\sqrt{\frac{1-m}{2}}|yz| \ge 2\sqrt{\frac{1-m}{2}}yz$ và

$mx^2+mz^2 \ge 2m|xz| \ge 2mxz$.

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có: $x^2+y^2+z^2\ge 2\left(\sqrt{\frac{1-m}{2}}xy+\sqrt{\frac{1-m}{2}}yz+mxz\right)$

Ta cần chọn m ($0\le m\le 1$) sao cho:

$$m=k\sqrt{\frac{1-m}{2}}\Leftrightarrow m^2=k^2\left(\frac{1-m}{2}\right)\Leftrightarrow 2m^2+k^2m-k^2=0\Rightarrow m=\frac{-k^2+\sqrt{k^4+8k^2}}{4}$$

Khi đó suy ra: $x^2+y^2+z^2\ge 2\left(\sqrt{\frac{1-m}{2}}xy+\sqrt{\frac{1-m}{2}}yz+k\sqrt{\frac{1-m}{2}}xz\right)=\sqrt{2(1-m)}\left[xy+yz+kxz\right]$

Do đó: $S=xy+yz+kzx\le\frac{M}{\sqrt{2(1-m)}}$

Vậy: $MaxS=\frac{M}{\sqrt{2(1-m)}}\Leftrightarrow\begin{cases}x=z=\pm\sqrt{\frac{M}{4-2m}}\\ y=\sqrt{2(1-m)}x\end{cases}$

Áp dụng: (ĐỀ THI HSG Tỉnh Nghệ An Lớp 11-Bảng A-2002-2003)
Cho x,y,z **thoả mãn** $x^2+y^2+z^2=1$**. Tìm GTLN của** $A=xy+yz+2zx$**.**
Giải. Ta áp dụng cho trường hợp: $M=1$ và $k=2$

Bước 1: Tìm $m=\frac{-4+\sqrt{16+8.4}}{4}=-1+\sqrt{3}$

Bước 2: Áp dụng BĐT Cô si ta có: $\begin{cases}\left(2-\sqrt{3}\right)x^2+\frac{y^2}{2}\ge 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}|xy|\ge\left(\sqrt{3}-1\right)xy\\ \left(2-\sqrt{3}\right)z^2+\frac{y^2}{2}\ge 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}|zy|\ge\left(\sqrt{3}-1\right)yz\\ \left(\sqrt{3}-1\right)x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)z^2\ge 2\left(\sqrt{3}-1\right)|zx|\ge 2\left(\sqrt{3}-1\right)zx\end{cases}$

Cộng vế theovế các BĐT trên ta được:

$\left(\sqrt{3}-1\right)(x+y+2z)\le x^2+y^2+z^2\Rightarrow S\le\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Vậy: $MaxS=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x=z=\pm\frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}\\ y=\pm\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}\end{cases}$

Chắc các bạn phải thấy rằng nếu không có định hướng cách giải rõ ràng thì bài toán trở nên khó với kết quả khá phức tạp và đầy bất ngờ chứ nhỉ?

Bài toán 4. Cho $\begin{cases}x,y,z\ge 0\\ x^n+y^n+z^n=M\end{cases}$**.**

Tìm giá trị lớn nhất của:a). $P = x + y + az$

b). $Q = a\left(x + y\right) + z$

(Với n là số tự nhiên; $n \ge 2$ **, M là số không âm cho trước; a là hằng số dương).**

Phân tich và tìm lời giải:

a).Do vai trò bình đẳng của x, y nên có thể dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi $x = y$ và các thao tác đối với x và y là "giống nhau". Để xuất hiện biểu thức: $P = x + y + az$ thì khi áp dụng BĐT Cô si

$x^n + \left(n-1\right)\alpha = x^n + \underbrace{\alpha + \alpha + ... + \alpha}_{n-1\ số} \ge n\sqrt[n]{\left(n-1\right)\alpha}.x$; $y^n + \left(n-1\right)\alpha \ge n\sqrt[n]{\left(n-1\right)\alpha}.y$ **và**

$z^n + \left(n-1\right)\beta \ge n\sqrt[n]{\left(n-1\right)\beta}.z$

Ta cần chọn các số α, β sao cho : $\begin{cases} a\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{\beta} \\ 2\alpha + \beta = M \end{cases}$.

Ta có:

$$x^n + y^n + z^n + \left(n-1\right)\left(2\alpha + \beta\right) \ge n\sqrt[n]{n-1}\left(\sqrt[n]{\alpha}x + \sqrt[n]{\alpha}y + \sqrt[n]{\beta}z\right)$$

$$\Leftrightarrow M + \left(n-1\right)M \ge n\sqrt[n]{\left(n-1\right)\alpha}\left[x + y + az\right] \Leftrightarrow P = x + y + az \le \frac{M}{\sqrt[n]{\left(n-1\right)\alpha}}$$

Suy ra: $MaxP = \dfrac{M}{\sqrt[n]{\left(n-1\right)\alpha}}$.

b).Tương tự để xuất hiện biểu thức $Q = a\left(x + y\right) + z$ ta chọn các số α, β sao cho : $\begin{cases} \sqrt[n]{\alpha} = a\sqrt[n]{\beta} \\ 2\alpha + \beta = M \end{cases}$.

Áp dụng: Cho $\begin{cases} x, y, z \ge 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất của:a). $P = x + y + 2z$

b). $Q = 2x + 2y + z$

Giải. a). Ta áp dụng cho trường hợp: $n = 2,\ M = 18\ và\ a = 2$

Bước 1: Tìm α, β sao cho : $\begin{cases} 2\sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta} \\ 2\alpha + \beta = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha = \beta \\ 2\alpha + \beta = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 12 \end{cases}$.

Bước 2: Áp dụng BĐT Cô si ta có: $\begin{cases} x^2 + 3 \ge 2\sqrt{3}x \\ y^2 + 3 \ge 2\sqrt{3}y \\ z^2 + 12 \ge 2\sqrt{12}z = 4\sqrt{3}z \end{cases}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta có:

$x^2 + y^2 + z^2 + 18 \ge 2\sqrt{3}\left(x + y + 2z\right) \Leftrightarrow 36 \ge 2\sqrt{3}\left(x + y + 2z\right)$

Suy ra: $P = x + y + 2z \le 6\sqrt{3}$.

Vậy: $MaxP = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{3}\ ; z = 2\sqrt{3}$.

b). Ta áp dụng cho trường hợp: $n = 2,\ M = 18$ và $a = 2$

Bước 1: Tìm α, β sao cho : $\begin{cases} \sqrt{\alpha} = 2\sqrt{\beta} \\ 2\alpha + \beta = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4\beta \\ 2\alpha + \beta = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 8 \\ \beta = 2 \end{cases}$.

Bước 2: Áp dụng BĐT Cô si ta có: $\begin{cases} x^2 + 8 \ge 2\sqrt{8}x = 4\sqrt{2}x \\ y^2 + 8 \ge 2\sqrt{8}y = 4\sqrt{2}y \\ z^2 + 2 \ge 2\sqrt{2}z \end{cases}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta có:

$x^2 + y^2 + z^2 + 18 \ge 2\sqrt{2}\left(2x + 2y + z\right) \Leftrightarrow 36 \ge 2\sqrt{2}\left(2x + 2y + z\right)$

Suy ra: $Q = 2x + 2y + z \le 9\sqrt{2}$ **.**

Vậy: $MaxP = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = 2\sqrt{2}\ ; z = \sqrt{2}$.

Bài toán 5. Cho x, y, z thoả mãn $xy + yz + zx = M$ (M là số không âm cho trước)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = n\left(x^2 + y^2\right) + kz^2$ (k là số dương)

Phân tich và tìm lời giải:

Do vai trò bình đẳng của x, y nên có thể dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi $x = y$ và các thao tác đối với x và y là "giống nhau".". Ta tách $x^2 = mx^2 + \left(n - m\right)x^2$ và $y^2 = ny^2 + \left(n - m\right)y^2$ $\left(0 \le m \le n\right)$ đồng thời "chia đều" $kz^2 = \frac{k}{2}z^2 + \frac{k}{2}z^2$ cho cả x và y.

Áp dụng BĐT Cô si ta có: $\begin{cases} \left(n - m\right)x^2 + \left(n - m\right)y^2 \ge 2\left(n - m\right)xy \\ mx^2 + \frac{k}{2}z^2 \ge \sqrt{2mk}xz \\ my^2 + \frac{k}{2}z^2 \ge 2\sqrt{mk}yz \end{cases}$

Để xuất hiện biểu thức $xy + yz + zx$ ta cần chọn m sao cho

$2\left(n - m\right) = \sqrt{2mk} \Leftrightarrow 4\left(n - m\right)^2 = 2mk \Leftrightarrow 2m^2 - \left(4n + k\right)m + 2n^2 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{4}\left[\left(4n + k\right) - \sqrt{k^2 + 8kn}\right]$ (vì $0 \le m \le n$).

Khi đó cộng vế theo ba BĐT trên ta được: $S \ge 2\left(n - m\right)M$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x, y, z \text{ cùng dấu} \\ x = y \\ mx^2 = \frac{k}{2}z^2 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$

Áp dụng: 1). Cho x, y, z thoả mãn $xy + yz + zx = 15$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x^2 + y^2 + \frac{1}{3}z^2$

.

Ta áp dụng cho trường hợp: $n = 1,\ M = 15$ và $k = \frac{1}{3}$

Bước 1: Tìm $m=\frac{1}{4}\left[\left(4.1+\frac{1}{3}\right)-\sqrt{\frac{1}{9}+8.\frac{1}{3}.1}\right]=\frac{2}{3}$

Bước 2: Áp dụng BĐT Cô si ta có: $\begin{cases}\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2\ge\frac{2}{3}|xy|\ge\frac{2}{3}xy\\ \frac{2}{3}x^2+\frac{1}{6}z^2\ge\frac{2}{3}|xz|\ge\frac{2}{3}xz\\ \frac{2}{3}y^2+\frac{1}{6}z^2\ge\frac{2}{3}|yz|\ge\frac{2}{3}yz\end{cases}$

Cộng vế theo các BĐT trên ta được: $S\ge\frac{2}{3}\left(xy+yz+zx\right)=\frac{2}{3}.15=10$.

Vậy $MinS=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=\sqrt{3};z=2\sqrt{3}\\ x=y=-\sqrt{3};z=-2\sqrt{3}\end{array}\right.$.

2). Cho x,y,z **thoả mãn** $xy+yz+zx=1$ **.Chứng minh rằng:** $x^2+2y^2+2z^2\ge\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ **.**

(Tương tự bài toán trong đề thi học sinh giỏi Tỉnh 12-Năm 1999-2000)

HDG: Ta áp dụng cho trường hợp: $n=2,\ M=1$ và $k=1$

Bước 1: Tìm $m=\frac{1}{4}\left[\left(4.2+1\right)-\sqrt{1+8.1.2}\right]=\frac{9-\sqrt{17}}{4}$

Bước 2: Kiểm nghiệm kết quả**:** $S=x^2+2y^2+2z^2\ge2\left(n-m\right)=2\left(2-\frac{9-\sqrt{17}}{4}\right)=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

Phần hai BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACÔPXKI (CAUCHY-SCHWARZ)

I-CÁC DẠNG BẤT ĐẲNG THỨC

Dạng cơ bản: $\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2\le\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)$ ***với*** $a_i;b_i\in\mathbb{R},\ \forall i=\overline{1,n}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ và $\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$ ***là hai bộ số tỉ lệ, nghĩa là tồn tại số k sao cho*** $b_i=ka_i\quad\forall i=\overline{1,n}$

Hệ quả: 1). Với hai dãy số $\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ và $\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$ ***với*** $b_i>0,\ \forall i=\overline{1,n}$ ***ta có:***

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\ge\frac{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$$ ***(Bất đẳng thức Schwarz).***

2). Với hai dãy số thực $\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ và $\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$ ***ta có:***

$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+...+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\ge\sqrt{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2+\left(b_1+b_2+..+b_n\right)^2}$ ***(Bất đẳng thức Mincôpxki)***

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ ***là hai bộ số tỉ lệ.***

II-MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP
1). Sử dụng trực tiếp BĐT Bunhiacôpxki
a).Đánh giá vế bé sang vế lớn
Ví dụ 1. Cho $a^2+b^2+c^2=1$ **. Chứng minh rằng:** $a+3b+5c \le \sqrt{35}$ **.**
Giải: Theo Bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có: $a+3b+5c \le \sqrt{(1^2+3^2+5^2)(a^2+b^2+c^2)} = \sqrt{35}$ đpcm.

Ví dụ 2. Cho $x^2+y^2=1$ **. Chứng minh rằng:** $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x} \le \sqrt{2+\sqrt{2}}$ **.**
Giải: Theo Bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$$x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x} \le \sqrt{(x^2+y^2)(1+x+1+y)} = \sqrt{2+x+y} \le \sqrt{2+\sqrt{2(x^2+y^2)}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\ .$$

Ví dụ 3. Cho $36x^2+16y^2=9$ **. Chứng minh rằng:** $|y-2x| \le \dfrac{5}{4}$ **.**
Giải: Theo Bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$$(y-2x)^2 = \left(\frac{1}{4}.4y+\left(-\frac{1}{3}\right).6x\right)^2 \le \left(\frac{1}{16}+\frac{1}{9}\right)(16y^2+36x^2) = \frac{25}{16.9}.16 = \frac{25}{9}$$

Suy ra: $|y-2x| \le \dfrac{5}{4}$ (đpcm).

Ví dụ 4. Cho $a(a-1)+b(b-1)+c(c-1) \le \dfrac{4}{3}$**. Chứng minh rằng:** $a+b+c \le 4$ **.**

Giải:
Theo giả thiết ta có:

$$a(a-1)+b(b-1)+c(c-1) = \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{4}{3}+\frac{3}{4} = \frac{25}{12}$$

Áp dụng Bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$$a+b+c = \left(a-\frac{1}{2}\right)+\left(b-\frac{1}{2}\right)+\left(c-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2} \le \sqrt{3\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2\right]}+\frac{3}{2} = \sqrt{3.\frac{25}{2}}+\frac{3}{2} = 4$$

Ta có đpcm.
Ví dụ 5. (Đề thi học sinh giỏi Tỉnh 10-Bảng A-Năm 1992-1993)
Chứng minh: $(x^2+ax+b)^2+(x^2+cx+d)^2 \le (2x^2+1)^2$
với mọi a, b, c, d thoả mãn điều kiện: $a^2+b^2+c^2+d^2=1$

Giải: Theo Bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$$(x^2+ax+b)^2 \le (x^2+a^2+b^2)(x^2+x^2+1) = (x^2+a^2+b^2)(2x^2+1)$$

$$(x^2+cx+d)^2 \le (x^2+c^2+d^2)(x^2+x^2+1) = (x^2+c^2+d^2)(2x^2+1)$$

Cộng vế theo vế ta được:

$\left(x^2+ax+b\right)^2+\left(x^2+cx+d\right)^2\le\left(2x^2+1\right)\left(2x^2+a^2+b^2+c^2+d^2\right)=\left(2x^2+1\right)^2$ (đpcm)

(Vì $a^2+b^2+c^2+d^2=1$).

Ví dụ 6. (Đề thi học sinh giỏi Tỉnh 10-Bảng A-Năm 1995-1996)

Cho $a,b,c\in\mathbb{R}_+$ và $a+b+c=1$**. Chứng minh rằng:**

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\sqrt{6}$$

Giải: Theo Bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)^2\le(1+1+1)\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]=3.2(a+b+c)=6$

Suy ra $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\sqrt{6}$.

Ví dụ 7. (Đề thi học sinh giỏi Tỉnh 10-Bảng A-Năm 1998-1999)

Cho biết phương trình $(x+a)^2+(y+b)^2+(x+y)^2=c^2$ **có nghiệm.**

Chứng minh rằng: $(a+b)^2\le3c^2$**.**

Giải: Theo Bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$(a+b)^2\le\left[(x+a)+(y+b)+(-x-y)\right]^2\le(1+1+1)\left[(x+a)^2+(y+b)^2+(x+y)^2\right]=3c^2$.

Vậy $(a+b)^2\le3c^2$.

b).Đánh giá vế vế lớn sang vế bé.

Ví dụ 1. (ĐỀ THI HSG Tỉnh Nghệ An-Lớp 10-Bảng A-1999-200)

Cho $a_i,b_i\in\mathbb{R}\ (i=1,2,3)$**.**

a).Chứng minh rằng: $\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2$**.**

b).Giả sử $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=4$**. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:** $P=a_1^4+a_2^4+a_3^4$

Giải: a). Xét hàm số

$f(x)=\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)x^2+2\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)x+\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)=\left(a_1x+b_1\right)^2+\left(a_2x+b_2\right)^2+\left(a_3x+b_3\right)^2\ge0,\forall x\in$

Nếu $a_1^2+a_2^2+a_3^2=0\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=0$ thay vào BĐT đúng.

Nếu $a_1^2+a_2^2+a_3^2>0$ ta có: $f(x)\ge0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta'=\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)-\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\le0$

Suy ra: $\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2$ đpcm.

b). Ta có:

$P=\frac{1}{3}(1+1+1)\left(a_1^4+a_2^4+a_3^4\right)\ge\frac{1}{3}\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2=\frac{1}{3}\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(a_2^2+a_3^2+a_1^2\right)\ge\frac{1}{3}\left(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1\right)^2=\frac{16}{3}$

Vậy $MinP=\frac{16}{3}\ khi\ x=y=z=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 2. Cho $a+b+c=6$**. Chứng minh rằng:** $a^2+b^2+c^2\ge12$**.**

Giải: Theo Bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{3}(1+1+1)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\frac{1}{3}(1.a+1.b+1.c)^2=\frac{1}{3}.6^2=12$

Ví dụ 3.Chứng minh rằng: Nếu phương trình $x^4+bx^3+cx^2+bx+1=0$ **có nghiệm thì:** $b^2+(c-2)^2>3$**.**

Giải: Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $x^4+bx^3+cx^2+bx+1=0$ thì $x_0\neq 0$. Ta có:

$$x^4+bx^3+cx^2+bx+1=0 \Leftrightarrow x_0^2+\frac{1}{x_0^2}+b\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)+c=0.$$

Đặt $t=x_0+\frac{1}{x_0}\Rightarrow |t|\geq 2$.

Khi đó ta có: $t^2+bt+c-2=0\Rightarrow t^2=-(bt+c-2)\Rightarrow t^4=(bt+c-2)^2\leq\left[b^2+(c-2)^2\right](t^2+1)$

Suy ra: $b^2+(c-2)^2\geq\frac{t^4}{t^2+1}=t^2-1+\frac{1}{t^2+1}>4-1+0=3$. (đpcm)

Ví dụ 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f=(x-2y+1)^2+(2x+ay+5)^2$

Giải. Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$f=\frac{1}{5}\left[(-2)^2+1^2\right]\left[(x-2y+1)^2+(2x+ay+5)^2\right]\geq\frac{1}{5}\left[(-2)(x-2y+1)+1.(2x+ay+5)\right]^2=\frac{1}{5}\left[(a+4)y+3\right]^2$$

Nếu $a\neq -4$ thì $f\geq 0$ và dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} y=-\dfrac{3}{a+4} \\ x=2y-1\end{cases}$

Nếu $a=-4$ thì $f\geq\frac{9}{5}$ và dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x-2y=\dfrac{11}{5} \\ y\in\mathbb{R}\end{cases}$

Vậy: Với $a\neq -4$ thì $M\inf=0$

Nếu $a=-4$ thì $M\inf=\frac{9}{5}$.

Ví dụ 5. (ĐỀ THI HSG Tỉnh Nghệ An-Lớp 10-Bảng A-2002-20030

Cho a, b, c, x, y, z là các số thực thoả mãn $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=25 \\ x^2+y^2+z^2=36 \\ ax+by+cz=30\end{cases}$

Hãy tính giá trị của biểu thức $P=\frac{a+b+c}{x+y+z}$**.**

Giải. Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2$

Theo bài ra ta có: $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=25.36=30^2=(ax+by+cz)^2$

Do đó đẳng thức xảy ra khi: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}\Rightarrow\frac{a^2}{x^2}=\frac{b^2}{y^2}=\frac{c^2}{z^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{25}{36}=\left(\frac{5}{6}\right)^2$

Suy ra: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{a+b+c}{x+y+z}=\pm\frac{5}{6}$

Vậy: $P=\frac{a+b+c}{x+y+z}=\pm\frac{5}{6}$

2). Sử dụng kĩ thuật nghịch đảo

Dạng 1.

$$\left(b_1+b_2+...+b_n\right)\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\right)\ge\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\ge\frac{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2}{b_1+b_2+...+b_n}\quad \forall b_i>0$$

Dạng 2. $\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_n}{b_n}\right)\ge\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2\quad \forall a_i,\, b_i>0$

Ví dụ 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}\ \forall a,b,c>0.$$

Giải. Theo BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\left[\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right]\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}$$ **đpcm.**

Ví dụ 2. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}\ \forall a,b,c>0.$$

Giải. Ta có: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb}\ge\frac{3}{2}$

Theo BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$\left[(ab+ac)+(bc+ba)+(ca+cb)\right]\left[\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb}\right]\ge(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Mà: $(a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ca)$ Do đó: $\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb}\ge\frac{3}{2}$. Suy ra đpcm.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\ \forall a,b,c>0.$$

Giải. Ta có: $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\Leftrightarrow\frac{a^4}{ab+ac}+\frac{b^4}{bc+ba}+\frac{c^4}{ca+cb}\ge\frac{3}{2}$

Theo BĐT Bunhiacôpxki ta có:

Mà: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

Do đó: $\frac{a^4}{ab+ac}+\frac{b^4}{bc+ba}+\frac{c^4}{ca+cb}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

Suy ra đpcm.

Ví dụ 4.(Mỹ MO-1993) Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}\ \forall a,b,c,d>0.$$

Giải. Ta có:

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{a(b+2c+3d)}+\frac{b^2}{b(c+2d+3a)}+\frac{c^2}{c(d+2a+3b)}+\frac{d^2}{d(a+2b+3c)}\geq\frac{2}{3}$$

Áp dụng BĐT Svacxơ ta có:

$$\frac{a^2}{a(b+2c+3d)}+\frac{b^2}{b(c+2d+3a)}+\frac{c^2}{c(d+2a+3b)}+\frac{d^2}{d(a+2b+3c)}\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+bc+cd+da+ac+bd)}.$$

Mà

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2bc+2cd+2da+2ac+2bd$$

$$=\frac{1}{3}\left[(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+d^2)+(d^2+a^2)+(a^2+c^2)+(b^2+d^2)\right]+2(ab+bc+cd+da+ac+bd)$$

$$\geq\left(\frac{2}{3}+2\right)(ab+bc+cd+da+ac+bd)=\frac{8}{3}(ab+bc+cd+da+ac+bd)$$

Do đó:

$$\frac{a^2}{a(b+2c+3d)}+\frac{b^2}{b(c+2d+3a)}+\frac{c^2}{c(d+2a+3b)}+\frac{d^2}{d(a+2b+3c)}\geq\frac{\frac{8}{3}(ab+bc+cd+da+ac+bd)}{4(ab+bc+cd+da+ac+bd)}=\frac{2}{3}$$

Suy ra đpcm.

Ví dụ 5. (IRAN MO 1998). Giả sử $x,y,z\geq 1$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$**. Chứng minh** $\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$**.**

Giải. Vì $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2\Rightarrow\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}=1$

Theo BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$(x+y+z)=(x+y+z)\left(\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\right)\geq\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^2$$

Suy ra: $\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{3}{2}$.

Ví dụ 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}$ **với a, b, c là các số thực dương tuỳ ý.**

Giải. Sử dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$$\frac{3a}{b+c}+3+\frac{4b}{c+a}+4+\frac{5c}{a+b}+5=(a+b+c)\left(\frac{3}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\left[\frac{3}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\right]\ge\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}\right)^2}{2}$$

Suy ra: $P=\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}\ge\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}\right)^2}{2}-12$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{b+c}{\sqrt{3}}=\frac{c+a}{2}=\frac{a+b}{\sqrt{5}}$.

Vậy $MinP=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}\right)^2}{2}-12$ khi $\frac{b+c}{\sqrt{3}}=\frac{c+a}{2}=\frac{a+b}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng nếu $a,b,c\ge 0$ và $abc=1$ **thì**

$$\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}\le 1.$$

Giải. Ta có: $\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}\le 1\Leftrightarrow 1-\frac{2}{2+a}+1-\frac{2}{2+b}+1-\frac{2}{2+c}\ge 1\Leftrightarrow\frac{a}{2+a}+\frac{b}{2+b}+\frac{c}{2+c}\ge 1$

Tồn tại các số thực x,y,z sao cho $a=\frac{x}{y};\ b=\frac{y}{z};\ c=\frac{z}{x}$. Ta cần chứng minh:

$$\frac{\frac{x}{y}}{2+\frac{x}{y}}+\frac{\frac{y}{z}}{2+\frac{y}{z}}+\frac{\frac{z}{x}}{2+\frac{z}{x}}=\frac{x}{2y+x}+\frac{y}{2z+y}+\frac{z}{2x+z}\ge 1\Leftrightarrow\frac{x^2}{2xy+x^2}+\frac{y^2}{2yz+y^2}+\frac{z^2}{2zx+z^2}\ge 1$$

Theo BĐT Svacxơ ta có: $\frac{x^2}{2xy+x^2}+\frac{y^2}{2yz+y^2}+\frac{z^2}{2zx+z^2}\ge\frac{(x+y+z)^2}{2xy+x^2+2yz+y^2+2zx+z^2}=\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2}=1$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z\ hay\ a=b=c=1$.

Từ đó suy ra đpcm.

Ví dụ 8.(IMO-2001). Với mọi số dương a, b, c dương ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1.$$

Giải.

Ta có: $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1\Leftrightarrow\frac{a^2}{a\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b^2}{b\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c^2}{c\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$

Theo BĐT Svacxơ ta có:

$$\frac{a^2}{a\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b^2}{b\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c^2}{c\sqrt{c^2+8ab}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{\left(a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ac}+c\sqrt{c^2+8ab}\right)}$$

Ta có $\left(a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ac}+c\sqrt{c^2+8ab}\right)=\left(\sqrt{a}.\sqrt{a^3+8abc}+\sqrt{b}.\sqrt{b^3+8abc}+\sqrt{c}.\sqrt{c^3+8abc}\right)$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có:

$\left(\sqrt{a}.\sqrt{a^3+8abc}+\sqrt{b}.\sqrt{b^3+8abc}+\sqrt{c}.\sqrt{c^3+8abc}\right) \le \sqrt{(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3+24abc\right)}$

Do đó: $\dfrac{a^2}{a\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b^2}{b\sqrt{b^2+8ac}}+\dfrac{c^2}{c\sqrt{c^2+8ab}} \ge \dfrac{(a+b+c)^2}{\left(a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ac}+c\sqrt{c^2+8ab}\right)}$

Ta cần chứng minh: $a^3+b^3+c^3+24abc \le (a+b+c)^3 \Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2 \ge 6abc$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo BĐT Cô si . Từ đó suy ra đpcm.

Phần ba TÌM THÊM PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

I-MỘT PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Để chứng minh $A \ge B$ trong một số trường hợp ta có thể nghĩ đến một phương pháp sau:
"Tìm C sau đó chứng minh $A \ge C$ và $C \ge B$ ". Vấn đề quan trọng ở đây là phải tìm C?
Để tìm C ta có thể theo các cách sau

Cách 1-Dựa trên hai bổ đề sau:

Bổ đề 1. *"Trong ba số bất kì $x_1,\ x_2,\ x_3$ luôn tồn tại hai số $x_i; x_j$ (i, j thuộc tập {1; 2; 3} sao cho:*

$\begin{cases} x_i \ge a \\ x_j \ge a \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} x_i \le a \\ x_j \le a \end{cases}$ ***(a là số thực bất kỳ)"***

Chứng minh: Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x_1 \le x_2 \le x_3$.

Nếu $x_2 \le a$ thì $x_1 \le a$ và $x_2 \le a$ ta có điều phải chứng minh.

Nếu $x_2 \ge a$ thì $x_2 \ge a$ và $x_3 \ge a$ ta có điều phải chứng minh.

Bổ đề 2. *"Nếu* $\begin{cases} x \ge a \\ y \ge a \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} x \le a \\ y \le a \end{cases}$ ***thì*** $xy \ge a(x+y)-a^2$ **".**

Chứng minh: Từ giả thiết ta có: $(x-a)(y-a) \ge 0 \Leftrightarrow xy \ge a(x+y)-a^2$ (đpcm)

II-VẬN DỤNG BỔ ĐỀ CHỨNG MINH MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC

Ví dụ 1. Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức:

$2\left(x^2+y^2+z^2\right)+xyz+8 \ge 5(x+y+z)$.

(Chào IMO 2007-Tạp chí THTT số 357 tháng 3 năm 2007)

Chứng minh: Theo Bổ đề 1 và vai trò x, y, z trong bài toán bình đẳng nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 1 \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} x \le 1 \\ y \le 1 \end{cases}$. Khi đó theo Bổ đề 2 ta có: $xy \ge x+y-1 \Rightarrow xyz \ge xz+yz-z$ (vì $z>0$)

Suy ra: $2\left(x^2+y^2+z^2\right)+xyz+8 \ge 2\left(x^2+y^2+z^2\right)+xz+yz-z+8$ (1)

Ta sẽ chứng minh: $2\left(x^2+y^2+z^2\right)+xz+yz-z+8 \ge 5(x+y+z)$ (2)

Thật vậy:

$(2) \Leftrightarrow (y+z-2)^2+(x+z-2)^2+3(x-1)^2+3(y-1)^2+2(z-1)^2 \ge 0$, (đúng)

Từ (1) và (2) suy ra: $2\left(x^2+y^2+z^2\right)+xyz+8 \ge 5(x+y+z)$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

<u>Nhận xét:</u> *1).Ta có thể sử dụng định lí về dấu âm thức bậc hai để chứng minh (2)*
2).Tương tự ta có thể chứng minh:

a). " Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức:
$m\left(x^2+y^2+z^2\right)+xyz+3m+2\ge\left(2m+1\right)\left(x+y+z\right)$.

Trong đó m là số thực cho trước $m\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$"

b). " Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức:
$\left(2n-1\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)+2xyz+1\ge 2n\left(xy+yz+zx\right)$.

Trong đó m là số thực cho trước $n\ge 1$"

c). " Nếu x, y, z là ba số thực không âm thì: $xyz+x^2+y^2+z^2+2\ge x+y+z+xy+yz+zx$ "

d). " Nếu x, y, z là các số thực dương thì: $2xyz+x^4+y^4+z^4+13\ge 6\left(x+y+z\right)$ "

.

Ví dụ 2. Cho x, y, z là các số thực không âm. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức:
$5\left(x^3+y^3+z^3\right)+3xyz+9\ge 9\left(xy+yz+zx\right)$**.**

Chứng minh:
Theo Bổ đề 1 và vai trò x, y, z trong bài toán bình đẳng nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử
$\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 1\end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases}x\le 1\\ y\le 1\end{cases}$**.**Khi đó theo Bổ đề 2 ta có: $xy\ge x+y-1\Rightarrow 3xyz\ge 3xz+3yz-3z$ (vì $z\ge 0$)

Suy ra: $5\left(x^3+y^3+z^3\right)+3xyz+9\ge 5\left(x^3+y^3+z^3\right)+3xz+3yz-3z+9$ (1)

Ta sẽ chứng minh:
$5\left(x^3+y^3+z^3\right)+3xz+3yz-3z+9\ge 9\left(xy+yz+zx\right)\Leftrightarrow 5\left(x^3+y^3+z^3\right)+9\ge 9xy+6yz+6zx+3z$

Mà theo Bất đẳng thức Cô si ta có:

$3z=3\sqrt[3]{z.1.1}\le z^3+1+1$ $\qquad$ $3xz=3\sqrt[3]{x.z.1}\le x^3+z^3+1\Rightarrow 6xz\le 2x^3+2z^3+2$

$6yz\le 2y^3+2z^3+2$ $\qquad$ $3xy=3\sqrt[3]{x.y.1}\le x^3+y^3+1\Rightarrow 9xy\le 3x^3+3y^3+3$

Cộng vế theo vế các Bất đẳng thức trên ta được:

$5\left(x^3+y^3+z^3\right)+9\ge 9xy+6yz+6zx+3z$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $5\left(x^3+y^3+z^3\right)+3xyz+9\ge 9\left(xy+yz+zx\right)$ (đpcm)

Ví dụ 3. Cho x, y, z là các số thực không âm thoả mãn: x + y + z = 1. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức:
$9xyz+1\ge 4\left(xy+yz+zx\right)$**. Đẳng thức xảy ra khi nào?**

Chứng minh:
Theo Bổ đề 1 và vai trò x, y, z trong bài toán bình đẳng nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử
$\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{3}\\ y\ge\dfrac{1}{3}\end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases}x\le\dfrac{1}{3}\\ y\le\dfrac{1}{3}\end{cases}$**.**Khi đó theo Bổ đề 2 ta có: $9xy\ge 3x+3y-1\Rightarrow 9xyz\ge 3xz+3yz-z$ (vì $z\ge 0$)

Suy ra: $1+9xyz\ge 1+3xz+3yz-z$ (1)

Ta sẽ chứng minh: $1+3xz+3yz-z\ge 4\left(xy+yz+zx\right)$ (2)

Thật vậy, $(2)\Leftrightarrow 1\ge z+z\left(x+y\right)+4xy\Leftrightarrow 1\ge z+z\left(1-z\right)+4xy$ (vì $x+y+z=1$)

$\Leftrightarrow (1-z)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$ (Vì $x+y+z=1$)

$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$, đúng

Từ (1) và (2) suy ra: $9xyz+1 \geq 4(xy+yz+zx)$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$ hoặc $x=y=\frac{1}{2}$; $z=0$ hoặc $x=z=\frac{1}{2}$; $y=0$ hoặc $y=z=\frac{1}{2}$; $x=0$.

Nhận xét: *Tương tự ta có thể chứng minh:*

Cho x, y, z là các số thực không âm thoả mãn: x + y + z = k. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức: $9xyz+k^3 \geq 4k(xy+yz+zx)$. **Đẳng thức xảy ra khi nào?**

Ví dụ 4. Cho x, y, z là các số thực không âm thoả mãn: x + y + z = 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = xy+yz+zx+mxyz$.

Giải. * Theo ví dụ 3 ta có: $xy+yz+zx-\frac{9}{4}xyz \leq \frac{1}{4}$

Suy ra: $A = xy+yz+zx-\frac{9}{4}xyz+\left(m+\frac{9}{4}\right)xyz$

Nếu $m+\frac{9}{4} \geq 0$ hay $m \geq -\frac{9}{4}$ thì $\left(m+\frac{9}{4}\right)xyz \leq \left(m+\frac{9}{4}\right)\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \frac{m}{27}+\frac{1}{12}$.

Do đó: $A \leq \frac{m+9}{27}$. Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi x = y = z = $\frac{1}{3}$.

Nếu $m+\frac{9}{4} < 0$ hay $m < -\frac{9}{4}$ thì $\left(m+\frac{9}{4}\right)xyz \leq 0$. Do đó: $A \leq \frac{1}{4}$.

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi x = y = $\frac{1}{2}$; z = 0.

*) Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$xy+yz+zx = (x+y+z)(xy+yz+zx) \geq 3\sqrt[3]{xyz}.3\sqrt[3]{xy.yz.zx} = 9xyz$

Suy ra: $xy+yz+zx-9xyz \geq 0$.

$A = xy+yz+zx-9xyz+(m+9)xyz$

Nếu $m+9 \geq 0$ hay $m \geq -9$ thì $(m+9)xyz \geq 0$.

Do đó: $A \geq 0$. Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi x = y = 0 và z = 1.

Nếu $m+9 < 0$ hay $m < -9$ thì $(m+9)xyz \geq (m+9)\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \frac{m+9}{27}$.

Do đó: $A \geq \frac{m+9}{27}$. Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi x = y = z = $\frac{1}{3}$.

Kết luận: Nếu $m < -9$ thì giá trị lớn nhất của A là $\frac{1}{4}$, giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{m+9}{27}$.

Nếu $-9 \leq m < -\frac{9}{4}$ thì giá trị lớn nhất của A là $\frac{1}{4}$, giá trị nhỏ nhất của A là 0.

Nếu $m \geq -\frac{9}{4}$ thì giá trị lớn nhất của A là $\frac{m+9}{27}$, giá trị nhỏ nhất của A là 0.

Vậy ta có các bất đẳng thức:

Nếu x, y, z là các số thực không âm thoả mãn: x + y + z = 1 thì

a). $\frac{m+9}{27} \le xy + yz + zx + mxyz \le \frac{1}{4}$ **(trong đó m là số thực cho trước và m < -9)**

a). $0 \le xy + yz + zx + mxyz \le \frac{1}{4}$ **(trong đó m là số thực cho trước và** $-9 \le m < -\frac{9}{4}$**)**

a). $0 \le xy + yz + zx + mxyz \le \frac{m+9}{27}$ **(trong đó m là số thực cho trước và** $m \ge -\frac{9}{4}$**)**

Chẳng hạn với m = -2 ta có bài toán:

Bài toán 1.Cho x, y, z là các số thực không âm thoả mãn: x + y + z = 1. Chứng minh rằng:

$$0 \le xy + yz + zx - 2xyz \le \frac{7}{27}$$ **(Đề thi IMO 1984)**

Với nhận xét rằng :

**) Nếu x, y, z là các số thực không âm thoả mãn: x + y + z = 1 thì*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 - 2(xy + yz + zx) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4xyz = 1 - 2(xy + yz + zx - 2xyz)$$

Do đó ta có bài toán sau:

Bài toán 2.Cho x, y, z là các số thực không âm thoả mãn: x + y + z = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{13}{27} \le x^2 + y^2 + z^2 + 4xyz \le 1.$$

**) Nếu x, y, z là các số thực không âm thoả mãn: x + y + z = 1 thì*

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 1 - 3(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = 1 - 3(xy + yz + zx - 2xyz)$$

Do đó ta có:

Bài toán 3. Cho x, y, z là các số thực không âm thoả mãn: x + y + z = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{9} \le x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \le 1$$

Bây giờ nếu chúng ta thay đổi giả thiết: Nếu x, y ,z là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1 thì

$$(x + y - z)(x + z - y)(y + z - x) > 0 \Leftrightarrow (1 - 2z)(1 - 2y)(1 - 2x) > 0 \ (\text{Vì } x + y + z = 1)$$

$$\Leftrightarrow xy + yz + zx - 2xyz > \frac{1}{4}.$$

Từ đó ta có các bài toán sau:

Bài toán 1.1. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng:

a). $\frac{1}{4} < ab + bc + ca - 2abc \le \frac{7}{27}$

b). $\frac{13}{27} \le a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$.

c). $\frac{2}{9} \le a^3 + b^3 + c^3 + 3abc < \frac{1}{4}$

Bài toán 2.2.Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 2. Chứng minh rằng:

$$\frac{52}{27} \le a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$$ **(Đề thi HSG Tỉnh lớp 10-Năm học 2005-2006)**

PHỤ LỤC